

Realistic Quantum Theory

- Solving the Interpretation Problem -

Rudolf Lierenfeldt*)

Abstract

In this monography an ontologically realistic theory of the quantum universe and its properties is developed. This theory is based on logic in the same way as mathematical theories are; in particular, every concept used (e.g. "quantum state") is given a precise definition.

The theory starts with the canonical model, which states that, for every quantum system, each subspace of the Hilbert space has a unique truth value at every point of time. In order to avoid any problems with the Kochen-Specker theorem, factual instead of numerical properties are in the focus here. (Numerical properties are merely regarded as parameterized sets of factual properties.) A more general concept of probability than that of Kolmogorov is used in order to solve the problem of Bell's inequality. Appropriate deterministic laws as well as a law of probability are defined.

The theory is proved to be logically consistent, so there do not arise any problems with no-go-theorems. Since quantum systems as well as quantum states are formally defined, there is no problem as to their interpretation, nor is there a "problem of measurement". Finally, the Copenhagen formalism is derived for the case of experiments that can be evaluated from a macroscopic perspective. The theory thus represents a systematic solution to the interpretation problem of quantum theory.

*) The author is a mathematician who is working on the foundations of quantum physics as an independent researcher.

Contact: r.lierenfeldt@e.mail.de

This document is a postprint of a monography in German language that has first been published as:

Rudolf Lierenfeldt: *Realistische Quantentheorie – Zur Lösung des Deutungsproblems*. Hamburg: tredition, 2018. ISBN 978 3 7469 9163 4.

The purpose of placing this monography into the Mathematical Physics Preprint Archive is to ensure easy access as well as long term availability of this work.

Copyright © 2022 by Rudolf Lierenfeldt

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International license.

Summary

What is usually called "quantum theory" is, in fact, just a formalism by which the results of certain experiments can be predicted. It is not, however, a theory of physical reality, and that is why there is an "interpretation problem". Many attempts have been made to solve this problem, but none of these has led to a precisely formulated theory from which the Copenhagen formalism could be derived in a rigorous sense.

In order to solve the interpretation problem, one has to define a physical theory of the universe and its properties such that the Copenhagen quantum formalism can be derived from it. Such a theory consists of a model, a set of axioms (i.e. deterministic laws), and a probability function defined on the algebra of all possible facts as given by the model. Essentially, the model must specify the set \mathcal{E} of all possible events. This can be achieved by defining the set of all real physical quantities and assuming a timeline $T \subset \mathbb{R}$. If L is one of these quantities, if ΔL is a subset of \mathbb{R} and $t \in T$ is a point of time, then the term

"($L \in \Delta L$) at time t "

constitutes a possible event.

In the case of quantum theory, a numerical quantity L is represented by a self-adjoint operator on \mathcal{H} , the Hilbert space of the universe. The term " $L \in \Delta L$ " then corresponds to a linear subspace of \mathcal{H} . So, if we define

$\mathcal{U} := \{ A \mid A \text{ is a linear subspace of } \mathcal{H} \}$,

then each event is described by a pair (A,t) with $A \in \mathcal{U}$ and $t \in T$. Consequently we have

$\mathcal{E} = \mathcal{U} \times T$ (the Cartesian product of \mathcal{U} and T).

Now, in quantum theory, there are three deterministic laws or axioms:

- 1) The principle of monotonicity. It states that, for all $t \in T$ and $A, B \in \mathcal{U}$, if $A \subset B$ and (A,t) is real, then (B,t) is real as well.
- 2) The principle of exclusion. It states that, for all $t \in T$ and $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$, if the A_j are jointly orthogonal, then the (A_j,t) cannot all be real at the same time.

Here "jointly orthogonal" means that the A_j are pairwise commutable (i.e. their projection operators are) and that their intersection is the zero-space.

- 3) The Schrödinger equation: For all $t \in T$ and $A \in \mathcal{U}$, the event $(A,0)$ is real if and only if $(U_t A, t)$ is real. Here U_t is defined in the usual way by $U_t := e^{-itH/\hbar}$ with the Hamiltonian H .

Since the *real* world ω_0 (i.e. the set of events that really occur) is a subset of \mathcal{E} , we can define the set of *possible* worlds as the power set of \mathcal{E} :

$$\Omega := \wp(\mathcal{E}).$$

For every $E \in \mathcal{E}$ the term

$$\langle E \rangle := \{ \omega \in \Omega \mid E \in \omega \}$$

denotes the possible fact that E is real. Now let \mathcal{A} be the smallest set algebra on Ω which contains all such possible facts $\langle E \rangle$. Then \mathcal{A} represents the algebra of *all* possible facts as given by the model. Essentially, such a possible fact is a logical combination of events. On \mathcal{A} , common logical operations like " \wedge ", " \vee ", " \neg ", etc. can be defined.

Every axiom corresponds to a subset of \mathcal{A} , so their union, denoted by AX , is a subset of \mathcal{A} as well. By

$$\Omega_{AX} := \{ \omega \in \Omega \mid \forall F \in AX \omega \in F \}$$

we define Ω_{AX} to be the set of those possible worlds that obey to all deterministic laws. Furthermore, for all $F \in \mathcal{A}$ let

$$\diamond_{AX}(F) := F \cap \Omega_{AX} \neq \emptyset.$$

The operator \diamond_{AX} , defined on \mathcal{A} , denotes "physical possibility". On this basis one can define a function μ on \mathcal{A} such that μ is a continuous extension of \diamond_{AX} . This function denotes "physical improbability" ("improbability" essentially means "gradual impossibility" here). μ is a sub-additive and monotonous function on \mathcal{A} , i.e. a so-called "outer measure" in the sense of mathematical measure theory.

From the absolute improbability function μ we can derive conditional improbabilities by

$$\mu(F \mid G) := \mu(F \wedge G) / \mu(G) \quad (\text{for } F, G \in \mathcal{A})$$

as well as probabilities

$$v(F | G) := 1 - \mu(\neg F | G) \quad (\text{for } F, G \in \mathcal{A}).$$

Furthermore, "expected frequencies" $P(F | G)$ can be defined by the so-called "law of large numbers". If $P(\cdot | G)$ is defined on a sub-algebra \mathcal{A}' of \mathcal{A} , then it is a probability measure on \mathcal{A}' in the usual sense. What has been introduced here is a concept of probability which is slightly more general than that of Kolmogorov. This is done for good reason: It allows us to avoid any problems with Bell's inequality.

The theory is complete now: It consists of a model of reality, deterministic laws and a law of probability. It is ontologically realistic since every event has a unique truth value, independently of whether anything has been observed or measured. Moreover, the theory's logical consistency can be formally proved, so there is no problem with any no-go-theorem. As said before, problems with Bell's inequality are avoided by using a more general concept of probability. The problem of Kochen-Specker's theorem does not arise, because we do not assume numerical properties to be "value definite". Such properties are allowed to have, at every point of time, either exactly one value or no value at all. This is not "weird" since numerical properties in everyday life, such as the length of a table, are not value definite either: They have a value only as long as the object in question exists.

Finally, the Copenhagen formalism can be derived from the theory. First we have to note that a subsystem Q of the universe corresponds to a tensor factor of the Hilbert space \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}.$$

Here Q^- denotes the "rest of the world". Now the conditional quantum state $W_{Q,t|\mathcal{B}}$ can be defined in a quite plausible way for every subsystem Q , each $t \in T$, and any finite sequence of events \mathcal{B} as a condition. This quantum state is always a statistical operator on \mathcal{H}_Q . If its rank is equal to one, it is called a *pure* state and can be represented by a single wave function $\varphi \in \mathcal{H}_Q$. The quantum state thus defined will never be "ontic". However, if \mathcal{B} corresponds to the empirical knowledge of a subject, the state can be called "epistemic", since in this case it describes what the subject knows about the subsystem.

Remark: If $(A,t) \in \mathcal{E}$ is an event, then A is a complete description of its form and thus can be called "ontic". If the dimension of A is equal to one, it *also* can be represented by a single wave function.

The quantum state defined here behaves just in the way the Copenhagen formalism describes: The state is prepared by the condition \mathcal{B} , it moves according to the Schrödinger equation as long as the system is undisturbed (in practice this will happen only approximately), and, in the case of an experiment, probabilities of possible results can be calculated by the usual formula. When a measurement is completed and its result is incorporated into \mathcal{B} as an additional condition, the new conditional state is given by the formula described in the Copenhagen formalism.

Conclusions: The theory considered here is precisely defined, starting with the canonical model of quantum theory. Moreover, it is logically consistent and the Copenhagen formalism can be derived from it. Since every concept used in this theory is given a precise definition, there is no interpretation problem regarding quantum systems, quantum states or measurements. Questions that arise in the interpretation debate, such as: "Are wave functions ontic or epistemic?", can be clearly answered. Speculative concepts like "many worlds", "many minds", "pilot waves", etc. are avoided, and there are no ambiguities as occur in the so-called "Copenhagen interpretation". Thus this theory represents a reasonable solution to the interpretation problem of quantum theory.

August 2022

Rudolf Lierenfeldt

Rudolf Lierenfeldt

Realistische Quantentheorie

Zur Lösung des Deutungsproblems

Ταράσσει τοὺς ἀνθρώπους οὐ τὰ πράγματα,
ἀλλὰ τὰ περὶ τῶν πραγμάτων δόγματα.

Nicht die Dinge beunruhigen die Menschen,
sondern die Ansichten über die Dinge.

EPIKTET^{*)}

^{*)} Altgriechischer Text zitiert nach:
Kurt Steinmann: Epiktet, Handbüchlein der Moral. Reclam 2004.

Vorwort

Nach dem Scheitern der klassischen Physik vor etwa 100 Jahren wurde zur Beschreibung mikrophysikalischer Vorgänge der allseits bekannte Quantenformalismus entwickelt. Damit lassen sich die Resultate vielfältiger Quantenexperimente erfolgreich und manchmal mit sehr hoher Genauigkeit vorhersagen. Die Debatte über eine sinnvolle Deutung dieses Formalismus hat allerdings nicht zu einer überzeugenden Lösung geführt. Insbesondere kann die Quantentheorie nicht ohne weiteres als eine objektive physikalische Theorie des realen Universums und seiner Eigenschaften angesehen werden. Zur Begründung eines konsistenten naturwissenschaftlichen Weltbildes scheint sie daher auch nicht geeignet zu sein.

Unzufrieden mit dieser Situation habe ich vor vielen Jahren damit begonnen, mich mit der Deutungsproblematik zu befassen. Ziel meiner Überlegungen war es dabei nicht, den bekannten Deutungsvarianten eine weitere hinzuzufügen. Vielmehr ging es mir darum zu verstehen, was dem Deutungsproblem letztlich zugrunde liegt, um es in einer sinnvollen und überzeugenden Weise lösen zu können.

Die sich stellende Aufgabe habe ich vor allem darin gesehen, die Quantentheorie in einer ontologisch realistischen Weise und auf der Basis der klassischen Logik so zu formulieren, dass

- klar wird, was als das physikalisch Reale anzusehen ist,
- das Modell und die Gesetze der Theorie in präziser Form angegeben werden,
- die logische Konsistenz der Theorie bewiesen wird, so dass keine No-Go-Theoreme auftreten können,
- und sich der bekannte Quantenformalismus als Konsequenz aus dieser Theorie ergibt.

Zu klären waren zunächst die (modal-) logischen Grundlagen für physikalische Theorien, die probabilistische Aussagen enthalten. Nach der Formulierung eines (sehr naheliegenden) Modells der Quantenrealität musste sodann ein Axiomensystem gesucht werden, das den Gesetzen der Quantentheorie entspricht und zugleich die bekannten No-Go-Theoreme vermeidet. Diese Suche erwies sich als ausgesprochen langwierig.

Nach einer Vielzahl vergeblicher Versuche entstand schließlich ein Lösungsansatz, den ich nun mit dieser Monographie zur Diskussion stellen möchte. Dieser Lösungsansatz entspricht den genannten Kriterien und stellt die Quantentheorie dar als eine ontologisch realistische Theorie der Eigenschaften des Universums. Eine besondere Rolle spielen hierbei Überlegungen zur Wissen-

Vorwort

schaftstheorie, zum empirischen Gehalt physikalischer Theorien und zum Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Der vorliegende Text beginnt mit einem "Abstract", in dem die wichtigsten Lösungsansätze in kompakter Form zusammengefasst sind.

In der anschließenden Einleitung werden zunächst Prinzipien für einen vernünftigen Aufbau der Quantentheorie diskutiert, denen eine Darstellung der Theorie folgen sollte, damit man von einer Lösung des Deutungsproblems sprechen kann. Sodann werden die sich hieraus ergebenden Lösungsansätze für eine realistische Quantentheorie dargestellt. Es folgt eine Vorschau auf den weiteren Ablauf des Textes, in der wesentliche Definitionen des formalen Aufbaus angegeben und die wichtigsten Aussagen in möglichst lesbarer Form zusammengefasst werden. Zusammen mit dem "Abstract" ergibt die Einleitung einen guten Überblick über das gesamte Vorgehen und die Ergebnisse.

Im anschließenden Hauptteil wird der Aufbau der realistischen Quantentheorie als einer Theorie des Universums und seiner Eigenschaften ausführlich dargestellt und im Detail begründet. Dieser Teil beginnt mit einem allgemeinen formalen Ansatz zur Darstellung physikalischer Theorien, in dem die Quantentheorie ebenso wie die klassische Mechanik beschrieben werden kann. Die Formulierungen sind – im Interesse eines präzisen Verständnisses – mathematisch im Sinne exakter Definitionen und Aussagen. Ich habe mich jedoch stets bemüht, alle Aussagen außerdem in einer lesbaren sprachlichen Form wiederzugeben.

In einem Anhang finden sich die mathematisch formalen Beweise zu den Aussagen des Hauptteils. Dabei beziehen sich Verweise der Form "T.xx.xx" stets auf das entsprechende im Anhang bewiesene Theorem. Es wird im wesentlichen alles bewiesen, was im Hauptteil behauptet wird. Ausnahmen sind einerseits jene Aussagen, deren Beweis trivial oder doch nahezu trivial ist, andererseits Aussagen, die für den Gesamtzusammenhang nicht unbedingt erforderlich sind, z.B. aus dem Kapitel "Anmerkungen zu Messungen an Quantensystemen".

Generell enthält der vorliegende Text keine expliziten Verweise auf die wissenschaftliche Literatur. Es ist mir stets vor allem um die Lösung des gestellten Problems gegangen, nicht um die Einordnung in die vorhandene Diskussion oder um die historische Aufarbeitung der bisherigen Deutungsversuche.

Zwar habe ich, vor allem in den ersten Jahren meiner Auseinandersetzung mit dem Deutungsproblem, einiges an Literatur zu den verschiedenen hierfür relevanten Themen gelesen – zunächst ohne den Gedanken an eine spätere Veröffentlichung. An viele dieser Quellen kann ich mich jedoch nicht mehr im einzelnen erinnern. Ich kann daher auch nicht den Anspruch erheben, dass meine Überlegungen in jedem Einzelfall neu sind, und bitte alle Autoren um Nachsicht, deren Gedanken ich hier implizit verwende.

Vorwort

Der von mir gewählte Weg einer Veröffentlichung in Form einer Monographie hat folgende Gründe: Zum einen möchte ich die angestellten Überlegungen nicht in einzelne Zeitschriftenartikel aufteilen, da ohne den Gesamtzusammenhang nicht erkennbar wäre, wozu die einzelnen Teile benötigt werden.

Zum andern bewegt sich die Argumentation hier nicht innerhalb eines bestimmten einzelnen Fachgebiets. Zur Lösung des anstehenden Problems sind vielmehr Überlegungen zu verschiedenen Gebieten erforderlich, etwa zur Erkenntnistheorie, zur Wahrscheinlichkeitstheorie und zur Logik. Im übrigen habe ich im Interesse der notwendigen Präzision zu einer mathematischen bzw. mengentheoretischen Formulierungsweise greifen müssen, auch ganz abgesehen davon, dass dies mir als Mathematiker entgegenkommt.

Ich hoffe, mit dieser Monographie einen Beitrag zur Klärung der Fragen leisten zu können, die im Rahmen des Deutungsproblems anstehen, und sehe einer kritischen Diskussion der hier dargestellten Lösungswege seitens der wissenschaftlichen Community mit Interesse entgegen.

Im Oktober 2018

Rudolf Lierenfeldt

Inhaltsverzeichnis

Abstract	15
--------------------	----

Einleitung

A. Prinzipien für einen vernünftigen Aufbau der Quantentheorie . . .	19
B. Wesentliche Lösungsansätze	29
C. Vorschau	39

Wissenschaftstheoretische Grundlagen

1. Methodische Vorbemerkungen	56
2. Klassisch logische und ontologisch realistische Theorien	62
3. Klassische Mechanik.	69

Deterministische Gesetze der Quantentheorie

4. Quantenmechanik und das Kochen-Specker-Theorem	76
5. Die Bedeutung der Aufgabe des physikalischen "tertium non datur"	84
6. Exkurs: Die scheinbare Plausibilität des numerisch realistischen Denkens	91
7. Exkurs: Das physikalische "tertium non datur" und die Rolle der Beobachtung	98
8. Exkurs: Zur grundsätzlichen Erkennbarkeit konkreter Verletzungen des physikalischen "tertium non datur"	106

Probabilistische Gesetze

9. Zur Modellierung der möglichen Fakten bei gegebenem Axiomensystem	109
10. Das Kolmogoroff'sche Konzept der Wahrscheinlichkeit	112
11. Exkurs: Subjektbezogene Wahrscheinlichkeiten	117
12. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik	119

Wahrscheinlichkeit in der Quantentheorie

13. Absolute Wahrscheinlichkeiten in der Quantenmechanik	125
14. Probleme des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Quantenmechanik	129

- 15. Die Bell'sche Ungleichung 134
- 16. Zusammenfassung zu den Widersprüchen bei der Anwendung
des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Quantentheorie 139

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

- 17. Der empirische Gehalt von Wahrscheinlichkeitsgesetzen 142
- 18. Exkurs: Extrem unwahrscheinliche Fakten 148
- 19. Möglichkeitsmaße 151
- 20. Graduelle Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit 156

Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie

- 21. Exkurs: Das Stetigkeitsprinzip 166
- 22. Exkurs: Konstruktion äußerer Maße 171
- 23. Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie 180

Die Perspektive makroskopischer Subjekte

- 24. Die Initialbedingung und der Zeitpfeil 187
- 25. Endophysikalische Betrachtungen 194
- 26. Wahrnehmung durch "makroskopische" Subjekte 197

Empirische Zugänglichkeit vergangener Ereignisse

- 27. Dokumente für vergangene Ereignisse 201
- 28. Die empirische Zugänglichkeit von Ereignissen 208
- 29. Eine Schachtelungseigenschaft für t-zugängliche Ereignisse 213

Makroskopische Kontexte

- 30. Makroskopische Kontexte und die Plausibilität des physika-
lischen "tertium non datur". 218
- 31. Erweiterte makroskopische Kontexte 231
- 32. Allgemeine kommutative und quasi-klassische Kontexte 233
- 33. Die Realität dokumentierter Ereignisse. 238

Experimente

- 34. Makroskopische Experimente 241
- 35. Zur Endlichkeit der Initialeigenschaft 256
- 36. Das additive Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem Experiment 261

Der Formalismus der Quantentheorie

37. Quantenzustände	274
38. Die Bewegung von Subsystemen nach der Schrödinger- gleichung	284
39. Messungen an Quantensystemen	289
40. Anmerkungen zu Messungen an Quantensystemen	304
41. Subjektbezogene Quantenzustände	309
42. Varianten des Formalismus der Quantentheorie	314
43. Zur Realität gemessener Ereignisse	318
44. Exkurs: Rekonstruktiver Realismus und Quantentheorie	324

Symmetrien und Objekte

45. Symmetrien in der Quantentheorie	331
46. Anmerkungen zu Symmetrien in der Quantentheorie	340
47. Die Modellierung konkreter physikalischer Objekte	344

Quantenfeldtheorie I

48. Quantenfeldtheorie	348
49. Quantenfeldtheorie mit endlich vielen Freiheitsgraden	355
50. Zusammenfassung zur Quantenfeldtheorie	361

Quantenfeldtheorie II

51. Die Kovarianz der Quantenfeldtheorie	364
52. Das teilchenförmige Verhalten des Quantenfeldes	372
53. Anmerkungen zur Quantenfeldtheorie	380

Anmerkungen und Ergänzungen

54. Anmerkungen zu wissenschaftstheoretischen Aspekten	390
55. Einzelne Anmerkungen zur Quantentheorie	421
56. Mögliche Ergänzungen zur Quantentheorie	433

Anhang (Beweise)

B03. Klassische Mechanik	439
B04. Quantenmechanik und das Kochen-Specker-Theorem	447
B22. Exkurs: Konstruktion äußerer Maße	467
B23. Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie	469

B25. Endophysikalische Betrachtungen	484
B29. Eine Schachtelungseigenschaft für t-zugängliche Ereignisse	485
B30. Makroskopische Kontexte und die Plausibilität des physikalischen "tertium non datur".	496
B32. Allgemeine kommutative und quasi-klassische Kontexte	515
B33. Die Realität dokumentierter Ereignisse	519
B34. Makroskopische Experimente	527
B35. Zur Endlichkeit der Initialeigenschaft	549
B36. Das additive Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem Experiment	551
B37. Quantenzustände	569
B38. Die Bewegung von Subsystemen nach der Schrödinger- gleichung	573
B39. Messungen an Quantensystemen	575
B45. Symmetrien in der Quantentheorie	595
B46. Anmerkungen zu Symmetrien in der Quantentheorie	613

Abstract

Als das physikalisch Reale werden das Universum und seine Eigenschaften angesehen. Jede Eigenschaft wird modelliert durch einen linearen Unterraum des Hilbertraums \mathcal{H} des Universums, genauer: des quantenmechanischen Modelluniversums. Numerische Größen sind nichts anderes als parametrisierte Familien derartiger Eigenschaften.

Ein mögliches Ereignis besteht im Vorliegen einer Eigenschaft A zu einem Zeitpunkt t und wird mit $\langle A, t \rangle$ bezeichnet. Ein mögliches Faktum ist eine logische Kombination von solchen möglichen Ereignissen. Der ontologische Realismus drückt sich darin aus, dass jedem möglichen Ereignis (und damit auch jedem möglichen Faktum) ein Wahrheitswert zugeordnet ist (truth value definiteness).

In Anlehnung an das klassisch-mechanische Konzept eines Pfades im Phasenraum ergeben sich die folgenden deterministischen Axiome:

- MON (Monotonieprinzip): Ist $A < B$ und $\langle A, t \rangle$ gegeben, so ist auch $\langle B, t \rangle$ gegeben.
- SEC (Ausschlussprinzip): Sind A_1, A_2, \dots paarweise vertauschbar und ist der Durchschnitt der A_j der Nullraum, so sind nicht alle $\langle A_j, t \rangle$ zugleich gegeben.
- NEG (Physikalisches "tertium non datur"): Es ist stets entweder $\langle A, t \rangle$ oder $\langle A^\perp, t \rangle$ gegeben.
- SG (Schrödingergleichung): $\langle A, 0 \rangle$ ist genau dann gegeben, wenn $\langle U_t A, t \rangle$ gegeben ist.

Hierbei ist $U_t := e^{-itH/\hbar}$ und H der Hamiltonoperator auf \mathcal{H} , und zwei Unterräume A, B von \mathcal{H} heißen vertauschbar, wenn die zugehörigen Projektionsoperatoren π_A und π_B vertauschbar sind.

Bemerkung: Das physikalische "tertium non datur" sagt aus (für alle A und t)

$$\langle A, t \rangle \text{ oder } \langle A^\perp, t \rangle$$

und darf nicht verwechselt werden mit dem logischen "tertium non datur"

$$\langle A, t \rangle \text{ oder } \neg \langle A, t \rangle$$

Naheliegend ist neben den genannten deterministischen Axiomen das Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$\text{PROB: } P(\langle A, t \rangle \mid \langle B, t \rangle) = \text{tr } \pi_A \pi_B / \text{tr } \pi_B$$

Es zeigt sich nun, dass die angegebenen Axiome logisch inkonsistent sind: Das bekannte Kochen-Specker'sche No-Go-Theorem besagt im Kern, dass die Axiome MON, SEC und NEG nicht miteinander verträglich sind. Aus der ebenfalls bekannten Bell'schen Ungleichung ergibt sich, dass PROB nicht mit MON und SEC kompatibel ist.

Hieraus ergibt sich die Aufgabe, das Axiomensystem so abzuschwächen, dass es logisch konsistent wird, wobei aber der empirische Gehalt der Theorie (im Sinne Poppers) nicht aufgegeben wird. Der empirische Gehalt einer deterministischen Theorie entspricht der Menge der möglichen empirischen Materialien, die im Widerspruch zur Theorie stehen. Ein empirisches Material ist dabei stets eine endliche Menge von Ereignissen. In ähnlicher Weise liegt der empirische Gehalt einer probabilistischen Theorie darin, dass bestimmte mögliche Fakten aufgrund der Theorie sehr unwahrscheinlich sind.

Die Lösung dieser Aufgabe kann erfolgen, indem

1. das Axiom NEG aufgegeben wird. Dies hat zur Folge, dass die "value definiteness" der numerischen Größen nicht mehr allgemein angenommen wird. Das logische "tertium non datur", und damit die klassische Logik, wird dabei nicht aufgegeben.
2. das Axiom PROB ersetzt wird durch die Angabe eines "Möglichkeitsmaßes" μ , das beschreibt, welche möglichen Fakten in welchem Grade unwahrscheinlich sind. μ besagt insbesondere, dass ein empirisches Material $\langle A_1, t_1 \rangle, \dots, \langle A_n, t_n \rangle$ dann unwahrscheinlich ist, wenn es zu den A_j sehr ähnliche B_j gibt, so dass $\langle B_1, t_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle B_n, t_n \rangle$ aufgrund der deterministischen Axiome unmöglich ist.

Für ein Möglichkeitsmaß μ wird, anders als für ein Kolmogoroff'sches "Wahrscheinlichkeitsmaß", keine Additivität angenommen; dies wäre auch nicht plausibel, da μ lediglich die annähernde Unmöglichkeit ausdrücken soll. Für μ gelten hingegen die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F) & \text{(Monotonie)} \\ \mu(E \text{ oder } F) \leq \mu(E) + \mu(F) & \text{(Sub-Additivität)} \end{array}$$

Bei gegebenem μ lässt sich – unter bestimmten Bedingungen – ein Wahrscheinlichkeitsmaß P in der üblichen Weise mittels des "schwachen Gesetzes der großen Zahlen" definieren als Limes relativer Häufigkeiten bei unabhängigen Wiederholungen. Aufgrund dieser Definition ist P dann additiv im Sinne des Kolmogoroff'schen Konzepts.

Die logische Konsistenz der hiermit gegebenen Theorie kann formal bewiesen werden – es gibt also keine weiteren No-Go-Theoreme. Es bleibt nun zu zeigen, wie sich der quantentheoretische Zustandskalkül aus dieser Theorie ableiten lässt.

Ausgangspunkt ist hier zunächst die Voraussetzung eines Zeitpfeils. Ein solcher wird eingeführt durch die Annahme einer Initialbedingung: Zu einem frühen Zeitpunkt t_0 (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_0 = 0$ angenommen werden) hatte das Universum eine Eigenschaft UR, welche eine geringe Entropie beschreibt. Diese Initialbedingung ist die Grundlage der heute noch andauernden Entropiezunahme und somit des Zeitpfeils.

Mit einer naheliegenden Formel kann aus der Bedingung $\langle UR, 0 \rangle$

- für jeden Zeitpunkt t
- für jedes Teilsystem Q des Universums
- für jede Folge von Ereignissen \mathcal{B} als Bedingung

ein (bedingter) Quantenzustand $W_{Q;t|\mathcal{B}}$ abgeleitet werden. Dabei handelt es sich formal um einen "statistischen Operator" auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_Q des Teilsystems. Falls dieser Operator den Rang Eins hat, kann man von einem reinen Zustand sprechen. Dies ist in der Praxis allerdings stets nur näherungsweise der Fall. Die so definierten Quantenzustände lassen sich anwenden im Fall "makroskopischer Experimente". Dieser Begriff wird im folgenden eingeführt.

Eine Eigenschaft wird als "makroskopisch" bezeichnet, wenn sie von makroskopischen Subjekten (wie wir es sind) unmittelbar wahrgenommen werden kann. Für die Menge S aller makroskopischen Eigenschaften ist charakteristisch, dass je zwei Elemente von S miteinander vertauschbar sind.

Eine Ereignisfolge ist von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich, wenn es zu jedem der Ereignisse zur Zeit t ein makroskopisches Dokument gibt. Unter einem makroskopischen Experiment ist dann ein Experiment zu verstehen, dessen Voraussetzungen und mögliche Ergebnisse allesamt von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich sind. Für ein solches makroskopisches Experiment ergibt sich (auf der Basis von μ) ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_e auf der Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse.

Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes (Mess-) Ergebnis kann nun mit der üblichen Formel aus dem zugehörigen (bedingten) Quantenzustand berechnet werden. Als Bedingung \mathcal{B} treten hierbei auf: Die Voraussetzungen des Experiments sowie alle dem Beobachter bisher bekannten Ergebnisse.

Wird nun ein weiteres Ergebnis des Experiments beobachtet, so ergibt sich eine neue Bedingung \mathcal{B}' , die dieses neue Ergebnis zusätzlich zu \mathcal{B} enthält. Für den Beobachter sind jetzt die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung \mathcal{B}' relevant. Um sie zu berechnen, wird der bedingte Quantenzustand zur Bedingung \mathcal{B}' benötigt. Somit hat sich – ohne einen "Quantensprung" im physikalischen Sinne – der für den Beobachter relevante bedingte Quantenzustand

geändert. Dieser Zustandswechsel erfolgt gerade so, wie es der bekannte Quantenformalismus vorsieht.

Unter bestimmten Voraussetzungen verändert sich der (bedingte) Quantenzustand eines Teilsystems Q mit der Zeit so, dass dies (allerdings stets nur näherungsweise) durch eine Schrödingergleichung beschrieben werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn die Rückwirkung von Q auf seine Umgebung so gering ist, dass sie die Einwirkung der Umgebung auf Q nicht merklich verändert.

Damit kann gezeigt werden, wie sich der bekannte Quantenformalismus aus der hier betrachteten ontologisch realistischen Theorie ergibt.

A. Prinzipien für einen vernünftigen Aufbau der Quantentheorie

Ausgangssituation

Physik ist die Basiswissenschaft der gesamten Naturwissenschaft. In der klassischen Physik – von deren Gültigkeit man bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts ausgegangen ist – wird die Welt als eine Menge von elementaren Teilchen dargestellt, zwischen denen Kräfte wirken, die durch Felder vermittelt werden. Orte der Teilchen und Feldstärken sind dabei (reelle) numerische Größen. Die klassische Physik beschreibt das Universum als eine objektive Realität und stellt somit eine "ontologisch realistische" Theorie dar.

Die Vorstellungen dieser Theorie müssen aufgrund der Quantenexperimente als empirisch widerlegt gelten. Als Basistheorie der Physik (und somit der gesamten Naturwissenschaft) kommt heute nur die "Quantentheorie" in Frage.

Das, was man heute unter "Quantentheorie" versteht, ist zunächst nur ein Formalismus, der sich erfolgreich anwenden lässt, um die Ergebnisse bestimmter Experimente vorherzusagen. In diesem Formalismus spielt der Quantenzustand eine entscheidende Rolle. Daneben werden physikalische Größen (sogenannte Observable) betrachtet, um deren Messung es gehen soll. Der Prozess der Messung spielt hierbei eine zentrale Rolle: Messprozesse führen in der Regel zu einer Änderung des Quantenzustands.

Bei diesem Formalismus handelt es sich nicht um eine ausformulierte Theorie, die das Universum als eine objektive Realität beschreibt. Aufgrund der bekannten "No-Go-Theoreme" scheint eine solche Beschreibung sogar unmöglich zu sein. Das Verhalten der Quantensysteme scheint unlösbar mit den beobachtenden Subjekten verknüpft, und es scheint, dass die Quantentheorie nur Aussagen über Beobachtungen treffen kann und somit nicht als eine objektive, ontologisch realistische Theorie der "Welt an sich" formulierbar ist.

Es existieren mehrere Versuche einer "Deutung" des quantentheoretischen Formalismus, jedoch hat diese "Deutungsdebatte" zu keinem wirklich überzeugenden Resultat geführt. Infolgedessen hat sich auch keine dieser Deutungen allgemein durchsetzen können.

Aus dieser Situation ergibt sich die Aufgabe, eine Formulierung der Quantentheorie als einer objektiven Theorie des realen Universums zu entwickeln. Vernünftigerweise kann das Ziel hier nur die *Lösung* des Deutungsproblems sein, nicht die Formulierung einer weiteren Deutungsvariante. Anhand überzeugender Argumente muss dabei in einer sinnvollen Weise entschieden werden, wie die einzelnen Elemente des quantentheoretischen Formalismus (Quantenzustände, Observable, Messungen usw.) aufzufassen sind.

Insbesondere muss dabei geklärt werden, ob es sich bei den Quantenzuständen um physikalische Größen (wie z.B. Feldstärken im Fall der klassischen

Physik) handelt oder nicht, und ob und wann eine Observable einen bestimmten Wert besitzt. Der einfachen Annahme, dass jede Observable zu jedem Zeitpunkt genau einen Wert hat, stehen dabei die bekannten No-Go-Theoreme entgegen, insbesondere das Kochen-Specker-Theorem und die Bell'sche Ungleichung.

Kern der gesuchten Lösung muss es sein anzugeben, welchen Elementen der Theorie eine objektive Realität zukommt. Die Lösung der beschriebenen Aufgabe erfordert somit vor allem eine sinnvolle Modellierung der physikalischen Realität. Zu dieser Realität gehört insbesondere die uns unmittelbar umgebende Welt des Alltags.

Erst wenn das Deutungsproblem in dieser Weise gelöst ist, wird aus dem quantentheoretischen Formalismus das, was die Naturwissenschaft benötigt: Eine präzise Formulierung der Quantentheorie als einer objektiven Theorie des Geschehens in der uns umgebenden realen Welt. Nur so kann die Quantentheorie ihrer Rolle als Basistheorie der Physik und somit der gesamten Naturwissenschaft gerecht werden.

Die Modellierung des Realen in der Quantentheorie

Aufgrund der Quantenexperimente ist die klassische Physik als empirisch widerlegt anzusehen. Durch diese Experimente wird jedoch in keiner Weise die klassische Logik (weder die Aussagenlogik noch die weithin verwendete "Prädikatenlogik erster Stufe") in Frage gestellt. Es besteht daher kein Anlass, diese Logik durch eine "Quantenlogik" zu ersetzen.

Auch die Annahme des ontologischen Realismus, der zufolge es ein Universum gibt, dessen Eigenschaften objektiv vorhanden sind und unabhängig von ihrer Wahrnehmung durch etwaige Subjekte bestehen, wird durch die Experimente nicht in Frage gestellt. Dies ergibt sich allein schon aus der Tatsache, dass jedes dieser Experimente im realen Universum durchgeführt wurde und ebenso reale Ergebnisse hatte, etwa in Form beobachtbarer Interferenzstreifen auf einem Schirm.

Die klassische Physik basiert auf

- der klassischen Logik,
- dem ontologischen Realismus,
- dem klassisch-physikalischen Modell, dem zufolge das Universum aus "ewigen" elementaren Teilchen besteht, zwischen denen Kräfte herrschen, die durch Felder vermittelt werden,
- dem (deterministischen) Bewegungsgesetz.

Wenn diese Physik nun experimentell widerlegt wurde, so ist zunächst das Bewegungsgesetz in Frage zu stellen, sodann aber auch das klassisch-physikalische Modell. Es besteht jedoch kein Anlass, die zugrundeliegende Logik anzuzweifeln oder die Annahme der Existenz eines realen Universums in Frage zu

stellen, das unabhängig von Messungen oder Beobachtungen durch Subjekte besteht.

Demnach ist die Quantentheorie vernünftigerweise auf der Basis der klassischen Logik (also ohne Einführung einer speziellen "Quantenlogik") und des ontologischen Realismus aufzubauen. Insbesondere dürfen Messungen oder Beobachtungen durch Subjekte bei der Formulierung der grundlegenden Gesetze dieser Theorie keine Rolle spielen. Erst wenn die Theorie ohne derartige subjektive Elemente formuliert ist, können Prozesse der Messung oder der Beobachtung innerhalb des gegebenen objektiven theoretischen Rahmens thematisiert werden.

Abzulehnen ist auch die Einführung einer speziellen "Quantenwahrscheinlichkeit". Vielmehr muss der Begriff der Wahrscheinlichkeit unabhängig von seiner Anwendung in der Quantentheorie richtig verstanden und formuliert werden. Allerdings bedeutet dies nicht, dass der Kolmogoroff'sche Begriff der Wahrscheinlichkeit unkritisch übernommen werden muss. Dieser Begriff wurde erst relativ spät entwickelt. Nachdem über längere Zeit vergeblich versucht wurde, "Wahrscheinlichkeiten" über eine Definition einzuführen, wurde dieser Begriff in axiomatischer Weise festgelegt. Ein klares Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist eine notwendige Voraussetzung für eine präzise Formulierung der Quantentheorie. Beispielsweise muss geklärt werden, was unter den Kolmogoroff'schen "Elementarereignissen" im Falle der Quantentheorie zu verstehen ist. Außerdem ist es notwendig genau anzugeben, welche (gegebenenfalls bedingten) Wahrscheinlichkeiten durch den quantentheoretischen Zustandskalkül vorhergesagt werden.

Die Quantentheorie sollte nicht nur als eine Theorie der Welt des Mikroskopischen aufgefasst werden. Vielmehr ist sie als eine Theorie des gesamten Universums zu begreifen. Nur so kann sie als Basistheorie der Physik und der gesamten Naturwissenschaft dienen.

Zu beachten ist allerdings, dass die Quantentheorie (auch als Quantenfeldtheorie) nicht mit der allgemeinen Relativitätstheorie vereinbar ist. Solange eine Vereinigung dieser beiden Theorien nicht gelungen ist, können wir die Quantentheorie nicht auf das reale Universum als ganzes anwenden. Stattdessen müssen wir uns mit der Betrachtung eines quantenmechanischen bzw. eines quantenfeldtheoretischen Modelluniversums begnügen, in dem allgemein-relativistische Effekte vernachlässigt werden. Unter einem solchen Modelluniversum kann man sich einen großen, im wesentlichen abgeschlossenen Bereich des realen Universums vorstellen, auf den dann die Quantentheorie angewendet wird. (Das Modelluniversum ist also nicht etwa ein mikroskopisches Quantensystem.)

Wichtig ist dabei, von der Annahme auszugehen, dass das Modelluniversum keinerlei Messungen oder Beobachtungen "von außen" unterliegt und dass somit etwaige Beobachter selbst Teil dieses Universums sind.

Nach den obigen Ausführungen ist es im Sinne des ontologischen Realismus vor allem notwendig, in präziser Weise anzugeben, welche Elemente des quantentheoretischen Modells als reale Eigenschaften des Universums anzusehen sind. In Frage kommen hierfür zunächst:

- I. die Quantenzustände (im Sinne eines Zustandsrealismus)
- II. die Observablen (im Sinne einer allgemeinen Wertbestimmtheit dieser Observablen)

In beiden Fällen ergeben sich allerdings gewisse Schwierigkeiten.

Zu I. (Zustandsrealismus)

Quantenzustände können dazu dienen, bestimmte Wahrscheinlichkeiten vorherzusagen. Daher ist es hier zunächst wichtig, die Rolle des Wahrscheinlichkeitsbegriffs genauer zu betrachten. In der Praxis haben wir es nie mit absoluten, sondern immer mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu tun. Z.B. beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine Drei zu erhalten, wenn man einmal gewürfelt hat, ein Sechstel. Formal lässt sich dies schreiben als:

$$P(E_3 | \text{Würfeln}) = 1/6$$

Falls feststeht, dass der Würfel keine Zwei und auch keine Fünf zeigt, so erhalten wir eine andere (bedingte) Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_3 | \text{Würfeln und nicht } E_2 \text{ und nicht } E_5) = 1/4$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist z.B. dann relevant, wenn ein Subjekt den Würfel von der Seite sehen kann und dort eine Zwei feststellt (und so auf eine Fünf auf der gegenüberliegenden Seite schließt).

Das Beispiel zeigt, dass es für ein Ereignis (hier E_3) nicht etwa *eine* bestimmte Wahrscheinlichkeit gibt, sondern viele *bedingte* Wahrscheinlichkeiten. Jedes Subjekt schreibt dem fraglichen Ereignis sinnvollerweise diejenige bedingte Wahrscheinlichkeit zu, dessen Bedingung mit dem eigenen Wissen übereinstimmt. Diese "subjektbezogene Wahrscheinlichkeit" existiert – wie auch das Subjekt selbst und sein Wissen – objektiv.

Da Quantenzustände zur Berechnung derartiger bedingter Wahrscheinlichkeiten dienen (und nur solche Wahrscheinlichkeiten sind in der Praxis relevant), muss es auch zu jeder der möglichen Bedingungen einen eigenen (bedingten) Quantenzustand geben. Jedes Subjekt schreibt dem Quantensystem (etwa dem Würfel) sinnvollerweise denjenigen bedingten Quantenzustand zu, dessen Bedingung mit dem eigenen Wissen übereinstimmt (da es sich für diejenigen bedingten Wahrscheinlichkeiten interessiert, deren Bedingung eben diesem Wissen entspricht). Es ist dann ganz logisch, dass die Ablesung eines Messergebnisses zu einer Änderung des Wissens des Subjekts und damit zu einer Änderung des subjektbezogenen Quantenzustands führt.

Objektiv "hat" das betrachtete System alle diese bedingten Quantenzustände zugleich und nicht etwa "einen bestimmten" Zustand. Die Logik des Zustandsbegriffs lässt (anders als beim klassischen Zustand als einem bestimmten Punkt im Phasenraum) in der Quantentheorie die Annahme eines "Zustandsrealismus" überhaupt nicht zu. Deutungsversuche, bei denen von einem Zustandsrealismus ausgegangen wird, basieren auf einem mangelnden Verständnis des Begriffs der Wahrscheinlichkeit und der Rolle, die bedingte Wahrscheinlichkeiten spielen. Quantenzustände gehören – ebenso wie Wahrscheinlichkeiten – nicht zu den physikalischen Eigenschaften des Universums, wie etwa der Ort oder der Impuls eines bestimmten Objekts.

Wir müssen daher feststellen, dass die Quantenzustände nicht als die realen physikalischen Eigenschaften des Universums angesehen werden können.

Zu II. (Wertbestimmtheit der Observablen)

Die Annahme der allgemeinen Wertbestimmtheit der Observablen stößt auf ein anderes Problem. Nach dem bekannten Kochen-Specker'schen No-Go-Theorem ist es im Hilbertraum-Modell logisch unmöglich, jeder Observablen (welche dargestellt wird als ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum) zugleich einen bestimmten Wert zuzuordnen.

Es ist daher nicht möglich, die Observablen (im Sinne einer allgemeinen Wertbestimmtheit dieser Observablen) im Rahmen des quantentheoretischen Modells als die realen Eigenschaften des Universums anzusehen.

Binäre Eigenschaften und faktischer Realismus

Wir stehen demnach vor dem Dilemma, dass weder die Quantenzustände noch die numerischen Observablen geeignet sind, die Rolle des physikalisch "Realen" zu spielen. Um dieses Problem zu lösen, müssen wir uns darauf besinnen, was die Physik eigentlich leisten soll. Die Aufgabe der Physik besteht letztlich darin, die uns im Alltag (oder in einem Labor) begegnenden Fakten in einer Theorie abzubilden und hierüber Aussagen zu machen. Welcher Art sind aber diese Fakten?

Betrachten wir als Beispiel den Fall, dass eine Kugel auf einem Tisch liegt. In diesem Fall weist das Universum (zu dem betrachteten Zeitpunkt) bestimmte Eigenschaften auf. Zunächst ist das Vorhandensein des Tisches eine Eigenschaft des Universums. Auch die Existenz der Kugel entspricht einer solchen Eigenschaft. Dass sich die Kugel nun an einem bestimmten Ort befindet, eben auf dem Tisch und nicht etwa darunter, ist zunächst als eine Eigenschaft der Kugel anzusehen. In natürlicher Weise kann dies aber auch als eine Eigenschaft des Universums angesehen werden, da die Kugel ein Teilobjekt dieses Universums ist.

Alle diese Eigenschaften sind "binär" in dem Sinne, dass sie (zu einem Zeitpunkt) entweder vorhanden oder nicht vorhanden sein können. Im Falle der

klassischen Physik entspricht jede binäre Eigenschaft des Universums einer Teilmenge des Phasenraums Z (gemeint ist hier der Phasenraum des gesamten Universums). Ist zum Beispiel L eine physikalische Größe und ΔL ein reelles Intervall, so beschreibt die Aussage $L \in \Delta L$ eine Teilmenge von Z . (Die Größe L entspricht hier einer Abbildung von Z in die Menge der reellen Zahlen.)

Analog hierzu kann im Hilbertraum-Modell der Quantentheorie jede binäre Eigenschaft des Universums als Projektionsoperator oder – gleichwertig – als ein linearer Unterraum des Hilbertraums \mathcal{H} (des Universums) dargestellt werden. Eine numerische Observable L entspricht hier einem selbstadjungierten Operator auf \mathcal{H} , und zu jedem reellen Intervall ΔL beschreibt die Aussage $L \in \Delta L$ einen linearen Unterraum von \mathcal{H} , der damit eine binäre Eigenschaft des Universums darstellt.

Eine vernünftige Lösung des obigen Dilemmas besteht somit darin, die "binären" Eigenschaften des Universums als das eigentlich "Reale" anzunehmen und durch Unterräume des Hilbertraums des Universums zu modellieren. Der ontologische Realismus fordert nun, dass jeder derartigen Eigenschaft zu jedem Zeitpunkt ein Wahrheitswert zugeordnet sein muss. An die Stelle der "Wertbestimmtheit" ("value definiteness") der numerischen Observablen tritt somit die "Wahrheitswertbestimmtheit" ("truth value definiteness") der binären Eigenschaften. Man kann leicht nachweisen, dass sich aus dieser Annahme kein Widerspruch im Sinne des Kochen-Specker'schen No-Go-Theorems ergibt.

Dieses Vorgehen ist auch deshalb sinnvoll, weil wir es im Alltag (aber ebenso im Labor) primär gar nicht mit numerischen Größen zu tun haben. Eine numerische Größe stellt hier zunächst nichts anderes dar als eine "Durchnummerierung" mehrerer sich paarweise ausschließender möglicher Eigenschaften. Die Annahme der Wahrheitswertbestimmtheit jeder Eigenschaft hat daher auch nicht die Wertbestimmtheit der numerischen Größen zur Folge.

Als Beispiel betrachte man einen Eiswürfel auf einem Tisch, der in mehrere Bezirke mit den Nummern 1, 2, ..., N eingeteilt ist. Der Ort des Eiswürfels kann dann mit einem der Werte aus der Menge $\{1, \dots, N\}$ angegeben werden. Jedem dieser Werte entspricht eine bestimmte Eigenschaft des Universums. Solange der Eiswürfel auf dem Tisch liegt, besteht "Wertbestimmtheit" in dem Sinne, dass ihm als Ort ein bestimmter Wert zugeordnet ist. Ist der Eiswürfel jedoch geschmolzen und ist das entstandene Wasser verdampft, so hat die Observable "Ort des Eiswürfels" keinen Wert mehr. Keine der durch die Nummern angegebenen Eigenschaften ist dann mehr gegeben. Aus der Wahrheitswertbestimmtheit jeder der betrachteten Eigenschaften ergibt sich also nicht, dass auch die numerische Observable "Ort" jederzeit einen Wert haben muss. Was man hier an diesem alltäglichen Beispiel sehen kann, lässt sich zwanglos auch auf mikroskopische Systeme anwenden, solange man nicht die Existenz "ewiger" Elementarteilchen annimmt, die niemals "verdampfen".

Kernaufgabe der Physik sowie der gesamten Naturwissenschaft ist es, die uns umgebende Welt zu beschreiben. Dabei ist es *nicht* entscheidend, dass dies – wie in der klassischen Physik üblich – mit Hilfe numerischer Variablen geschieht, die zu jeder Zeit einen Wert aufweisen. In der uns umgebenden Welt gibt es solche Größen nicht: Der Ort eines Eiswürfels hat nur solange einen Wert, wie dieser Eiswürfel noch nicht geschmolzen oder verdampft ist. Physik ist die Theorie der Eigenschaften des Universums, aber diese Eigenschaften müssen nicht kontinuierliche Größen sein wie der Ort eines Teilchens oder die Stärke eines Feldes an einem bestimmten Ort. So ist zum Beispiel der Spin eines Elektrons sicherlich keine kontinuierliche Größe. Aber auch die Eigenschaften der uns unmittelbar umgebenden Welt haben zunächst einen "binären" Charakter. Wenn vor mir ein Buch auf dem Tisch liegt, so handelt es sich dabei um eine Eigenschaft, die das Universum zu diesem Zeitpunkt entweder hat oder nicht hat, also um eine binäre Eigenschaft.

Wenn wir an die Stelle der "Wertbestimmtheit" numerischer Größen die "Wahrheitswertbestimmtheit" aller Eigenschaften des Universums setzen, so entspricht dies zwar nicht der Tradition der klassischen Physik, welche der Beschreibung der Realität numerische Größen zugrunde legen möchte, jedoch steht sie vollkommen im Einklang mit der Art und Weise, wie wir die alltäglich uns umgebende Welt beschreiben. Wir kommen also nicht von der Realität zur klassischen Physik und von dort zur Quantentheorie, aber das ist auch gar nicht erforderlich. Der Weg führt direkt von der unmittelbar wahrnehmbaren Realität zur quantentheoretischen Modellierung. Das Konzept des numerischen Realismus wird dabei ersetzt durch das elementarere Konzept des faktischen Realismus, im Sinne der Aussage Wittgensteins: "Die Welt ist alles, was der Fall ist."

Während die klassische Physik auf kontinuierliche Variablen aufbaut, ist die uns unmittelbar umgebende Welt nicht durch derartige Variablen gekennzeichnet. Allerdings kann man numerische Variablen verwenden, um binäre Eigenschaften zu beschreiben: Hierzu betrachtet man die mögliche Tatsache, dass eine numerische Größe L in einem gegebenen reellen Intervall ΔL liegt. Die Aussage $L \in \Delta L$ entspricht dann einer binären Eigenschaft des Universums. Auf diese Weise lassen sich binäre Eigenschaften mittels numerischer Größen darstellen. Umgekehrt kann damit aber auch jede numerische physikalische Größe als eine parametrisierte Schar aus binären Eigenschaften des Universums aufgefasst werden.

Prinzipien für den Aufbau der Quantentheorie

Die folgenden Grundsätze sollten bei der Formulierung der Quantentheorie beachtet werden:

- 1) Die Quantentheorie ist zu formulieren als eine objektive Theorie der uns umgebenden realen Welt und nicht als eine Theorie subjektiver Vorgänge.

- 2) Gegenstand der Quantentheorie ist das Universum als ganzes, genauer gesagt das quantenmechanische oder das quantenfeldtheoretische Modelluniversum.
- 3) Die binären Eigenschaften des Universums müssen im Hilbertraum-Modell dargestellt werden. Konkret sind sie als lineare Unterräume des Hilbert-raums (des Universums) zu modellieren.
- 4) Dabei muss die klassische Logik zugrunde gelegt werden, nicht etwa eine "Quantenlogik".
- 5) Der ontologische Realismus ist zugrunde zu legen, konkret durch die An-nahme der Wahrheitswertbestimmtheit für jede Eigenschaft des Univer-sums zu jedem Zeitpunkt. Ausgangspunkt ist dabei die Aussage Wittgen-steins: "Die Welt ist alles, was der Fall ist."
- 6) Subjektive Konzepte wie "Messung" oder "Beobachtung" dürfen in den grundlegenden Aussagen der Theorie keine Rolle spielen.
- 7) Nach der Modellierung der Eigenschaften des Universums müssen die de-terministischen Gesetze formuliert werden, z.B. ein Bewegungsgesetz. Da-bei muss darauf geachtet werden, dass einerseits logische Widersprüche vermieden werden, aber andererseits der empirische Gehalt der Theorie (definiert etwa im Sinne Poppers) erhalten bleibt.
- 8) Es sollte keine spezielle "Quantenwahrscheinlichkeit" eingeführt werden. Da jedoch der Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht ohne weiteres in der Physik anwendbar ist, muss das Konzept der Wahrschein-lichkeit in sinnvoller Weise (aber unabhängig von den speziellen Proble-men der Quantentheorie) präzisiert werden. Insbesondere muss geklärt werden, was unter den "Elementarereignissen" des Kolmogoroff'schen Modells im Falle der Physik zu verstehen ist.
- 9) Das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Quantentheorie muss präzise formu-liert werden. Insbesondere muss die Bedingung in der durch einen Quan-tenzustand festgelegten bedingten Wahrscheinlichkeit explizit angegeben werden.
- 10) Die Formulierung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Quantentheorie muss so erfolgen, dass einerseits kein logischer Widerspruch – etwa im Zusammenhang mit der Bell'schen Ungleichung – auftritt, andererseits aber der empirische Gehalt der Theorie erhalten bleibt. Letzteres setzt ein klares Verständnis davon voraus, worin der empirische Gehalt einer Wahr-scheinlichkeitsaussage überhaupt besteht.
- 11) Die Widerspruchsfreiheit der formulierten Theorie muss formal bewiesen werden um sicherzustellen, dass es keine weiteren No-Go-Theoreme geben kann.

- 12) Es muss erklärt werden, wann und warum es möglich ist, einem System einen Quantenzustand zuzuschreiben.
- 13) Es muss gezeigt werden, warum der bekannte Quantenformalismus sich erfolgreich anwenden lässt.
- 14) Rein spekulative Konzepte, die sich jeder empirischen Bestätigung oder Widerlegung entziehen, führen nicht zu einer vernünftigen Fassung der Quantentheorie. Auf sie sollte aus wissenschaftstheoretischen Gründen verzichtet werden (Ockham'sches Rasiermesser), beispielsweise auf die Annahme der Existenz unendlich vieler Universen, von denen wir stets nur eines tatsächlich beobachten können.
- 15) Die Quantentheorie sollte nicht auf der Basis der (empirisch widerlegten) klassischen Physik entwickelt werden. Vielmehr kommt es darauf an, von der Alltagsrealität ausgehend das Universum und seine Eigenschaften zu modellieren. Statt zu versuchen, sich eng an klassische Vorstellungen zu halten, sollte die Quantentheorie in einer möglichst einfachen Form dargestellt werden.

Nicht mit den genannten Prinzipien vereinbar sind die folgenden bekannten "Deutungen" des quantentheoretischen Formalismus:

- Deutungen, bei denen subjektive Konzepte wie Messung oder Beobachtung eine zentrale Rolle in den grundlegenden Aussagen der Theorie spielen. Hierzu zählt auch die Kopenhagener Deutung. Es gibt keinen empirischen Grund zur Ablehnung der ontologisch realistischen Annahme einer unabhängig von Subjekten und ihren Beobachtungen bestehenden Realität. Ein Ausweichen in einen Subjektivismus, einen Phänomenalismus oder einen Irrealismus ist daher nicht sinnvoll.
- Vielweltentheorien, da unnötige, empirisch wertlose Konzepte eingeführt werden.
- Alle zustandsrealistischen Interpretationen. Sie beruhen auf einem mangelnden Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: In einer gegebenen Situation gibt es für ein bestimmtes Ereignis nicht "die" Wahrscheinlichkeit, sondern verschiedene bedingte Wahrscheinlichkeiten. Da Quantenzustände zur Vorhersage derartiger Wahrscheinlichkeiten dienen, gibt es in dieser Situation auch nicht "den" Quantenzustand eines Systems.
- Die Quantenlogik, da es keinen empirischen Grund gibt zur Ablehnung der klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik.
- Die Bohm'sche Mechanik, da sie versucht, klassische Konzepte (wie den Atomismus) beizubehalten, und so zu einem unnötigen Dualismus von (Führungs-) Welle und Teilchen gelangt.

Im Sinne einer "Rückkehr zur Vernunft", d.h. zu einem in sich stimmigen naturwissenschaftlichen Weltbild, sollte die Quantentheorie im Einklang mit den genannten Prinzipien formuliert werden. Der Grund für die in der Quantentheorie festzustellenden "Merkwürdigkeiten" sollte nicht in einem "seltsamen Verhalten der Quantenwelt" (d.h. der Welt, die uns tagtäglich umgibt und die uns vertraut ist) gesucht werden, sondern eher in den verschiedenen zum Teil halbklassischen Versuchen einer Deutung der experimentellen Ergebnisse und des quantentheoretischen Formalismus. In Anlehnung an einen Ausspruch, der Epiktet zugeschrieben wird, könnte man formulieren: "Es ist nicht die Quantenwelt, die die Menschen verwirrt, sondern die Gedanken über diese Welt verwirren die Menschen."

B. Wesentliche Lösungsansätze

Nach den Ausführungen des letzten Kapitels ist jede (binäre) Eigenschaft des Universums darzustellen durch einen linearen Unterraum des Hilbertraums \mathcal{H} des Universums. Die grundlegende Annahme, welche den ontologischen Realismus ausdrückt, lautet nun: Jede Eigenschaft des Universums ist zu jedem Zeitpunkt entweder gegeben oder nicht gegeben. Demnach ist jedem linearen Unterraum von \mathcal{H} zu jedem Zeitpunkt ein Wahrheitswert zugeordnet. Dieser Annahme steht das Kochen-Specker'sche No-Go-Theorem nicht im Wege.

Man wird nun erwarten, dass die Wahrheitswerte, welche den verschiedenen linearen Unterräumen zugeordnet werden, in bestimmten Beziehungen zueinander stehen müssen. Ist zum Beispiel A ein Teilraum des Unterraums B und ist die Eigenschaft A gegeben, so sollte auch B gegeben sein. Derartige (deterministische, d.h. nicht probabilistische) Beziehungen bestehen auch im Falle der klassischen Physik, in der Eigenschaften als Teilmengen des Phasenraums dargestellt werden. Man kann zeigen, dass die klassisch physikalische Annahme, dass es zu jedem Zeitpunkt genau einen Punkt im Phasenraum gibt, der das System beschreibt, durch drei derartige Beziehungen ausgedrückt werden kann. Sie lauten:

Monotonieprinzip: Ist A Teilmenge von B und ist A zum Zeitpunkt t "wahr", so ist auch B zu diesem Zeitpunkt "wahr".

Ausschlussprinzip: Hat eine Folge A_1, A_2, \dots von Teilmengen des Phasenraums einen leeren Durchschnitt, so können nicht alle A_j zugleich "wahr" sein.

Physikalisches "tertium non datur": Ist A' das Mengenkomplement von A im Phasenraum, so ist stets entweder A oder A' "wahr".

Das physikalische "tertium non datur" muss hier klar unterschieden werden vom logischen "tertium non datur": Während das physikalische "tertium non datur" aussagt, dass stets entweder A oder A' gegeben ist, besagt das logische "tertium non datur", dass A entweder gegeben ist oder nicht gegeben ist. (Das logische "tertium non datur" betrifft hier nur *eine* Eigenschaft A, während das physikalische "tertium non datur" die beiden Eigenschaften A und A' in Beziehung zueinander setzt.)

Die drei genannten Prinzipien können leicht in das Hilbertraum-Modell der Quantentheorie übertragen werden. Dabei ist das Mengenkomplement A' durch das orthogonale Komplement im Hilbertraum zu ersetzen, und das Ausschlussprinzip wird nur auf paarweise vertauschbare Eigenschaften A_j angewendet. (Zwei Unterräume A und B gelten als miteinander vertauschbar, wenn die zugehörigen Projektionsoperatoren miteinander vertauschbar sind.)

An dieser Stelle kommt nun allerdings das Kochen-Specker'sche No-Go-Theorem wieder ins Spiel. Es zeigt sich nämlich, dass die drei Prinzipien im Falle der Quantentheorie *nicht* angenommen werden können. Diese Annahme hätte (ebenso wie im Falle der klassischen Physik) die allgemeine Wertbestimmtheit aller diskreten Observablen zur Folge, welche aufgrund des Kochen-Specker-Theorems zu einem logischen Widerspruch führt.

Wenn man ein logisch widersprüchliches System aus Axiomen hat (hier die drei genannten deterministischen Gesetze), so muss man dieses System abschwächen, um den Widerspruch aufzulösen. Da es hier um eine physikalische Theorie geht, kommt es darauf an, das System *so* abzuschwächen, dass der empirische Gehalt der Theorie nicht verlorengeht. Aus diesem Grunde müssen wir uns zunächst fragen, worin der empirische Gehalt einer solchen Theorie überhaupt besteht. Hierzu ist es sinnvoll, sich an der Popper'schen Definition des empirischen Gehalts von Theorien zu orientieren: Demnach ist der empirische Gehalt einer Theorie gegeben als die Menge aller empirischen Widerlegungsmöglichkeiten.

Im Falle einer Theorie, der eine Menge von Eigenschaften des Universums zugrunde liegt, lässt sich dies formal darstellen. Ausgangspunkt ist dabei die Annahme, dass ein Subjekt unmittelbar stets nur "Ereignisse" wahrnehmen kann, wobei jedes Ereignis darin besteht, dass eine bestimmte Eigenschaft zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben ist. Ein "empirisches Material" ist demnach eine endliche Menge derartiger Ereignisse, und eine empirische Widerlegung besteht darin, dass ein empirisches Material beobachtet wird, welches im Widerspruch zu den Gesetzen der Theorie steht.

Auf dieser Grundlage lässt sich die folgende Aussage über die klassische Physik formal beweisen: Setzt man Monotonieprinzip und Ausschlussprinzip voraus, so liefert die Annahme des physikalischen "tertium non datur" keinen zusätzlichen empirischen Gehalt.

Diese Tatsache liefert den Schlüssel zur Auflösung des mit dem Kochen-Specker-Theorem verbundenen Widerspruchs: Man muss offenbar auf das physikalische "tertium non datur" in der Quantentheorie verzichten. Damit wird zugleich auf die Annahme der allgemeinen Wertbestimmtheit verzichtet. Die Rolle der numerischen Observablen wird beschränkt auf die Möglichkeit, Eigenschaften der Form $L \in \Delta L$ anzugeben. Somit sind numerische Größen lediglich als parametrisierte Scharen aus binären Eigenschaften aufzufassen. Der "numerische Realismus" der klassischen Physik wird ersetzt durch den "faktischen Realismus", welcher jedem möglichen physikalischen Faktum im Modell der Quantentheorie einen Wahrheitswert zuordnet.

Ein weiteres Gesetz der klassischen Physik ist das deterministische (und reversible) Bewegungsgesetz. In vollkommener Analogie hierzu können wir in der Quantentheorie ein deterministisches und reversibles Bewegungsgesetz in Form der Schrödingergleichung postulieren. Dieses Gesetz bezieht sich genau

genommen nur auf das Universum als ganzes. Für ein Teilsystem Q kann es stets nur näherungsweise gelten, nämlich dann, wenn die Rückwirkung von Q auf seine Umgebung so gering ist, dass sie die Einwirkung der Umgebung auf Q nicht merklich verändert. Wenn U_t den auf der Basis des Hamiltonoperators in der üblichen Weise definierten unitären Operator bezeichnet, so lautet das Bewegungsgesetz: Die Eigenschaft A ist zur Zeit 0 genau dann gegeben, wenn $U_t A$ zur Zeit t gegeben ist.

Es handelt sich hierbei – wie auch in der klassischen Physik – um ein vollständig deterministisches Gesetz. Da das Universum als abgeschlossen anzunehmen ist, sind etwaige "Messwechselwirkungen" mit der Außenwelt ausgeschlossen. Äußere Beobachter, die das System stören könnten, sind nicht vorhanden. Ein Laplace'scher Dämon, der zu einem Zeitpunkt den Wahrheitswert für jede Eigenschaft A kennt, kann aufgrund des Bewegungsgesetzes zu jedem anderen Zeitpunkt den Wahrheitswert für jede beliebige Eigenschaft bestimmen. Der Determinismus der Quantentheorie unterscheidet sich in nichts vom Determinismus der klassischen Physik. Die Quantentheorie ist also keineswegs dadurch gegenüber der klassischen Theorie ausgezeichnet, dass sie "im Kern probabilistisch" ist.

Bemerkung: Es sollte beachtet werden, dass die klassische Theorie nicht nur über ein deterministisches Bewegungsgesetz verfügt, sondern auch mit einem probabilistischen Gesetz ausgestattet werden kann. Letzteres besagt im wesentlichen, dass jeder der Pfade im Phasenraum dieselbe Wahrscheinlichkeit hat und wird beschrieben durch die Annahme des Lebesguemaßes auf dem Phasenraum. Hieraus lassen sich bedingte Maße ableiten, welche die Eigenschaft der Normierung auf Eins aufweisen und somit Wahrscheinlichkeitsmaße im Sinne der Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitstheorie sind. Auf dieser Basis lassen sich für makroskopische Eigenschaften (d.h. für nicht punktförmige Teilmengen des Phasenraumes) Übergangswahrscheinlichkeiten definieren. Damit können Phänomene der Entropiezunahme ebenso beschrieben werden wie Vorgänge bei Würfelexperimenten. Diese Überlegung zeigt auch, dass es zwischen dem Vorhandensein eines deterministischen Bewegungsgesetzes auf der mikroskopischen Ebene und probabilistischen Gesetzen für makroskopische Eigenschaften keinerlei Widerspruch gibt.

Die deterministischen Gesetze der Quantentheorie sind damit vollständig angegeben. Es handelt sich dabei um das Monotonieprinzip, das Ausschlussprinzip und die Schrödingergleichung. Das Monotonieprinzip ist aufgrund der Modellierung der Eigenschaften als Unterräume des Hilbertraums unvermeidlich. Das Ausschlussprinzip stellt eine Verallgemeinerung der Aussage, dass nicht zugleich eine Eigenschaft A und ihr orthogonales Komplement gegeben sein können, auf mehrere (abzählbar viele) Eigenschaften dar. Die Schrödingergleichung beschreibt den zeitlichen Zusammenhang. Was nun noch fehlt, ist das probabilistische Gesetz.

Es wäre naheliegend, dieses Gesetz gemäß der bekannten Formel zu fordern in Form der Aussage, dass für Eigenschaften A und B sowie jeden Zeitpunkt t gilt:

$$(*) \quad P(\langle A, t \rangle | \langle B, t \rangle) = \text{tr } \pi_A \pi_B / \text{tr } \pi_B$$

Dabei bezeichnet $P(\langle A, t \rangle | \langle B, t \rangle)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Eigenschaft A zur Zeit t gegeben ist, unter der Bedingung, dass B zur Zeit t gegeben ist. Außerdem stellt π_A den Projektionsoperator auf A und tr die Bildung der Spur eines Operators dar.

Es stellt sich jedoch heraus, dass die Aussage (*) nicht mit den angegebenen deterministischen Gesetzen vereinbar ist, sofern wir annehmen, dass sie allgemein gelten soll, und P als additives Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne Kolmogoroffs voraussetzen. Dies ist das bekannte Problem der Bell'schen Ungleichung.

Auch hier stellt sich die Frage, wie die angenommenen Gesetze abgeschwächt werden können, so dass kein Widerspruch mehr auftritt, jedoch der empirische Gehalt der Theorie erhalten bleibt. Dies führt zu der Frage, worin der empirische Gehalt einer Wahrscheinlichkeitsaussage überhaupt besteht.

Eine naheliegende Feststellung hierzu ist, dass eine Wahrscheinlichkeitsaussage der Form $P(A) = p$ zunächst überhaupt keinen empirischen Gehalt hat, wenn p ein mittelgroßer Wert ist wie etwa $p = 1/6$. In einem solchen Fall besagt die Wahrscheinlichkeitsaussage nur, dass das Ereignis A eintreten kann oder auch nicht. Erst wenn wir es mit sehr vielen (unabhängigen) Ereignissen derselben Art zu tun haben, bekommt die Wahrscheinlichkeitsaussage mittelbar einen empirischen Sinn. Bestimmte mögliche Fakten erweisen sich dann als extrem unwahrscheinlich und sie sollten daher nicht eintreten. Beispielsweise sollte, wenn wir 200mal mit einem ungefälschten Würfel würfeln, nicht *jedesmal* eine Drei herauskommen.

Der Begriff der "extremen Unwahrscheinlichkeit" ist hier zentral. Frühere Versuche, die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses zu definieren, sind daran gescheitert, dass man zur Definition offenbar das Konzept des "Wahrscheinlichen" bereits benötigt. Kolmogoroff hat dieses Dilemma dann dadurch "gelöst", dass er den Begriff der Wahrscheinlichkeit axiomatisch, und zwar als ein normiertes, additives Maß eingeführt hat. Dieses Konzept hat sich für den Fall wiederholbarer, makroskopischer Experimente in der Praxis bewährt. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß wird hierbei auf der Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse angenommen.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob dieser Begriff der Wahrscheinlichkeit, dessen Additivität auf der Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit mit dem Limes relativer Häufigkeiten beruht, sich auch anwenden lässt auf beliebige mögliche Fakten im Modell der Quantentheorie. Nur wenn man dies voraussetzt, tritt das Problem der Bell'schen Ungleichung auf. Typisch für dieses Problem

ist es, dass der Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff hierbei angewendet wird auf Ereignisse, die sich (im Rahmen eines Experiments an *einem* bestimmten Quantensystem) nicht alle zugleich messen lassen, da die entsprechenden Eigenschaften (z.B. schräg zueinander stehende Spins) als Unterräume des Hilbertraums nicht miteinander vertauschbar sind.

Grundsätzlich muss hier die Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit mit relativer Häufigkeit in Frage gestellt werden. Ein systematischer Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann dazu wie folgt vorgenommen werden: Man führt – in Analogie zu den beiden Modaloperatoren Möglichkeit und Notwendigkeit – zwei Funktionen μ und ν ein, die jedem möglichen Faktum im Rahmen des physikalischen Modells einen Wert zwischen 0 und 1 zuordnen. Dabei stellt $\nu(A)$ den "Notwendigkeitsgrad" (den Grad der Wahrscheinlichkeit) von A dar und $\mu(A)$ den "Möglichkeitsgrad" (und damit den Grad der Unwahrscheinlichkeit). μ und ν sind graduelle Erweiterungen der Konzepte der Notwendigkeit bzw. der Möglichkeit. Zwischen μ und ν besteht die einfache Relation

$$\mu(A) = 1 - \nu(\text{nicht } A)$$

Aus den Eigenschaften der beiden Modaloperatoren Möglichkeit und Notwendigkeit ergeben sich die adäquaten Axiome für μ bzw. für ν . Konkret erweist sich μ als monoton und subadditiv (genauer: sub- σ -additiv), d.h. als ein sogenanntes "äußeres Maß".

Auf der Basis von μ kann dann der "Häufigkeitsgrad" $P(A)$ definiert werden als Limes der relativen Häufigkeit bei unabhängigen Wiederholungen des Ereignisses A. Dies geschieht über das "schwache Gesetz der großen Zahlen" in der Form:

$$P(A) = p \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{\delta > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\#A_j/n \notin [p-\delta, p+\delta]) = 0$$

Dabei steht der Ausdruck $\#A_j/n$ symbolisch für die relative Häufigkeit des Eintretens von A bei n unabhängigen Wiederholungen. Aufgrund dieser Definition erweist sich P (sofern der Limes jeweils existiert) als ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne Kolmogoroffs.

Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie lässt sich nun einführen, indem man μ (für alle möglichen Fakten im Modell der Quantentheorie) passend definiert. Da μ nicht additiv sein muss, erfüllt es keine Bell'sche Ungleichung; aus diesem Grunde ergibt sich auch nicht der Bell'sche Widerspruch zu den deterministischen Gesetzen der Theorie. Der Häufigkeitsgrad P ist zwar additiv und erfüllt somit die Bell'sche Ungleichung. P ist jedoch nicht für alle möglichen Fakten im quantentheoretischen Modell definiert und so ergibt sich kein Widerspruch. Man kann allerdings zeigen, dass der Häufigkeitsgrad P für jedes wiederholbare Experiment, dessen Voraussetzungen und mögliche Ergebnisse durch makroskopische Fakten dokumentiert und aus diesem Grunde beobachtbar sind, definierbar ist. Auf solche Experimente kann daher wie üblich die

Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet werden. (Für sie wurde diese Theorie auch entwickelt.)

Es ergibt sich somit, dass das Problem der Bell'schen Ungleichung nichts mit einem "merkwürdigen" Verhalten der Quantenwelt zu tun hat. Es beruht vielmehr auf der naiven Gleichsetzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs mit dem Häufigkeitsgrad und der Anwendung des Kolmogoroff'schen Begriffs P (der eigentlich den Häufigkeitsgrad bezeichnet und nicht das ursprüngliche Konzept der Wahrscheinlichkeit im Sinne einer graduellen Notwendigkeit) auf die Algebra aller möglichen Fakten im Modell der Quantentheorie, für die er nicht geschaffen wurde.

Das Kochen-Specker'sche No-Go-Problem lässt sich also lösen, indem man – zugunsten eines faktischen Realismus – auf den aus der klassischen Physik stammenden numerischen Realismus verzichtet. Das Bell-Problem hingegen wird aufgelöst, indem man auf die (durch nichts gerechtfertigte) Annahme verzichtet, Wahrscheinlichkeit sei grundsätzlich nichts anderes als ein Limes relativer Häufigkeit. Stattdessen werden die aus den Modaloperatoren Möglichkeit und Notwendigkeit ableitbaren Konzepte der Unwahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit begrifflich sauber vom Konzept des Häufigkeitsgrades getrennt.

Nach der Formulierung des probabilistischen Gesetzes ist die Quantentheorie formal abgeschlossen. Der Zustandsbegriff kam hierbei überhaupt noch nicht vor. Wir müssen daher nun auf die Frage eingehen, warum ein Subjekt einem Quantensystem einen solchen Quantenzustand zuordnen und damit Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse von Quantenexperimenten berechnen kann.

Ausgangspunkt für die Definition der Quantenzustände ist dabei die Tatsache, dass das Universum sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, sondern von einer beständigen Zunahme der Entropie geprägt ist. Ohne diese Entropiezunahme, welche wir als "Zeitpfeil" erleben, wäre weder eine biologische Evolution auf der Erde möglich, noch könnte es Subjekte geben, die die sie umgebende Welt wahrnehmen. Wir sind daher gezwungen anzunehmen, dass das Universum zu einem frühen Zeitpunkt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diesen Zeitpunkt als 0 annehmen) eine geringe Entropie aufgewiesen hat. Dies ist zu beschreiben durch eine Eigenschaft (die Initialeigenschaft), die wir mit UR bezeichnen wollen. Quantentheoretisch ist UR als Unterraum des Hilbertraumes des Universums zu modellieren.

Bemerkung: Die Tatsache, dass Quantenzustände aus der Initialeigenschaft UR abgeleitet werden, ist aus folgendem Grund plausibel: Um einen bestimmten Quantenzustand präparieren zu können, benötigt man eine Quantenquelle, etwa ein heißes Objekt, das aus thermischen Gründen Quanten einer bestimmten Art emittiert. Durch entsprechende Filter lassen sich dann Quanten mit dem gewünschten Zustand präparieren. Voraussetzung hierfür ist stets das Bestehen eines lokalen thermodynamischen Ungleichgewichts. Die Quelle aller derarti-

gen Ungleichgewichte liegt aber in dem Vorhandensein der Initialeigenschaft zum Zeitpunkt 0.

Zu der Initialeigenschaft UR kann der Projektionsoperator gebildet werden. Indem man diesen durch die Dimension von UR dividiert, erhält man einen normierten, nicht-negativ definiten Operator. (Normierung bedeutet hier, dass die Spur des Operators gleich Eins ist.) Derartige Operatoren werden als "statistische Operatoren" bezeichnet. Den so erhaltenen statistischen Operator können wir dem Universum als (absoluten) Quantenzustand zur Zeit 0 zuordnen. Über die Schrödingergleichung erhalten wir daraus den Zustand zu jedem beliebigen Zeitpunkt.

Den Zustand für ein Teilsystem des Universums (d.h. für jedes beliebige Quantensystem) erhalten wir folgendermaßen: Der Hilbertraum des Universums kann dargestellt werden als Tensorprodukt aus dem Hilbertraum des Teilsystems und dem Hilbertraum des übrigen Universums (des "Restes der Welt"). Aus dem Quantenzustand des Universums erhalten wir daher den Zustand des Teilsystems durch Bildung der partiellen Spur auf seinem Hilbertraum. Dieser Zustand ist dann auch wieder ein statistischer Operator. Auf der Basis dieses Zustands lassen sich – unter Verwendung der aus dem Quantenformalismus bekannten Gleichungen – die "absoluten" (d.h. die nur durch die Initialeigenschaft bedingten) Wahrscheinlichkeiten für bestimmte experimentelle Ergebnisse berechnen.

Bemerkung: In der klassischen Physik muss man ebenso von einer Initialeigenschaft ausgehen. Man hat daher auch in der klassischen Physik einen "Quantenzustand". Formal handelt es sich hierbei um eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Phasenraum.

Der beschriebene absolute Zustand ist in der Praxis nicht von Interesse, da er nur die Berechnung absoluter Wahrscheinlichkeiten gestattet. Für ein Subjekt, das über ein bestimmtes empirisches Wissen verfügt, das also gewisse Ereignisse beobachtet hat, ist aber nicht die absolute, sondern jene bedingte Wahrscheinlichkeit von Interesse, bei der die Bedingung dem eigenen Wissen entspricht.

Mittels einer naheliegenden Formel lässt sich aus dem absoluten Zustand des Universums der zu einem bestimmten empirischen Wissen (d.h. zu einer Ereignisfolge) passende *bedingte* Zustand ableiten. Dieser bedingte Zustand kann für jeden beliebigen Zeitpunkt und (durch partielle Spurbildung) auch für jedes Teilsystem des Universums gebildet werden. Der resultierende Zustand ist wiederum ein statistischer Operator. Hat dieser Operator den Rang Eins, so haben wir es mit einem "reinen" Zustand zu tun, der auch (eindeutig bis auf einen Phasenfaktor) als ein (Zustands-) Vektor im Hilbertraum des Teilsystems dargestellt werden kann. Reine Zustände treten in der Praxis allerdings stets nur näherungsweise auf.

Ein bedingter Quantenzustand erlaubt es, bestimmte bedingte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Dabei muss die Bedingung in der Wahrscheinlichkeit mit der Bedingung des Zustands übereinstimmen. Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse eines Experiments entspricht diese Bedingung den experimentellen Voraussetzungen sowie den bisher schon bekannten Ergebnissen. Man kann so, indem man entsprechende Bedingungen schafft, einen bestimmten Quantenzustand "präparieren".

Zu einem Quantensystem Q gibt es zum Zeitpunkt t nicht *einen* bestimmten Zustand, sondern zu jeder möglichen Bedingung einen anderen *bedingten* Zustand, jeweils entsprechend den bedingten Wahrscheinlichkeiten, die mit seiner Hilfe berechnet werden können. Daher kann man "den" Quantenzustand auch nicht als objektive physikalische Größe auffassen – wie etwa den Ort eines Objektes.

Ein Subjekt interessiert sich stets für den bedingten Zustand, der seinem Wissen entspricht. (Es interessiert sich zugleich auch für diejenigen bedingten Wahrscheinlichkeiten, die diesem Wissen entsprechen.) Unterschiedliche Subjekte, die über unterschiedliches Wissen verfügen, ordnen demselben Quantensystem daher unterschiedliche Zustände zu. Erhält ein Subjekt eine zusätzliche Information – beispielsweise durch Ablesen eines Messergebnisses – so findet ein *Zustandswechsel* statt in dem Sinne, dass sich das Subjekt danach für einen anderen Zustand interessiert. Sollte ein Subjekt eine Information wieder vergessen, so "springt" der für dieses Subjekt relevante bedingte Zustand wieder zurück auf denjenigen, der vor der Ablesung des Messergebnisses relevant war. All dies geschieht in völliger Analogie zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten, für die sich das Subjekt jeweils interessiert.

Der Zustandswechsel "bei einer Messung" (genauer: bei der Ablesung des Messergebnisses) hat somit nichts mit einer Messwechselwirkung zu tun. Aus diesem Grunde liegt auch keinerlei "geisterhafte Fernwirkung" vor, wenn ein Subjekt aufgrund einer Spin-Messung an einem Elektron die Möglichkeit hat, auf den Spin eines zweiten, weit entfernten Elektrons zu schließen, und diesem Elektron folglich einen neuen Zustand zuschreibt.

Nach der Definition der Quantenzustände für jedes Teilsystem, zu jedem Zeitpunkt und zu jeder Folge von Ereignissen als Bedingung muss nun gezeigt werden, warum sich der quantentheoretische Zustandskalkül erfolgreich auf bestimmte Experimente anwenden lässt. Um dies zu erreichen, bedarf es einiger Vorbereitungen.

Ausgangspunkt ist hier der Begriff der "makroskopischen Eigenschaften". Gemeint sind damit Eigenschaften, die wir – als makroskopische Subjekte – unmittelbar wahrnehmen können. Die Menge dieser Eigenschaften zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass ihre Elemente (als Unterräume des Hilbert-raums des Universums) paarweise miteinander vertauschbar sind. Ein Ereignis

wird als makroskopisch bezeichnet, wenn es darin besteht, dass eine makroskopische Eigenschaft zu einem Zeitpunkt t vorhanden ist.

Unter einem makroskopischen Dokument ist ein makroskopisches Ereignis zu verstehen, das mit dem dokumentierten Ereignis in einer (auf naheliegende Weise formal zu definierenden) Dokumentbeziehung steht. Ein "makroskopischer Kontext" ist nun eine Folge von Ereignissen, für die es zu einem bestimmten Zeitpunkt t makroskopische Dokumente gibt, die also von diesem Zeitpunkt aus "empirisch zugänglich" sind. Die Dokumentbeziehungen eines makroskopischen Kontextes müssen in einer bestimmten Weise unabhängig voneinander bestehen.

Wir betrachten nun ein Experiment, dessen Voraussetzungen ebenso wie seine möglichen Ergebnisse zu einem makroskopischen Kontext gehören. Zu dem oben eingeführten "Möglichkeitsgrad" μ bilden wir den bedingten Möglichkeitsgrad

$$\mu(A | B) := \mu(A \text{ und } B) / \mu(B)$$

wobei die Bedingung B mit den Voraussetzungen des Experiments (einschließlich der Initialbedingung) übereinstimmt. Die Beschränkung dieses bedingten Möglichkeitsgrades auf die Algebra aller möglichen Ergebnisse des Experiments erweist sich als additiv und somit als ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Damit wird klar, warum sich makroskopisch auswertbare Experimente durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß und somit im Sinne des Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs beschreiben lassen.

Quantenexperimente sind spezielle makroskopisch auswertbare Experimente. Für sie kann man zeigen, dass sich die auftretenden (bedingten) Wahrscheinlichkeiten mittels des entsprechenden (bedingten) Quantenzustands nach den aus dem Formalismus der Quantentheorie bekannten Gleichungen berechnen lassen.

Ferner lässt sich zeigen, dass sich der durch das Wissen eines Subjekts bedingte Quantenzustand bei der Ablesung eines Messergebnisses durch dieses Subjekt gerade in der Weise ändert, wie es der quantentheoretische Formalismus verlangt.

Die Schrödingergleichung gilt im allgemeinen nur für das Universum als Ganzes. Es gibt auch kein Teilsystem des Universums, das generell als "abgeschlossen" angesehen werden kann in dem Sinne, dass es keine Rückwirkung auf seine Umgebung hat. Sind jedoch während eines Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ bestimmte Bedingungen gegeben, so kann der Fall eintreten, dass ein Teilsystem näherungsweise als in diesem Sinne "abgeschlossen" betrachtet werden kann. Für diesen Fall lässt sich zeigen, dass sich der (diesen Bedingungen entsprechende) bedingte Quantenzustand während des betrachteten Zeitintervalls näherungsweise (auf der Basis eines Hamiltonoperators auf dem Hilbertraum des Teilsystems) nach der Schrödingergleichung entwickelt.

Diese Überlegungen zeigen, dass sich der quantentheoretische Zustandskalkül unter passenden Voraussetzungen (insbesondere unter solchen Voraussetzungen, wie sie für makroskopische Subjekte gegeben sind) anwenden lässt.

Abschließend wollen wir noch auf die Frage eingehen, welche Konsequenzen die (in der Quantentheorie notwendige) Aufgabe des physikalischen "tertium non datur" hat. Die wichtigste Konsequenz liegt darin, dass die Theorie es nicht ohne weiteres erlaubt, von einer Menge beobachteter Ereignisse positiv auf das Eintreten eines weiteren Ereignisses zu schließen. So sagt die Theorie z.B. auch in dem bekannten Fall der Schrödinger'schen Katze aufgrund der gegebenen Voraussetzungen (die als eine Menge von Ereignissen darzustellen sind) nicht voraus, dass sich nach Ablauf einer bestimmten Zeit in dem Kasten entweder eine tote oder eine lebende Katze befinden muss.

Was die Theorie hingegen voraussagt, ist folgendes: Alles, was ansonsten vorstellbar oder beobachtbar wäre, etwa dass der Kasten leer ist oder dass sich darin ein Hund befindet, ist aufgrund der gegebenen Voraussetzungen ausgeschlossen. Als einzige (positive) Möglichkeit verbleibt nur, dass sich entweder eine tote oder eine lebende Katze in dem Kasten befinden kann.

Der Unterschied liegt hier darin, dass es nach der Theorie "rein theoretisch" möglich wäre, dass von all den Möglichkeiten, die man sich vorstellen oder beobachten könnte, überhaupt keine gegeben ist. Dieser Unterschied hat allerdings keinerlei Bedeutung in der praktischen Anwendung der Theorie.

Wie oben bemerkt wurde, liefert das physikalische "tertium non datur" im Falle der klassischen Theorie keinen (zusätzlichen) empirischen Gehalt. Aber auch in der Quantentheorie ist das Fehlen dieses Gesetzes in der Praxis ohne Bedeutung. In der praktischen Anwendung betrachtet man stets nur Alternativen, die sich auch beobachten lassen. Ist aber eine Alternative "A oder B" beobachtbar, so muss entweder A oder B wahr sein, denn was nicht wahr ist, kann auch nicht beobachtet werden. Dies bedeutet, dass in allen praktisch relevanten Fällen die entsprechende Aussage "A oder B" vorausgesetzt werden kann, und zwar nicht als eine Konsequenz der Gesetze der Theorie, sondern als ein kontingentes Faktum.

Ist also im Falle der Schrödinger'schen Katze die Alternative "Im Kasten liegt eine lebendige Katze" oder "Im Kasten liegt eine tote Katze" beobachtbar, so ist das entsprechende physikalische "tertium non datur" als kontingentes Faktum gegeben. Auf eine *tatsächliche* Beobachtung kommt es hier nicht an, und die Katze geht auch nicht erst dann über in den "Zustand" des Totseins bzw. des Lebendigseins, wenn der Kasten vom Experimentator geöffnet wird. Aus der Beobachtbarkeit einer Alternative folgt rein *logisch*, dass das entsprechende physikalische "tertium non datur" als ein kontingentes Faktum gegeben ist. Mit einer "Messwechselwirkung" hat dies überhaupt nichts zu tun, und die Tatsache der Beobachtung ist auch nicht die Ursache für den Tod der Katze.

C. Vorschau

Wir geben hier einen kurzen Überblick über die in den nachstehenden Kapiteln behandelten Themen. Grundlegende Definitionen werden dabei ebenso angegeben wie einige wichtige sich hieraus ergebende Aussagen.

Methodische Vorbemerkungen (Kapitel 1)

Das Kapitel beginnt mit einer Reihe von Fragen, die im Rahmen der Deutungsdebatte bislang nicht eindeutig geklärt werden konnten, etwa die Fragen: Was ist in der Quantentheorie als das Reale anzusehen? Welche Rolle spielen dabei Quantenzustände, Messungen, Beobachter und das Konzept der Wahrscheinlichkeit?

Es wird dann begründet, warum eine logisch fundierte, präzise mathematische Darstellung (sowohl der Theorie selbst als auch der wissenschaftstheoretischen Grundlagen) erforderlich ist, um den nötigen Grad der Genauigkeit in der Argumentation zu erreichen. Es wird auf eine Reihe von Beispielen verwiesen, die zeigen, dass die mathematisch formale Darstellung eines Themenbereichs zu präziseren Aussagen und damit zu neuen Erkenntnissen führen kann.

Sodann wird begründet, warum es sinnvoll ist, von einem möglichst allgemeinen Konzept physikalischer Theorien auszugehen. Ferner wird erläutert, warum es möglich ist, die "normale" extensionale Logik zugrunde zu legen, obwohl hier sowohl der modale Begriff der Wahrscheinlichkeit als auch der intensionale Begriff des Wissens formal dargestellt werden muss.

Wissenschaftstheoretische Grundlagen (Kapitel 2)

Es wird ein allgemeines wissenschaftstheoretisches Konzept zur präzisen axiomatischen Darstellung ontologisch realistischer physikalischer Theorien formuliert. Die folgenden Konzepte werden hierbei formal eingeführt:

- Die Menge \mathcal{U} der Eigenschaften des Universums
- Die Menge T der Zeitpunkte
- Die Menge der möglichen Ereignisse $\mathcal{E} := \mathcal{U} \times T$
- Der reale Weltablauf $\omega_0 \subset \mathcal{E}$
- Die Menge Ω_0 der möglichen Weltabläufe (Ω_0 ist die Potenzmenge von \mathcal{E})
- Die Darstellung von Ereignissen als Teilmengen von Ω_0 mit der Definition
$$\langle A, t \rangle_0 := \{ \omega \in \Omega_0 \mid (A, t) \in \omega \}$$
- Die Menge der möglichen Fakten (als die Mengenalgebra \mathcal{A}_0 auf Ω_0 , welche von den Ereignissen erzeugt wird)

- Axiomensysteme als Teilmengen von \mathcal{A}_0
- Empirische Materialien als endliche Mengen von Ereignissen
- Der empirische Gehalt eines Axiomensystems als Menge der empirischen Materialien, welche im Widerspruch zu den Axiomen stehen

In diesem Konzept wird (in Anlehnung an Popper) analysiert, worin der empirische Gehalt einer Theorie im Gegensatz zum logischen Gehalt liegt.

Die Unterscheidung zwischen dem logischen und dem empirischen Gehalt einer Theorie beruht wesentlich auf der Tatsache, dass sich nur die Ereignisse selbst beobachten lassen, nicht aber allgemeingültige Gesetze oder andere logische Kombinationen von Ereignissen. So lässt sich insbesondere auch die logische Negation eines Ereignisses nicht unmittelbar wahrnehmen.

Klassische Mechanik (Kapitel 3)

Die klassische Mechanik wird in diesem Rahmen dargestellt, indem die Eigenschaften des Universums (als Teilmengen des Phasenraums) modelliert und die deterministischen Gesetze in axiomatischer Form angegeben werden.

Es wird gezeigt, dass sich das Axiomensystem der klassischen Mechanik abschwächen lässt, ohne dass sich der empirische Gehalt der Theorie ändert. Bei dieser Abschwächung wird insbesondere auf die Wertbestimmtheit der numerischen Größen verzichtet.

Deterministische Quantentheorie (Kapitel 4 bis 6)

Die Quantenmechanik wird eingeführt, indem die Eigenschaften des Universums modelliert werden als lineare Unterräume des Hilbertraums \mathcal{H} .

Es wird gezeigt, dass die Einführung der den Gesetzen der klassischen Physik entsprechenden Axiome zu einem Widerspruch führt (Kochen-Specker'sches No-Go-Theorem).

Dieser Widerspruch wird aufgelöst, indem – analog zu der möglichen Abschwächung der Axiome im Falle der klassischen Mechanik – auf die Wertbestimmtheit der numerischen Größen verzichtet wird. Am ontologisch realistischen Ansatz der Theorie ändert dies nichts: Der Realismus liegt nun darin, dass jede Eigenschaft zu jedem Zeitpunkt einen Wahrheitswert hat.

Die Rolle numerischer Größen beschränkt sich darauf, parametrisierte Mengen von binären Eigenschaften (der Form $L \in \Delta L$) darzustellen. Von derartigen numerischen Größen muss nicht erwartet werden, dass sie stets einen Wert aufweisen.

Als Axiome verbleiben das Monotonieprinzip (MON) sowie das Ausschlussprinzip (SEC). Aufgegeben wird hingegen das physikalische "tertium non datur" (NEG), welches nicht zu verwechseln ist mit dem logischen "tertium non datur". Die klassische Logik wird hier also nicht aufgegeben.

Das Bewegungsgesetz der Quantentheorie, angegeben durch die auf das Universum als ganzes bezogene Schrödingergleichung, erweist sich (ebenso wie das Bewegungsgesetz der klassischen Mechanik) als ein deterministisches Gesetz.

Die formale Widerspruchsfreiheit der so formulierten (deterministischen) Gesetze der Quantentheorie kann bewiesen werden. Damit ist gezeigt, dass das Kochen-Specker-Theorem einer ontologisch realistischen Darstellung der Quantentheorie nicht im Wege steht.

Abschließend wird auf die Frage eingegangen, warum der numerische Realismus als plausibel erscheint, d.h. die Vorstellung, das Universum sei vollständig zu beschreiben mittels einer Menge von stets wertbestimmten numerischen Größen. Für dieses Konzept spricht die Alltagserfahrung zunächst einmal nicht.

Die wesentlichen Gründe für die scheinbare Plausibilität dieser Vorstellung liegen in den Konzepten des Atomismus und der klassischen Feldtheorie. Diese beiden Konzepte mussten aufgegeben werden, als ausreichend genaue mikroskopische Beobachtungsverfahren zur Verfügung standen. Die Plausibilität des numerischen Realismus beruht somit wesentlich auf der makroskopischen Perspektive.

Physikalische Alternativen und die Rolle der Beobachtung (Kapitel 7 und 8)

Der notwendige Verzicht auf das physikalische "tertium non datur" als ein allgemeines Gesetz der Quantentheorie führt dazu, dass – anders als im Fall der klassischen Physik – von einem empirischen Material M nicht positiv auf ein mögliches Ereignis (A,t) geschlossen werden kann. Allenfalls ist es möglich zu schließen, dass das "physikalische Gegenteil" (A^\perp,t) *nicht* eintreten kann.

In der Praxis ist dies allerdings ohne Bedeutung. Man hat es dort stets mit beobachtbaren Alternativen zu tun. Ist die Alternative (A,t) oder (A^\perp,t) beobachtbar, so muss entweder (A,t) oder (A^\perp,t) tatsächlich gegeben sein, da nur beobachtet werden kann, was auch der Fall ist. Es gilt somit das physikalische "tertium non datur" für A als ein kontingentes Faktum. Unter dieser Voraussetzung kann dann von M positiv auf (A,t) geschlossen werden.

Anders als es manche Deutungen der Quantentheorie nahelegen, werden physikalische Fakten nicht durch den Akt der Beobachtung erzeugt. Vielmehr impliziert die Annahme der Beobachtbarkeit rein logisch, dass jeweils eine der möglichen Alternativen tatsächlich gegeben ist.

Probabilistische Gesetze (Kapitel 9 bis 12)

Bei einem festgelegten Axiomensystem können mögliche Fakten, die unter den gegebenen Axiomen zueinander äquivalent sind, formal miteinander identifiziert werden. Die damit einhergehende Neumodellierung der möglichen Fakten vereinfacht die Einführung eines probabilistischen Gesetzes.

Allgemeine Überlegungen zum Kolmogoroff'schen Konzept der Wahrscheinlichkeit ergeben, dass man von einer physikalischen Theorie erwarten muss, dass sie ihr probabilistisches Gesetz formuliert, indem sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der möglichen Weltabläufe angibt.

Es wird sodann das Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik formuliert. Ausgehend von der Gleichverteilung (dem Lebesguemaß) auf dem Phasenraum erhält man ein Maß auf der Menge aller möglichen Fakten. Hieraus werden die (für die Praxis relevanten) bedingten Wahrscheinlichkeiten im Sinne von Kolmogoroff als additive und normierte Wahrscheinlichkeitsmaße abgeleitet. Sowohl Zufallsexperimente als auch thermodynamische Vorgänge mit zunehmender Entropie lassen sich damit beschreiben.

Das Beispiel der klassischen Mechanik zeigt, dass es keinen Widerspruch gibt zwischen dem deterministischen Bewegungsgesetz und dem Bestehen eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes, zwischen Determinismus und Probabilismus. Vielmehr ergibt der mikroskopische Determinismus zusammen mit einem Wahrscheinlichkeitsgesetz auf der Menge der "Pfade" ein probabilistisches Übergangsgesetz für makroskopische Eigenschaften.

Wahrscheinlichkeit in der Quantentheorie (Kapitel 13 bis 16)

Der Versuch, in der Quantentheorie in ähnlicher Weise ein (additives) Maß auf der Menge der möglichen Fakten zu etablieren, führt zu Widersprüchen mit den empirischen Befunden. Ein solcher Widerspruch ergibt sich beispielsweise aus der bekannten Bell'schen Ungleichung. Zur Auflösung dieses Problems bedarf es einer kritischen Betrachtung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Der allgemeine Begriff der Wahrscheinlichkeit (Kapitel 17 bis 20)

Das Kolmogoroff'sche Konzept des Wahrscheinlichkeitsmaßes wurde zur Beschreibung der Ergebnisse wiederholbarer Experimente entwickelt und hat sich in diesem Zusammenhang bewährt. Es erweist sich aber als ungeeignet bei der allgemeinen Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten für die Menge aller möglichen Fakten. Es wird daher ein allgemeineres Konzept der Wahrscheinlichkeit entwickelt.

Ausgehend von den beiden (binären) Modaloperatoren "Möglichkeit" und "Notwendigkeit" werden (kontinuierliche) Funktionen μ und ν eingeführt. Dabei bezeichnet $\mu(F)$ die graduelle Möglichkeit (bzw. die Unwahrscheinlichkeit) und $\nu(F)$ die graduelle Notwendigkeit (bzw. die Wahrscheinlichkeit) eines beliebigen möglichen Faktums F .

Für μ und ν werden – in Anlehnung an die entsprechenden Eigenschaften der Modaloperatoren – die passenden Axiome eingeführt. Die Funktion μ erweist sich hierbei als monoton und sub- σ -additiv; sie ist somit ein (normiertes) "äußeres Maß" im Sinne der Maßtheorie. Ein derartiges Maß wird als "Möglich-

keitsmaß" bezeichnet. Die Funktion v ist mit μ verknüpft über die Gleichung

$$v(F) = 1 - \mu(\neg F)$$

Unter Verwendung der Funktion μ kann der Begriff P über das schwache Gesetz der großen Zahlen definiert werden als Limes relativer Häufigkeiten. Für wiederholbare Experimente ergibt sich so das übliche additive Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne von Kolmogoroff.

Bell'sche Ungleichungen lassen sich für (additive) Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitsmaße ableiten. Da μ nicht die Eigenschaft der Additivität aufweist, gilt hierfür keine Bell'sche Ungleichung. Es ergibt sich daher auch kein Widerspruch zur ontologisch realistischen Fassung der Quantentheorie. Ein solcher Widerspruch ergibt sich nur, wenn die Existenz eines additiven Maßes auf der Menge aller möglichen Fakten angenommen wird (wie dies implizit durch Bell geschehen ist).

Das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Quantentheorie (Kapitel 21 bis 23)

Für die Quantentheorie wird ein bestimmtes äußeres Maß μ definiert. Hieraus werden bedingte (und somit normierte) äußere Maße abgeleitet. Damit wird das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Quantentheorie (in Übereinstimmung mit den empirischen Befunden) angegeben. Die formale Widerspruchsfreiheit dieses Vorgehens ergibt sich aus der Tatsache, dass μ auf einer Definition basiert.

Es sei Ω die Menge der möglichen Weltabläufe, die den deterministischen Gesetzen entsprechen, und

$$\mathcal{A} := \{ F \cap \Omega \mid F \in \mathcal{A}_0 \}$$

die Spuralgebra von \mathcal{A}_0 auf Ω . Sie stellt – nun unter Berücksichtigung der deterministischen Gesetze – die Menge der möglichen Fakten dar.

Das äußere Maß μ wird auf der Algebra \mathcal{A} wie folgt definiert: Für beliebige Unterräume A und B des Hilbertraums \mathcal{H} sei

$$\delta(A,B) := |\pi_A \pi_{B^\perp}| \quad (\text{mit } |L| := (\text{tr } LL^*)^{1/2} \text{ für Operatoren } L \text{ auf } \mathcal{H})$$

Ein kleiner Wert von $\delta(A,B)$ bedeutet, dass A annähernd ein Unterraum von B ist.

Für Eigenschaften A_1, \dots, A_n wird definiert:

$$\rho(\forall_j \langle A_j, 0 \rangle) := \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \text{ und die } D_j \text{ sind paarweise vertauschbar mit } \bigcap_j D_j = 0 \}$$

Dabei bezeichnet $\forall_j \langle A_j, 0 \rangle$ das mögliche Faktum, dass alle Eigenschaften A_j zum Zeitpunkt 0 gegeben sind. μ wird nun definiert als das maximale äußere

Maß auf \mathcal{A} , für welches gilt:

$$\mu(\forall_j \langle A_j, 0 \rangle) \leq \rho(\forall_j \langle A_j, 0 \rangle)^2$$

für beliebige Eigenschaften A_1, \dots, A_n . Die bedingten Möglichkeitsmaße werden hierzu für mögliche Fakten F und G definiert als

$$\mu(F | G) := \mu(F \wedge G) / \mu(G)$$

Dabei steht die "logische" Schreibweise $F \wedge G$ formal für den Ausdruck $F \cap G$.

Bemerkung: Aufgrund des deterministischen Bewegungsgesetzes spielt es keine Rolle, welcher Zeitpunkt bei der Definition von μ zugrunde gelegt wird.

Die Darstellung der Quantentheorie im Sinne des ontologischen Realismus ist damit abgeschlossen. Ihre Widerspruchsfreiheit kann formal bewiesen werden. Es gibt demnach keine weiteren No-Go-Theoreme.

Die Initialbedingung (Kapitel 24)

Angeht des reversiblen Bewegungsgesetzes kann die Tatsache des gerichteten Zeitablaufs (der "Zeitpfeil") nur erklärt werden durch die Annahme, dass das Universum zu einem frühen Zeitpunkt t_0 eine bestimmte "Initialeigenschaft" UR aufgewiesen hat (Initialbedingung). Die Eigenschaft UR beschreibt insbesondere das Vorhandensein einer geringen Entropie. Die Initialbedingung drückt somit aus, dass das Universum zur Zeit t_0 weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt war. Sie erklärt damit auch die noch immer andauernde Zunahme der Entropie im Universum.

UR wird – wie jede Eigenschaft des Universums – als ein Unterraum des Hilbertraums modelliert. Der Zeitpunkt t_0 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit als $t_0 = 0$ angenommen werden.

Das Quantenuniversum aus der Perspektive makroskopischer Subjekte (Kapitel 25)

Nach dem Abschluss der Darstellung der Quantentheorie im Sinne des ontologischen Realismus und der Einführung des Zeitpfeils verbleibt vor allem die Frage, warum und in welchen Fällen sich der quantentheoretische Zustandskalkül anwenden lässt.

Die obige Darstellung der deterministischen Axiome und des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Quantentheorie entspricht einer objektiven, "exophysikalischen" Sicht. Um die nun anstehende Frage zu beantworten, müssen wir uns der "endophysikalischen" Fragestellung zuwenden, wie das Universum aus der Perspektive makroskopischer Subjekte zu sehen ist.

Hierzu erweisen sich die folgenden Schritte als notwendig:

- Definition des Begriffs der makroskopischen Eigenschaft
- Definition von (bedingten) Dokumentbeziehungen

- Beschreibung der empirischen Zugänglichkeit von Ereignissen, die in der Vergangenheit liegen
- Definition von Subsystemen des Hilbertraums zur Darstellung von Teilobjekten des Universums
- Definition absoluter und bedingter Quantenzustände für derartige Subsysteme

Makroskopische Eigenschaften (Kapitel 26)

Eine Eigenschaft des Universums gilt als "makroskopisch", wenn sie von "makroskopischen" Subjekten (z.B. von Menschen) unmittelbar wahrgenommen werden kann. Alle makroskopischen Eigenschaften können in einer Menge S aus paarweise vertauschbaren Unterräumen des Hilbertraums modelliert werden. Dies ergibt sich – jedenfalls im Rahmen der Quantenmechanik – aus der Tatsache, dass die betrachteten Subjekte im wesentlichen nur "grobe" Orts-Impuls-Eigenschaften wahrnehmen können, die weit von der Unschärferelation "entfernt" sind.

Ein makroskopisches Ereignis besteht im Vorhandensein einer makroskopischen Eigenschaft A zu einem Zeitpunkt t .

Dokumente (Kapitel 27)

Ein makroskopisches Ereignis (D,t) kann Dokument für ein anderes (in der Regel früheres) Ereignis (A,s) sein. Eine solche Dokumentbeziehung besteht üblicherweise nur unter einer oder mehreren Bedingungen. Hierbei handelt es sich um eine Folge von Ereignissen, etwa $(E_1,s_1), \dots, (E_k,s_k)$. Die bedingte Dokumentbeziehung besteht dann, wenn mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D' &:= U_{-t} D \\ A' &:= U_{-s} A \\ B_j &:= U_{-s_j} E_j \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\pi_{D'} \pi_{B_k} \dots \pi_{B_1} = \pi_{A'} \pi_{B_k} \dots \pi_{B_1}$$

erfüllt ist. Derartige Dokumentbeziehungen bestehen in der Praxis stets nur näherungsweise.

Die Erinnerung makroskopischer Subjekte beruht ebenfalls auf dem Vorhandensein von Dokumenten, z.B. auf Gedächtnisspuren im Gehirn.

Damit ein Subjekt empirische Kenntnis von einem vergangenen Ereignis haben kann, muss es nicht nur über ein Dokument dieses Ereignisses verfügen,

sondern auch über Dokumente der jeweiligen für das Bestehen der Dokumentbeziehung erforderlichen Bedingungen. Ein unendlicher Regress wird hier nur durch die Annahme der Initialbedingung vermieden.

Für die Initialbedingung selbst kann es kein Dokument geben.

Empirische Zugänglichkeit vergangener Ereignisse (Kapitel 28 und 29)

Eine Folge möglicher Ereignisse $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ wird als t -zugänglich bezeichnet, wenn für jedes $k \leq n$ folgendes gilt:

- Für (E_k, t_k) gibt es zum Zeitpunkt t ein makroskopisches Dokument (D_k, t) .
- Die Dokumentbeziehung besteht unter der Bedingung, dass (neben der Initialbedingung) eine bestimmte Teilmenge der möglichen Ereignisse (E_j, t_j) mit $j < k$ eingetreten ist.
- Die Dokumentbeziehung besteht unabhängig vom Eintreten aller übrigen (E_j, t_j) sowie der jeweils dazu gehörenden Dokumente (D_j, t) .

Es wird hiermit beschrieben, wann eine (endliche) Folge von Ereignissen für makroskopische Subjekte von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich ist.

Bemerkung: Unter einem makroskopischen Subjekt kann man sich zum Beispiel einen einzelnen Menschen vorstellen, ebensogut aber auch die Menschheit als Ganzes – im Sinne eines "ideellen Gesamtsubjekts".

Für eine t -zugängliche Ereignisfolge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ kann die folgende Schachtelungseigenschaft bewiesen werden: Zu den

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für } k \in \{1, \dots, n\})$$

gibt es miteinander vertauschbare Unterräume B_k , C_k und M von \mathcal{H} , für die gelten:

- (a) $B_k < A_k < C_k$ (für $k \in \{1, \dots, n\}$)
- (b) $UR < M$
- (c) $\bigcap_k B_k = \bigcap_k A_k$
- (d) $M \cap \bigcap_k C_k = \bigcap_k A_k$

Empirisch zugängliche Ereignisse müssen, insbesondere wenn sie zu verschiedenen Zeiten stattfinden, nicht auf vertauschbaren Unterräumen von \mathcal{H} basieren (d.h. die A_k sind im allgemeinen nicht miteinander vertauschbar). Solche Ereignisse lassen sich jedoch stets durch vertauschbare Unterräume "einschachteln".

Das physikalische "tertium non datur" in makroskopischen Kontexten
(Kapitel 30 bis 33)

Das alltägliche Denken eines makroskopischen Subjekts beruht auf einer (endlichen) Menge von "Prämissen" $(E_1, t_1), \dots, (E_r, t_r)$ und bezieht sich auf eine (ebenso endliche) Menge von "interessierenden Ereignissen" $(E_{r+1}, t_{r+1}), \dots, (E_n, t_n)$. Insgesamt handelt es sich hierbei um eine t-zugängliche Folge von Ereignissen. Wenn dabei alle Bedingungen für die makroskopische Dokumentation der Ereignisse (mit Ausnahme der Initialbedingung) in der Menge der "Prämissen" enthalten sind, sprechen wir von einem "makroskopischen Kontext".

Für derartige makroskopische Kontexte kann gezeigt werden: Sofern man neben der Initialbedingung auch alle Prämissen des Kontextes voraussetzt, so ändert sich der auf die interessierenden Ereignisse bezogene empirische Gehalt der Theorie nicht, wenn man für alle diese Ereignisse das physikalische "tertium non datur" zusätzlich annimmt.

Damit wird klar, warum das physikalische "tertium non datur" aus der Perspektive makroskopischer Subjekte eine plausible Annahme darstellt. Der darauf basierende alltägliche Kalkül eines solchen Subjekts ist stets gerechtfertigt, wenn er sich auf einen bestimmten makroskopischen Kontext im obigen Sinne beschränkt. Die zusätzliche Annahme des physikalischen "tertium non datur" ist dabei auch möglich für "mikroskopische" Eigenschaften, wie sie etwa bei Beobachtungen mit einem Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskop auftreten. Wie zuvor lässt sich dies auch auf den Fall anwenden, dass es sich bei dem makroskopischen Subjekt um die Menschheit als Ganzes handelt.

Bemerkung: Dieselben Aussagen gelten auch dann, wenn man die Menge der von makroskopischen Subjekten unmittelbar wahrnehmbaren Eigenschaften S ersetzt durch eine beliebige Menge aus paarweise vertauschbaren Eigenschaften.

Die Annahme des physikalischen "tertium non datur" darf stets nur für einen fest gewählten makroskopischen Kontext (auf der Basis einer bestimmten Menge S vertauschbarer Eigenschaften) erfolgen. Macht man diese Annahme hingegen für mehrere oder sogar für alle möglichen makroskopischen Kontexte zugleich, so kann dies zu einem Widerspruch im Sinne des Kochen-Specker-Theorems führen.

Die Annehmbarkeit des physikalischen "tertium non datur" im Rahmen eines makroskopischen Kontextes hat zur Folge, dass man (unter den Voraussetzungen dieses Kontextes und bei Bestehen der erforderlichen Dokumentbeziehungen) im Falle des Vorhandenseins eines Dokuments stets die Realität des dokumentierten Ereignisses annehmen kann. Dies betrifft auch Ereignisse, die nicht makroskopisch sind, wenn etwa ein Ion in einer Ionenfalle beobachtet

wird oder Kristallstrukturen mit entsprechenden Apparaturen sichtbar gemacht werden.

Makroskopische Experimente und Wahrscheinlichkeitsmaße (Kapitel 34 bis 36)

Makroskopische Experimente finden innerhalb eines makroskopischen Kontextes statt. Die speziellen Voraussetzungen des Experiments gehören dabei zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes, ebenso wie die möglichen experimentellen Ergebnisse. Letztere gliedern sich in eine (endliche) Menge von (endlichen) Alternativen und bilden so eine Teilalgebra \mathcal{A}_e innerhalb der Algebra aller möglichen Fakten.

Wenn das mögliche Faktum G sämtliche Voraussetzungen des Experiments beschreibt (einschließlich der Prämissen des makroskopischen Kontextes und der Initialbedingung), und wenn N ausdrückt, dass zu jeder der Alternativen mindestens eine ihrer Ausprägungen realisiert ist (so dass man von einer erfolgreichen Durchführung des Experiments sprechen kann), so kann mit

$$P_e(F) := \mu(F | G \wedge N)$$

ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne Kolmogoroffs auf der Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse definiert werden.

Aus technischen Gründen ist es an dieser Stelle sinnvoll anzunehmen, dass die Initialeigenschaft UR endliche Dimension besitzt, da sich andernfalls die bei der Definition des bedingten Möglichkeitsmaßes auftretenden Quotienten nicht immer bilden lassen. Physikalisch stellt diese Annahme keine wesentliche Beschränkung der Theorie dar.

Bemerkung: Das für alle möglichen Fakten definierte Möglichkeitsmaß $\mu(\cdot | G \wedge N)$ ist im allgemeinen nicht additiv auf der gesamten Algebra \mathcal{A} . Erst seine Restriktion auf die Algebra der möglichen Ergebnisse eines makroskopischen Experiments ergibt mit P_e ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß.

Es ist damit klar, warum das Kolmogoroff'sche Konzept der Wahrscheinlichkeit auf makroskopische Experimente erfolgreich angewendet werden kann.

Man kann zeigen, wie sich P_e auf der Basis des Möglichkeitsmaßes $\mu(\cdot | G \wedge N)$ definieren lässt als Limes relativer Häufigkeiten. Hierzu bildet man formal ein N -Multiversum, um darin die perfekt unabhängige N -fache Wiederholung des Experiments darzustellen. Die Additivität von P_e ist dann eine Konsequenz dieser Definition.

Subsysteme des Universums und ihre Quantenzustände (Kapitel 37)

Jede Möglichkeit, den Hilbertraum des Universums darzustellen als Tensorprodukt zweier Faktoren

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

gibt Anlass zur Definition eines Subsystems Q des Universums. (Mit Q^- wird dabei der "Rest des Universums" bezeichnet.) Quanten, wie z.B. Elektronen, können durch derartige Subsysteme dargestellt werden. Aber auch der Bewegungsfreiheitsgrad in x -Richtung oder der Spin eines Elektrons ist ein Beispiel für ein Subsystem. Außerdem lässt sich jedes makroskopische Teilobjekt des Universums durch ein derartiges Subsystem darstellen.

Zu jedem Zeitpunkt τ , zu jedem Subsystem Q und zu jeder Folge von Ereignissen

$$\mathcal{G} := ((E_1, t_1), \dots, (E_k, t_k))$$

als Bedingung lässt sich mit

$$A_j := U_{-t_j} E_j$$

$$L := \pi_{A_k} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$W := LL^* / \text{tr}(LL^*)$$

$$W_\tau := U_\tau W U_{-\tau}$$

der Ausdruck

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$$

als die partielle Spur von W_τ bezüglich \mathcal{H}_Q definieren.

$W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$ ist der Quantenzustand von Q zur Zeit τ unter der Bedingung \mathcal{G} . Es handelt sich im allgemeinen um einen statistischen Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_Q mit endlichem Rang. Hat dieser Operator den Rang Eins, so kann er (bis auf einen Phasenfaktor eindeutig) durch einen Vektor im Hilbertraum dargestellt werden und man spricht von einem "reinen" Zustand. In der Praxis tritt dies stets nur näherungsweise ein.

Im speziellen Fall $\mathcal{G} = \emptyset$ erhält man den absoluten Zustand des Universums zum Zeitpunkt 0 als

$$W := \pi_{UR} / \dim UR$$

Mit der Schrödingergleichung ergibt sich hieraus der absolute Zustand des Universums zu jedem Zeitpunkt τ , und durch Bildung der partiellen Spur bezüglich des Tensorfaktors \mathcal{H}_Q erhält man den absoluten Zustand des Subsystems Q zu diesem Zeitpunkt.

Allerdings sind diese absoluten Quantenzustände in der Praxis ohne Bedeutung. Der Zustand, den ein Subjekt einem Subsystem zuordnet, ist in der Regel ein bedingter Zustand, wobei die Bedingung dem Wissen des Subjekts entspricht.

Der absolute Quantenzustand des Universums wird unmittelbar durch die Initialeigenschaft UR festgelegt, welche durch die Existenz des "Zeitpfeils" zu

begründen ist. Hieraus werden alle anderen Zustände abgeleitet. Bei der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie – wie auch bei anderen Deutungsvarianten – gehört die Zuschreibung von Quantenzuständen hingegen zu den Grundpostulaten der Theorie und wird nicht näher begründet.

Bemerkung: Auch in der klassischen Mechanik ist die Annahme einer Initialeigenschaft UR erforderlich. Damit erhält man – indem man Projektoren durch Indikatorfunktionen und die Schrödingergleichung durch das klassische Bewegungsgesetz ersetzt – in ähnlicher Weise einen "Quantenzustand" für jedes Subsystem, zu jedem Zeitpunkt und zu jeder Bedingung. Formal handelt es sich dabei um eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Phasenraum des jeweiligen Subsystems.

Die Schrödingergleichung für Subsysteme (Kapitel 38)

Unter bestimmten Bedingungen kann sich der (bedingte) Quantenzustand eines Subsystems gemäß einer Schrödingergleichung bewegen, die auf einem Hamiltonoperator H_Q auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_Q des Subsystems beruht. In der Praxis gilt eine derartige Schrödingergleichung für ein Subsystem stets nur näherungsweise.

Die Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse in einem Quantenexperiment (Kapitel 39 und 40)

Unter einem Quantenexperiment ist ein makroskopisches Experiment zu verstehen, das sich im Rahmen der klassischen Theorie nicht zutreffend beschreiben lässt.

Im Rahmen eines solchen Quantenexperiments (aber ebenso gut für jedes beliebige makroskopische Experiment) lassen sich Messbeziehungen definieren. Eine solche Beziehung besteht zwischen einem beliebigen Ereignis einerseits und einem empirisch zugänglichen Ereignis, dem "Messergebnis", andererseits. Im Gegensatz zu den Dokumentbeziehungen eines makroskopischen Kontextes müssen Messbeziehungen nicht unabhängig von den Ergebnissen der nachfolgenden Messungen bestehen.

Mittels des oben definierten (bedingten) Quantenzustands lässt sich mit der bekannten Formel die (bedingte) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Messergebnisses berechnen. Die Bedingung des Quantenzustands muss dabei mit der Bedingung der zu berechnenden Wahrscheinlichkeit übereinstimmen.

Wird ein Messergebnis abgelesen, so ändern sich (aufgrund der zusätzlichen Bedingung) die relevanten bedingten Wahrscheinlichkeiten und demzufolge auch der relevante bedingte Quantenzustand. Letzteres geschieht in der Weise, wie es der bekannte quantentheoretische Formalismus vorsieht. Damit ist keine Änderung einer physikalischen Eigenschaft des betrachteten Objekts verbunden.

Subjektbezogene Quantenzustände (Kapitel 41)

Ein Subjekt schreibt einem Subsystem sinnvollerweise denjenigen bedingten Zustand zu, dessen Bedingung dem eigenen empirischen Wissen entspricht (subjektbezogener Quantenzustand). Zugleich interessiert es sich für diejenige bedingte Wahrscheinlichkeit, deren Bedingung ebenfalls seinem Wissen entspricht (subjektbezogene Wahrscheinlichkeit). Es schreibt damit dem Subsystem gerade denjenigen Zustand zu, der es ihm gestattet, die interessierenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Da das Wissen eines Subjekts objektiv vorhanden ist, sind subjektbezogene Quantenzustände und Wahrscheinlichkeiten objektiv gegebene Größen.

Wenn das Subjekt ein Messergebnis abliest, so ändert sich sein Wissen und damit der Zustand, den es dem System zuschreibt. Zugleich ändert sich auch die Bedingung in der bedingten Wahrscheinlichkeit, für die sich das Subjekt interessiert.

Diese Änderung des subjektbezogenen Zustands des Quantensystems wird durch den bekannten quantentheoretischen Zustandskalkül beschrieben.

Der Wechsel des subjektbezogenen Quantenzustands kann sprunghaft erfolgen (als "Quantensprung"), wenn das Subjekt eine neue Information erhält. Falls das Subjekt diese Information später wieder vergisst, wird der ursprüngliche bedingte Zustand für das Subjekt erneut relevant ("Quanten-Rücksprung").

Ein sprunghafter Wechsel des Zustands tritt ein, wenn sich das Wissen des Subjekts ebenso sprunghaft ändert. In Fällen, in denen sich das Wissen kontinuierlich verändert – etwa bei der zunehmend genaueren Ablesung eines Messergebnisses – findet der Wechsel des subjektbezogenen Quantenzustands ebenfalls in stetiger Weise statt.

Auch wenn eine subjektbezogene Wahrscheinlichkeit ein weit entferntes Ereignis betrifft, kann sie sich im Falle einer Beobachtung, die das Subjekt macht, ändern. Das hat nichts mit einer "geisterhaften Fernwirkung" zu tun. Dasselbe gilt für subjektbezogene Quantenzustände.

Varianten des Quantenformalismus (Kapitel 42)

Es gibt nicht einen bestimmten Formalismus der Quantentheorie, sondern verschiedene Varianten hiervon. Allerdings gelangt man mit jeder dieser Varianten zu denselben Vorhersagen in Bezug auf die Wahrscheinlichkeiten experimenteller Ergebnisse. Hierzu werden einige Beispiele diskutiert.

Zur Realität gemessener Ereignisse (Kapitel 43)

Es sind zwei grundsätzlich verschiedene Konzepte der "Messung" zu unterscheiden: Einerseits "Messung" im eigentlichen (klassischen) Sinn als Feststellung einer gegebenen Realität, andererseits "Quantenmessung" als Beobach-

tung eines Messergebnisses, wenn eine formale Messbeziehung zu einem in diesem Sinne gemessenen Ereignis besteht.

Im Falle klassischer Messungen bestehen voneinander unabhängige Dokumentbeziehungen zwischen den gemessenen Ereignissen und den unmittelbar beobachtbaren Messergebnissen. Spielt sich dies im Rahmen eines makroskopischen Kontextes ab, so lässt sich die Realität des Gemessenen annehmen. Dies gilt auch dann, wenn die gemessenen Ereignisse nicht makroskopisch sind.

Im Fall von Quantenmessungen ist es hingegen im allgemeinen nicht möglich, die Realität des formal als "gemessen" Geltenden anzunehmen. Der wesentliche Unterschied liegt hier darin, dass die Messbeziehungen nicht unabhängig von den nachfolgenden Messergebnissen bestehen müssen.

Rekonstruktiver Realismus und Quantentheorie (Kapitel 44)

Wir gehen zunächst stets von einem naiven Realismus aus. Zweifel an der Verlässlichkeit unserer Wahrnehmungen führen dann zu der Einsicht, dass uns immer nur die "Phänomene" unmittelbar gegeben sind. Aus den gegebenen Phänomenen können wir jedoch eine "Welt an sich" rekonstruieren. Diese Rekonstruktion bietet "kalkulatorische Vorteile" und hilft dabei, sich die umgebende Welt vertraut zu machen (rekonstruktiver Realismus).

Die naturwissenschaftliche Rekonstruktion der Realität (der fernen Vergangenheit, des Mikroskopischen und des "Teleskopischen" sowie zukünftiger Ereignisse) erfolgt über Dokumentbeziehungen. Damit sie widerspruchsfrei erfolgen kann, dürfen "Quantenmessungen" im allgemeinen nicht als Feststellung realer Gegebenheiten aufgefasst werden. Dennoch gelangt man so zu einer Darstellung der Quantentheorie im Einklang mit dem Konzept des rekonstruktiven Realismus.

Symmetrien in der Quantentheorie (Kapitel 45 und 46)

Eine Symmetrie wird in der Quantentheorie durch eine Gruppe \mathcal{G} aus unitären Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} angegeben. Vorauszusetzen ist dabei, dass sowohl der Hamiltonoperator H (und damit das Bewegungsgesetz) als auch die relevanten Eigenschaften des Universums (d.h. die Initialeigenschaft UR sowie alle makroskopischen Eigenschaften) symmetrisch sind. Dabei ist H symmetrisch, wenn für alle $U \in \mathcal{G}$ die Beziehung $UH = HU$ besteht, und eine Eigenschaft $A < \mathcal{H}$ ist symmetrisch, wenn für alle $U \in \mathcal{G}$ gilt: $UA = A$.

In der Quantentheorie ist jede Symmetrie mit einem Naturgesetz verknüpft. Um dies zu formulieren, wird \mathcal{H}' (im Falle einer endlichen Symmetriegruppe) definiert als die Menge der symmetrischen Elemente von \mathcal{H} , d.h. derjenigen Vektoren $\psi \in \mathcal{H}$, die für alle $U \in \mathcal{G}$ die Gleichung $U\psi = \psi$ erfüllen. \mathcal{H}' ist ein Unterraum von \mathcal{H} und stellt eine Eigenschaft des Universums dar. Wegen der

Symmetrie des Bewegungsgesetzes ist \mathcal{H}' zeitinvariant, d.h. es gilt für alle t die Gleichung

$$U_t \mathcal{H}' = \mathcal{H}'$$

Das mit der Symmetrie verknüpfte Naturgesetz kann nun formuliert werden, indem man ein zusätzliches Axiom SYM einführt. Dieses Axiom besagt, dass die Eigenschaft \mathcal{H}' zur Zeit 0 gegeben ist. Auf die spezielle Wahl des Zeitpunktes kommt es hier nicht an. Ob das mit einer bestimmten Symmetrie verknüpfte Naturgesetz im realen Universum gilt, ist stets eine empirische Frage.

Alternativ kann man dasselbe Gesetz auch einführen, indem man entweder den Hilbertraum \mathcal{H} durch \mathcal{H}' und den Hamiltonoperator H durch seine Restriktion auf \mathcal{H}' ersetzt, oder aber die Initialeigenschaft UR ersetzt durch

$$UR' := UR \cap \mathcal{H}'$$

Vom Standpunkt makroskopischer Subjekte aus erweisen sich diese drei Wege zur Einführung des zusätzlichen Naturgesetzes als empirisch gleichwertig.

Bekannte Beispiele für Symmetrien in der Quantenmechanik sind die "Teilchen"-Tausch-Symmetrien der Bosonen und der Fermionen. Tatsächlich handelt es sich hier nicht um die Vertauschung von "Teilchen" als konkreten physikalischen Objekten, sondern um die Vertauschung von Subsystemen des Hilbertraums. Die fermionische Symmetrie unterscheidet sich von der bosonischen lediglich dadurch, dass jede Vertauschung zweier "Teilchen" zu einem Vorzeichenwechsel des zugehörigen unitären Operators führt. Das mit der fermionischen Symmetrie verknüpfte Naturgesetz ist das sogenannte "Pauli-Verbot".

Darstellung physikalischer Objekte (Kapitel 47)

In der Quantentheorie kann nicht davon ausgegangen werden, dass das Universum aus elementaren Objekten besteht, denen eine dauerhafte Existenz zukommt. Jedes physikalische Objekt hat vielmehr grundsätzlich eine begrenzte Lebensdauer. Außerdem kann von einem "Objekt" nur dann die Rede sein, wenn es sich dabei um eine lokale Erscheinung handelt. Schon die bloße Existenz eines Objekts stellt eine Eigenschaft des Universums dar.

In der Quantenmechanik kann ein physikalisches Objekt dargestellt werden durch ein Subsystem des Hilbertraums. Zu den Subsystemen zählen sowohl die einzelnen Quanten als auch komplexe, aus vielen Quanten zusammengesetzte Gebilde. Der Hilbertraum des Universums ist insgesamt (als Tensorprodukt) aus den Hilberträumen der einzelnen Quanten zusammengesetzt. Subsysteme sind abstrakte mathematische Objekte, ihnen kommt daher eine "ewige" Existenz zu.

Bei der Darstellung eines physikalischen Objekts durch ein Subsystem Q (mit dem Hilbertraum \mathcal{H}_Q) entspricht jede Eigenschaft des Objekts einer Eigen-

schaft des Subsystems. Letztere entspricht einem Unterraum A' von \mathcal{H}_Q . Mit

$$A'' := A' \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

(wobei Q^- den Rest der Welt beschreibt) wird sie als Unterraum von \mathcal{H} , das heißt als Eigenschaft des Universums dargestellt. Dieser Unterraum beschreibt das Vorhandensein eines Objekts mit der fraglichen Eigenschaft.

Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig. Da Quanten derselben Art voneinander nicht unterscheidbar sind, ergibt jede Permutation der gleichartigen Quanten des Universums wiederum ein Subsystem, das zur Darstellung des Objekts geeignet ist. Man erhält somit zu jeder Permutation σ einen Unterraum $A''(\sigma)$ von \mathcal{H} , der die Eigenschaft des Objekts darstellt. Wenn nun A die direkte Summe aller dieser $A''(\sigma)$ ist, so beschreibt A (als Unterraum von \mathcal{H}) letztlich das Vorhandensein eines Objekts mit der entsprechenden Eigenschaft. Der so gebildete Unterraum A ist symmetrisch gegenüber der "Teilchen"-Tausch-Symmetrie.

Quantenfeldtheorie I (Kapitel 48 bis 50)

Die bisherigen Überlegungen lassen sich auf die Quantenmechanik anwenden, welche auf einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} sowie einem selbstadjungierten Hamiltonoperator H auf \mathcal{H} basiert. Es ist bislang aber noch nicht geklärt, ob und wie sich die Quantenfeldtheorie (QFT) – insbesondere die für die Beschreibung des realen Universums relevante nicht-abelsche Eichtheorie – präzise mathematisch fundieren lässt, ob dies auf der Basis eines separablen Hilbertraums möglich ist und wie der Hamiltonoperator darauf widerspruchsfrei definiert werden kann. Der wesentliche Grund hierfür liegt darin, dass im Gegensatz zur Quantenmechanik bei der QFT unendlich viele Freiheitsgrade vorliegen. Infolgedessen ist es gegenwärtig noch nicht entscheidbar, ob sich die oben entwickelten Lösungsprinzipien eins zu eins auf die QFT übertragen lassen.

Ein möglicher Weg besteht darin, eine QFT mit nur endlich vielen Freiheitsgraden (eine "endliche" QFT) zu verwenden, beispielsweise eine Gittertheorie. Wenn man dabei die Anzahl der Freiheitsgrade ausreichend groß wählt, so ist das Universum auch mit einer derartigen Theorie modellierbar, und zwar mit einer solchen Genauigkeit, dass die Theorie empirisch nicht von einer kontinuierlichen Modellierung unterscheidbar ist. Gitteranomalien (wie z.B. die "Fermionenverdopplung") sind dabei überwindbar, indem man das Bewegungsgesetz passend festlegt, z.B. durch Einführung eines Wilson-Terms. Damit ist eine ontologisch realistische Fassung der QFT möglich.

Der Nachteil dieses Vorgehens liegt vor allem in der willkürlich vorzunehmenden Wahl der Anzahl der Freiheitsgrade, bzw. im Falle der Gittertheorie in der Wahl der Gitterkonstanten. Dieser Nachteil kann beseitigt werden, indem man eine QFT auffasst als eine Folge aus endlichen QFTs mit monoton gegen

∞ bzw. gegen 0 konvergierenden Parametern (genau genommen als eine Äquivalenzklasse derartiger Folgen). Ein ähnlicher Weg wird z.B. beschritten, wenn man die reellen Zahlen definiert als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus rationalen Zahlen.

Diese Überlegungen zeigen, dass die oben beschriebenen Lösungsprinzipien sich grundsätzlich auch auf die QFT anwenden lassen.

Quantenfeldtheorie II (Kapitel 51 bis 53)

Zur Kovarianz der QFT: Es bedarf hier einer Neuformulierung des allgemeinen Konzepts physikalischer Theorien für den Fall einer relativistischen Zeit. Im Rahmen des ontologisch realistischen Ansatzes sind Ereignisse genau genommen weder zeitlich noch räumlich lokal. Das Bewegungsgesetz wird bei der Formulierung der Koordinatentransformationen der (nicht lokalen) Ereignisse implizit bereits benötigt. Daher ist nicht das Bewegungsgesetz, sondern nur die Theorie als Ganzes kovariant.

Zur Rolle von "Teilchen" in der QFT: Im Quantenfeld existieren keine wirklichen ("klassischen") Teilchen im Sinne von realen physikalischen Objekten; das Quantenfeld zeigt jedoch unter bestimmten Umständen ein teilchenförmiges Verhalten. Die Bewegung der dabei in Erscheinung tretenden "Teilchen" erfolgt grundsätzlich probabilistisch und nur in bestimmten Fällen nahezu deterministisch, z.B. wenn die "Teilchen" eine sehr große Masse haben.

Es folgen einzelne Anmerkungen zu den Themen:

- Das reale Quantenfeld als ein Feld im klassischen Sinne, dessen Wertebereich die Menge der schwachen σ -Filter auf dem Hilbertraum ist.
- Das klassisch-feldförmige Verhalten des Quantenfeldes.
- Vorgänge, die aus makroskopischer Perspektive als deterministische und reversible Prozesse erscheinen.
- Übergang von quantentheoretischem zu klassischem Verhalten.
- Das Quantenfeld erzeugt einen makroskopischen Dualismus aus Teilchen und Feldern. Dessen (naive) Übertragung auf die Mikrowelt führt zum Modell der klassischen Mikrophysik.
- Begründung approximativer halbklassischer Methoden.
- Die Quantenmechanik als Approximation an die QFT.

Zusätzliche Anmerkungen und Ergänzungen (Kapitel 54 bis 56)

Es wird eine Reihe von zusätzlichen Anmerkungen formuliert zu bestimmten wissenschaftstheoretischen Aspekten, die für die Quantentheorie von Bedeutung sind. Sodann folgen einzelne ergänzende Bemerkungen zur Quantentheorie selbst. Anschließend werden einige mögliche Erweiterungen der hier dargestellten realistischen Quantentheorie diskutiert.

1. Methodische Vorbemerkungen

Es gibt in der Quantentheorie eine Reihe von Fragestellungen, bei denen die bisherige "Deutungsdebatte" zu keinen eindeutigen Antworten geführt hat. Hierzu gehören zum Beispiel die folgenden Fragen:

- Was ist ein Quantensystem?
- Hat jedes Quantensystem immer einen Zustand?
- Wenn nein: Unter welchen Umständen kann ihm ein Zustand zugeschrieben werden?
- Ist der Zustand im allgemeinen ein Vektor, ein eindimensionaler Unterraum oder ein statistischer Operator?
- Ist der Zustand eine objektiv gegebene physikalische Eigenschaft des Quantensystems oder eine Beschreibung subjektiven Wissens?
- Werden demselben System sinnvollerweise durch verschiedene Subjekte unterschiedliche Zustände zugeschrieben?
- Was ist eine Messung und welche Rolle spielen Beobachtungen?
- Wann ist der Prozess einer Messung oder einer Beobachtung abgeschlossen?
- Ändert sich der Quantenzustand während der Messung oder erst bei der Ablesung des Messergebnisses?
- Was ist in der Quantentheorie als das Reale anzusehen?
- Stellen die Observablen objektiv vorhandene Eigenschaften eines Quantensystems dar, oder entstehen derartige Eigenschaften erst durch eine Beobachtung oder eine Messung?
- In welchem Sinne ist die Theorie "wesentlich probabilistisch"?
- Was ist Wahrscheinlichkeit und welchen Entitäten kann eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden?
- Was sind – im Sinne des Kolmogoroff'schen Ansatzes – die sogenannten "Elementarereignisse" im Falle eines physikalischen Modells des Universums? Und wie ist hierzu die Algebra der Ereignisse zu beschreiben?
- Ist bei der Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ergebnis "gemessen" wird, die absolute oder eine bedingte Wahrscheinlichkeit gemeint?
- Was steht im letzteren Fall in der Bedingung?
- Muss die klassische Logik durch eine "Quantenlogik" ersetzt werden?
- Muss der (ontologische) Realismus zugunsten einer "Theorie der Phänomene" aufgegeben werden, und führt dies zum Solipsismus?

Wie wir bereits ausgeführt haben, besteht das Ziel des vorliegenden Textes darin, nicht nur eine weitere Deutungsvariante zu formulieren, sondern das Deutungsproblem der Quantentheorie überhaupt zu lösen. Dazu ist es erforderlich, auf die genannten Fragen eine eindeutige Antwort zu geben und die Quantentheorie in einer präzisen und konsistenten Weise zu rekonstruieren. Hierzu muss insbesondere geklärt werden, worauf die sogenannten No-Go-Theoreme beruhen und worin ihre Bedeutung besteht. Außerdem sind bestimmte wissenschaftstheoretische Fragen zu klären, etwa die Frage, worin der empirische Gehalt einer physikalischen Theorie liegt.

Eine Lösung des Deutungsproblems erfordert vor allem die Beantwortung der folgenden Kernfragen:

- Was ist in der Quantentheorie als das physikalisch Reale anzusehen?
- Welche Rolle spielt dabei das Kochen-Specker'sche No-Go-Theorem?
- Welche Rolle spielt die Bell'sche Ungleichung?
- Welchen ontologischen Status hat der Quantenzustand?
- Warum ändert sich der Quantenzustand bei einer Messung?
- Wie lässt sich der bekannte quantentheoretische Formalismus begründen?
- Wie kann man zeigen, dass es keine weiteren No-Go-Probleme gibt (Beweis der Konsistenz der Theorie)?

Sinnvoll ist hierbei die Darstellung der Theorie (sowohl des wissenschaftstheoretischen Rahmens als auch der eigentlichen Quantentheorie) in einer mathematischen Form, da nur auf diese Weise der notwendige Grad an Präzision und Eindeutigkeit erreicht wird. Die Verwendung der mathematischen Methode erlaubt insbesondere die Formulierung verschiedener Modelle der physikalischen Realität und einen präzisen Vergleich verschiedener Axiomensysteme (d.h. physikalischer Gesetze) innerhalb eines gegebenen Modells.

Man muss hier unterscheiden zwischen dem traditionellen *Gegenstand* der Mathematik (der Theorie der Zahlen, der Lehre vom Raum usw.) und der mathematischen *Methode*. Diese Methode kann folgendermaßen beschrieben werden: Auf der Basis der Prädikatenlogik wird zunächst – ausgehend von wenigen Axiomen – die Mengenlehre aufgebaut. Sodann werden einzelne Themengebiete (z.B. das Konzept der Abbildungen, die Theorie der natürlichen Zahlen usw.) mit Hilfe bestimmter Definitionen eingeführt. Die formal beweisbaren Aussagen der Mathematik, die sogenannten Theoreme, werden hieraus allein mit den Mitteln der Logik (genauer: der Prädikatenlogik erster Stufe) abgeleitet. Aufgrund dieses Vorgehens liegt das Risiko logischer Inkonsistenzen allein in der Wahl der anfänglichen Axiome der Mengenlehre. Durch die späteren Definitionen können prinzipiell keine neuen Inkonsistenzen entstehen.

Zur Lösung des Deutungsproblems und zur Schaffung der dazu erforderlichen wissenschaftstheoretischen Voraussetzungen werden im vorliegenden Text nicht nur bestimmte mathematische Gegenstandsbereiche verwendet (etwa die Theorie des Hilbertraums), sondern es wird, im Interesse der notwendigen Präzision in der Argumentation, auch die in der Mathematik gebräuchliche Methodik angewendet. Insbesondere werden, ausgehend von der Mengenlehre, die benötigten Strukturen durch passende Definitionen eingeführt, und hieraus werden die relevanten Aussagen auf rein logischem Wege abgeleitet. Insbesondere werden dabei die grundlegenden Gesetze der Quantentheorie in präziser axiomatischer Form definiert, so dass ihre logische Konsistenz formal bewiesen werden kann.

Es gibt eine Reihe von Beispielen in der Geschichte der Wissenschaft, die zeigen, dass von einer solchen mathematischen Darstellung neue Erkenntnisse zu erwarten sind.

Die euklidische Geometrie: Es handelt sich dabei um die einzige physikalische Theorie, die traditionell in präziser, axiomatischer Form dargestellt wurde. Im Gegensatz zur landläufigen Meinung handelt es sich bei der euklidischen Geometrie um eine mit mathematischer Präzision formulierte physikalische Theorie und nicht etwa um "reine Mathematik". Die Axiome dieser Theorie wurden mit der Absicht gewählt, den realen physikalischen Raum zu beschreiben. Daran ändert sich auch nichts durch die Tatsache, dass die euklidische Geometrie inzwischen als empirisch widerlegt zu gelten hat.

Die formale Logik: Ursprünglich war die Logik eine philosophische Disziplin, die mit den in der Philosophie üblichen Methoden der Diskussion behandelt wurde. Durch die Formalisierung (d.h. indem man Logik mit mathematischer Methodik betrieben hat) konnte ein höheres Maß an Exaktheit gewonnen werden.

Die Theorie der Wahrscheinlichkeit: Über viele Jahrhunderte hinweg hatte man nur eine mehr oder weniger diffuse Vorstellung vom Begriff der Wahrscheinlichkeit. Erst durch die formale axiomatische Darstellung im Rahmen des Kolmogoroff'schen Modells ließ sich eine präzise Theorie der Wahrscheinlichkeit aufbauen.

Die Theorie der Beweisbarkeit: Auch wenn es hierbei um die Beweisbarkeit mathematischer Aussagen geht, handelte es sich ursprünglich nicht um eine mathematische, sondern um eine metamathematische Fragestellung, die der Erkenntnistheorie und somit der Philosophie zuzurechnen war. Man hat dann Wege entwickelt, diese Theorie zu mathematisieren und damit formal präzise zu behandeln. Das Ergebnis dieses Vorgehens waren neue Erkenntnisse, die ohne diese Formalisierung nicht möglich gewesen wären.

Die Theorie der Berechenbarkeit stellt einen ähnlichen Fall dar. Auch hier handelt es sich zunächst um eine metamathematische Fragestellung, die der Philosophie zuzurechnen ist. Die Formalisierung, d.h. die Beschreibung in

einer mathematischen Form, führte auch hier zu neuen Erkenntnissen, zum Beispiel zu der Aussage, dass es Funktionen gibt, die sich nicht berechnen lassen.

Alle diese Beispiele zeigen, dass die formal mathematische Darstellung eines Themengebiets zu präziseren Aussagen und damit zu neuen Erkenntnissen führen kann. Zur Lösung des Deutungsproblems ist aus diesem Grunde ebenfalls eine mathematisch präzise Darstellung sinnvoll.

Dieses Vorgehen kann in Anlehnung an die formale Logik als "formale Physik" oder aber in Anlehnung an die analytische Philosophie (d.h. an jenen Zweig der Philosophie, der auch Methoden der Mathematik verwendet, um philosophische Fragen aufzuklären) als "analytische Physik" bezeichnet werden.

Es ist dabei sinnvoll, zunächst von möglichst allgemeinen Voraussetzungen auszugehen, d.h. von einem möglichst allgemeinen wissenschaftstheoretischen Rahmen. In einem solchen Rahmen sollte sowohl die Quantentheorie als auch die klassische Physik ihren Platz finden. Darüber hinaus müssen sich auch bekannte Deutungsvarianten (soweit sie einen ontologisch realistischen Charakter aufweisen) innerhalb des gegebenen Systems diskutieren lassen, etwa die Bohm'sche Deutung. Unser Ziel muss demnach die Entwicklung eines möglichst allgemeinen Grundmodells der Physik sein.

Maximale Allgemeinheit bedeutet zum Beispiel, dass nicht von einem speziellen numerischen Realismus, sondern von dem allgemeineren Konzept des faktischen Realismus auszugehen ist, damit das Modell nicht von vornherein durch bestimmte traditionelle Vorstellungen eingeschränkt ist. Ausgangspunkt muss außerdem ein allgemeines Konzept der Wahrscheinlichkeit sein. Der modellspezifische Ansatz Kolmogoroffs, bei dem jedes einzelne Experiment in einem eigenen Modell beschrieben wird, muss entsprechend verallgemeinert werden.

Als Ausgangspunkt kann man sich dabei an der klassischen Physik orientieren. Diese Physik beruht auf

- der klassischen Logik (der Prädikatenlogik erster Stufe)
- dem ontologischen Realismus
- dem klassisch-physikalischen Modell
- einem deterministischen Bewegungsgesetz

sowie einem probabilistischen Gesetz, welches – wie wir sehen werden – durch die Annahme der Gleichverteilung auf der Menge der möglichen Pfade im Phasenraum angegeben werden kann.

Da die klassische Theorie den experimentellen Ergebnissen widerspricht, muss sie aufgegeben werden. Mit Sicherheit muss man das klassische Bewegungsgesetz fallenlassen, möglicherweise auch das klassische "Kügelchenmodell". Es gibt hingegen keinen Grund, die klassische Logik oder den ontologischen Realismus aufzugeben. Weder die Logik noch der ontologisch realistische Ansatz kann als empirisch widerlegt betrachtet werden; eine Widerlegung

mit empirischen Mitteln ist auch gar nicht denkbar. Daher ist das allgemeine wissenschaftstheoretische Konzept auf der Grundlage der klassischen Logik und des ontologischen Realismus aufzubauen, als einer allgemeinen Theorie des Universums und seiner Eigenschaften.

Bemerkung: Der Zustandsbegriff ist ein Konzept der klassischen Physik. Der klassische Zustand (eines Objekts oder des gesamten Universums) entspricht einer bestimmten Menge von numerischen Eigenschaften, aus denen sich alle anderen Eigenschaften (des Objekts bzw. des Universums) ableiten lassen. Einen solchen klassischen Zustand gibt es in der Quantentheorie nicht. Das Grundkonzept jeder physikalischen Theorie ist daher das Konzept der Eigenschaft, nicht das des Zustands.

Da es unser Ziel ist, die Quantentheorie im Sinne der klassischen Logik und des ontologischen Realismus zu formulieren und dazu auch ein Wahrscheinlichkeitsgesetz einzuführen, müssen wir zunächst klären, wie eine Theorie im allgemeinen formuliert sein muss, damit sie diesen Forderungen entspricht.

Hierzu entwickeln wir im folgenden ein allgemeines Konzept für klassisch logische, ontologisch realistische Theorien, die auch ein probabilistisches Gesetz enthalten können. Dieses Modell ist so konzipiert, dass sich darin sowohl die klassische Mechanik als auch die Quantentheorie beschreiben lässt.

In der weiteren Entwicklung des Textes wird neben der Quantentheorie jeweils auch die klassische Theorie als Beispiel mitgeführt. Damit sollen die Ähnlichkeiten ebenso wie die Abweichungen zwischen diesen Theorien aufgezeigt werden, und es soll deutlich gemacht werden, dass es keinen Grund gibt, das Verhalten der Quantenwelt als besonders "merkwürdig" anzusehen.

Anmerkung

Im folgenden Aufbau des allgemeinen Modells wird die extensionale Logik zugrunde gelegt, obwohl einerseits modale Begriffe wie Notwendigkeit, Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit, andererseits aber auch der intensionale Begriff des Wissens benötigt werden. Die extensionale Logik zeichnet sich dadurch aus, dass sie nur die Behandlung extensionaler Operationen wie z.B. "und", "oder", "nicht" usw. zulässt. Diese Operationen heißen extensional, weil die (Wahrheits-) Werte der damit zusammengesetzten Terme stets schon durch die (Wahrheits-) Werte der enthaltenen Teilterme eindeutig bestimmt sind. Demgegenüber ist z.B. "Notwendigkeit" ein modaler Begriff, da der Wahrheitswert des Ausdrucks "A ist notwendig" nicht schon durch den Wahrheitswert des Terms A festgelegt ist.

Im Rahmen einer modalen Logik kann man – neben den extensionalen – auch modale Begriffe behandeln; insofern stellt die modale Logik eine Erweiterung der extensionalen Logik dar. Eine weitere Verallgemeinerung ist die intensionale Logik. Sie erlaubt auch die Behandlung intensionaler Begriffe wie z.B. "wollen", "glauben" oder "wissen". Einer der Unterschiede zwischen modalen

und intensionalen Begriffen liegt darin, dass bei letzteren das sogenannte "de re"/"de dicto"-Problem auftreten kann. So kann der Satz

"Peter glaubt, dass der Papst weiße Haare hat."

auf zwei Weisen verstanden werden. Die "de re"-Interpretation lautet:

"Peter glaubt von der Person, die tatsächlich der Papst ist,
dass sie weiße Haare hat."

Dabei muss Peter nicht wissen, dass diese Person tatsächlich der Papst ist. Die "de dicto"-Interpretation lautet hingegen:

"Peter glaubt, dass derjenige, den Peter für den Papst hält,
weiße Haare hat."

Bei den bloß modalen, aber nicht intensionalen Begriffen wie "Notwendigkeit" oder "Wahrscheinlichkeit" tritt das "de re"/"de dicto"-Problem nicht auf.

Der Grund, warum wir die extensionale Logik zugrunde legen können, obwohl wir sowohl modale Begriffe als auch den intensionalen Begriff des Wissens benötigen, gliedert sich in zwei Teile:

Zum einen interessieren wir uns nur für einen bestimmten Teilaspekt des Begriffs des Wissens, nämlich für das Wissen eines Subjekts über die möglichen Fakten in einem gegebenen physikalischen Modell. Dieser Teilaspekt kann wie ein modaler Begriff behandelt werden.

Zum andern gibt es einen Weg, modale Begriffe im Rahmen der extensionalen Logik zu behandeln, indem man explizit von der Existenz einer Menge möglicher Fakten ausgeht. Dieser Weg wurde von Kolmogoroff bei seiner Behandlung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs eingeführt. Im Kern wird hierbei eine Grundmenge Ω vorausgesetzt und jedes mögliche Faktum wird als eine Teilmenge von Ω dargestellt. Im Kolmogoroff'schen Ansatz wird Ω mit den Elementarereignissen eines Experiments identifiziert. Hierdurch wird allerdings die Menge der möglichen Fakten eingeschränkt auf die möglichen Ergebnisse dieses Experiments. Will man beliebige modale Begriffe auf diese Weise behandeln, so muss man die Grundmenge Ω anders interpretieren: als die Menge der möglichen Weltabläufe.

Zusammenfassend können wir feststellen: Durch die explizite Annahme einer Grundmenge Ω möglicher Weltabläufe und die Darstellung möglicher Fakten als Teilmengen von Ω lassen sich modale Begriffe behandeln, ohne dass hierzu eine modale oder eine intensionale Logik erforderlich ist. In dieser Weise lässt sich auch das Wissen von Subjekten über (kontingente) physikalische Fakten im Rahmen eines bestimmten physikalischen Modells darstellen. Aus diesem Grunde können wir unseren Überlegungen die extensionale Logik zugrunde legen und dennoch die Begriffe der Notwendigkeit, der Möglichkeit und der Wahrscheinlichkeit, sowie – in einem eingeschränkten Sinn – den Begriff des Wissens formal behandeln.

2. Klassisch logische und ontologisch realistische Theorien

Die empirische Basis unserer Theoriebildung besteht aus den (in einem allgemeinen Sinne) sichtbaren Fakten.

Jedes unmittelbar sichtbare Faktum ist ein positives Faktum. Negationen oder andere logische Kombinationen aus derartigen Fakten sind nicht unmittelbar sichtbar, sondern allenfalls aus gesehenen positiven Fakten mittels logischer oder physikalischer Gesetze erschließbar.

Hierzu ein Beispiel: Wenn wir einen leeren Tisch sehen, so können wir schließen, dass sich der Aschenbecher nicht darauf befindet. Solange wir nicht mit einer speziellen Fragestellung (zum Beispiel: Steht der Aschenbecher auf dem Tisch?) an die Situation herangehen, sehen wir nur den leeren Tisch (d.h. das "Vakuum" über der Tischplatte), wir sehen aber nicht, *was* hier abwesend ist. Was wir sehen können, sind stets nur positive Bilder der Welt.

Jedes beobachtete Faktum wird zu einem Zeitpunkt beobachtet. Was wir also sehen, sind stets zeitbezogene Ereignisse. Jedes derartige Ereignis besteht darin, dass das Universum zu einem Zeitpunkt t eine Eigenschaft A aufweist.

Wenn Q ein Objekt ist (z.B. ein Stuhl) und Q' ein Teilobjekt von Q (z.B. ein Stuhlbein), so ist jede Eigenschaft von Q' in kanonischer Weise auch eine Eigenschaft von Q . Da jedes Objekt Q seinerseits Teilobjekt des Universums V ist, kann jede Eigenschaft eines Objekts auch als eine Eigenschaft des Universums aufgefasst werden. Wir müssen uns also nur für die Eigenschaften des Universums interessieren.

Numerische Eigenschaften (z.B. der Ort x einer Kugel) lassen sich stets auf binäre Eigenschaften zurückführen. Zu einer numerischen Eigenschaft x können alle (binären) Eigenschaften der Form $x \in \Delta x$ gebildet werden. Die numerische Eigenschaft x kann ersetzt werden durch die Menge aller so gebildeten binären Eigenschaften. Physik ist demnach letztlich eine Theorie der binären Eigenschaften des Universums.

Jede Beobachtung liefert uns die Kenntnis, dass eine bestimmte (binäre) Eigenschaft A des Universums zu einem Zeitpunkt t zutrifft. Um dies formal darzustellen, definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \text{Menge der (binären) Eigenschaften des Universums} \\ T &:= \text{Zeitachse (mit } T \subset \mathbb{R}) \\ \mathcal{E} &:= \mathcal{U} \times T \\ &= \text{Menge der möglichen Ereignisse} \end{aligned}$$

Wir haben hiermit die klassische Zeittheorie (mit absoluter Zeit) formal dargestellt. Insbesondere geht diese Theorie davon aus, dass die möglichen Eigenschaften zu jedem Zeitpunkt dieselben sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir (aus praktischen Gründen) stets davon ausgehen, dass T mindestens das Element 0 enthält.

Um zu zeigen, wie man dies konkretisieren kann, geben wir hier ohne nähere Erläuterung zwei Beispiele für die Wahl von \mathcal{U} an:

1) Im Falle der klassischen Mechanik sei

$$Z := (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N \quad (\text{mit } N = \text{Anzahl der Teilchen})$$

der Phasenraum und

$$\mathcal{U} := \text{die Algebra der Borel'schen Teilmengen von } Z$$

2) Im Falle der Quantentheorie sei

$$\mathcal{H} := \text{der Hilbertraum des Universums und}$$

$$\mathcal{U} := \{ A \mid A \text{ ist abgeschlossener Unterraum von } \mathcal{H} \}$$

Die zentrale Aussage der realistischen Ontologie führen wir nun ein durch die Annahme, dass es sich bei einem Teil der möglichen Ereignisse um wirkliche Ereignisse handelt. Formal definieren wir dazu:

$$\omega_0 := \text{die Menge der wirklichen Ereignisse}$$

Es gilt dann:

$$\omega_0 \subset \mathcal{E}$$

Die Menge ω_0 stellt den tatsächlichen Weltablauf (die reale Welt) dar, entsprechend der Aussage Wittgensteins: "Die Welt ist alles, was der Fall ist."

Der Klarheit halber sind die physikalischen Gesetze einer Theorie präzise, d.h. in axiomatischer Weise zu formulieren. Eine Theorie wird demnach durch Axiome (Aussagen bzw. Mengen von Aussagen) angegeben. Es ist daher erforderlich, neben den Ereignissen auch Aussagen über Ereignisse formal zu modellieren. Dies soll nun geschehen.

Wir bilden neben $\omega_0 \subset \mathcal{E}$ die Menge *aller* möglichen Teilmengen von \mathcal{E} , also die Potenzmenge:

$$\Omega_0 := \wp(\mathcal{E})$$

Es ist dann $\omega_0 \in \Omega_0$. Ω_0 ist als die Menge aller möglichen Weltabläufe aufzufassen, und der tatsächliche Weltablauf ist einer davon.

Jedem Ereignis $(A,t) \in \mathcal{E}$ wird eine Teilmenge von Ω_0 zugeordnet durch

$$\langle A,t \rangle_0 := \{ \omega \in \Omega_0 \mid (A,t) \in \omega \}$$

$\langle A,t \rangle_0$ ist die Menge derjenigen Weltabläufe, in denen das Ereignis (A,t) auftritt. Sie entspricht dem möglichen Faktum (bzw. der Aussage), dass das Ereignis (A,t) eintritt. Für den Fall $t = 0$ schreiben wir auch:

$$\langle A \rangle_0 := \langle A,0 \rangle_0 \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{U})$$

Die Abbildung, welche jedes (A,t) auf $\langle A,t \rangle_o$ abbildet, ist injektiv und bettet \mathcal{E} ein in $\wp(\Omega_o)$, die Potenzmenge von Ω_o . Das Bild dieser Einbettung ist

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_o &:= \{ \langle A,t \rangle_o \mid (A,t) \in \mathcal{E} \} \\ &\subset \wp(\Omega_o)\end{aligned}$$

Aufgrund der Einbettung kann man jedes (A,t) mit $\langle A,t \rangle_o$ identifizieren und die $\langle A,t \rangle_o$ als die möglichen Ereignisse auffassen.

Es sei

$$\mathcal{A}_o := \mathcal{A}(\mathcal{R}_o)$$

die von \mathcal{R}_o auf Ω_o erzeugte σ -Algebra. \mathcal{A}_o beschreibt neben den in $\wp(\Omega_o)$ eingebetteten möglichen Ereignissen auch bestimmte logische Kombinationen aus solchen Ereignissen. Um dies deutlich zu machen, schreiben wir zu Elementen $A, B \in \mathcal{A}_o$:

$$\begin{aligned}A \wedge B &\text{ für } A \cap B \\ A \vee B &\text{ für } A \cup B \\ \neg A &\text{ für } \Omega_o \setminus A \\ A \rightarrow B &\text{ für } \neg A \vee B \\ A \leftrightarrow B &\text{ für } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\end{aligned}$$

sowie zu $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_o$:

$$\begin{aligned}\forall_j A_j &\text{ für } \bigcap_j A_j \\ \exists_j A_j &\text{ für } \bigcup_j A_j \\ \overset{1}{\exists}_j A_j &\text{ für } \exists_j [A_j \wedge \forall_{k \neq j} (\neg A_k)]\end{aligned}$$

usw.

\mathcal{A}_o kann verstanden werden als die Menge der möglichen Fakten. Ein Element $A \in \mathcal{A}_o$ ist wahr in einem Weltablauf ω , wenn gilt:

$$\omega \in A$$

Es ist schlechthin wahr bzw. "wirklich wahr", wenn gilt:

$$\omega_0 \in A$$

In jedem möglichen Weltablauf hat jedes mögliche Faktum, d.h. jede der hier betrachteten logischen Kombinationen aus möglichen Ereignissen, einen Wahrheitswert.

Bemerkung: \mathcal{A}_o ist die Menge der im Rahmen des Modells möglichen Fakten. Unter den Elementen von \mathcal{A}_o gibt es auch solche, die durch die später zu for-

mulierenden physikalischen Gesetze ausgeschlossen und somit (physikalisch) unmöglich sind. Möglichkeit im Sinne des *Modells* ist daher zu unterscheiden von *physikalischer* Möglichkeit.

Eine Theorie wird angegeben durch eine Menge von Axiomen. Jedes Axiom ist eine Aussage über mögliche Ereignisse; es entspricht einem Element von \mathcal{A}_0 . Ein Axiomensystem AX ist also einfach eine Teilmenge von \mathcal{A}_0 .

Die durch das Axiomensystem AX gegebene Theorie schränkt die möglichen Weltabläufe ein auf jene, in denen die zu AX gehörenden Axiome zutreffen. Hierzu bilden wir

$$\begin{aligned}\Omega_{AX} &:= \{ \omega \in \Omega_0 \mid \forall A \in AX \ \omega \in A \} \\ &= \bigcap_{A \in AX} A \\ &= \bigcap(AX)\end{aligned}$$

Ω_{AX} ist die Menge derjenigen Weltabläufe, die nach der durch AX gegebenen Theorie möglich sind, also die Menge der "physikalisch möglichen Welten".

Verschiedene Axiomensysteme können zu derselben Menge physikalisch möglicher Weltabläufe führen. Solche Systeme bezeichnen wir als äquivalent.

Ein mögliches Faktum $A \in \mathcal{A}_0$ ist physikalisch möglich nach der durch AX gegebenen Theorie, wenn es einen nach AX physikalisch möglichen Weltablauf ω gibt, in dem A wahr ist. Dies ergibt den (auf \mathcal{A}_0 definierten) Möglichkeitsoperator

$$\Diamond_{AX} A \quad :\Leftrightarrow \quad \Omega_{AX} \cap A \neq \emptyset$$

Eine wichtige Rolle spielt die Frage, welchen empirischen Gehalt eine durch ein Axiomensystem angegebene Theorie hat. Hierzu erinnern wir daran, dass sich nur mögliche Ereignisse, nicht aber logische Kombinationen aus solchen Ereignissen unmittelbar beobachten lassen.

Bemerkung: Wir unterscheiden zwischen den (unmittelbar beobachtbaren) möglichen Ereignissen einerseits und den nicht in dieser Weise beobachtbaren logischen Kombinationen aus derartigen Ereignissen andererseits. In einer ähnlichen Weise hatte Popper unterschieden zwischen Basissätzen und Allgemein-
aussagen. Letztere stellen logische Kombinationen von Einzelsätzen dar. Anders als Popper legen wir präzise fest, was im Kontext unserer physikalischen Modellierung des Universums unter einem Basissatz zu verstehen ist: Ein solcher Satz sagt aus, dass das Universum zu einem Zeitpunkt t eine bestimmte Eigenschaft A hat. Außerdem beziehen wir uns nicht nur auf eine bestimmte Form der logischen Kombination von Ereignissen (All-Aussagen), sondern auf alle logischen Kombinationen, die sich bilden lassen. Anders als Popper, der die Nichtbeobachtbarkeit von All-Aussagen mit der Tatsache begründet, dass eine solche Aussage unendlich viele Basissätze betrifft, gehen wir davon aus,

dass die unmittelbare Wahrnehmung nur positive "Bilder" der Welt liefert, während logische Kombinationen aus Ereignissen immer erst im Rahmen der Sprache und des sprachlichen Denkens ihren Platz haben.

Unter einem (möglichen) empirischen Material verstehen wir eine endliche Menge von möglichen Ereignissen. Das (empirische) Wissen eines Subjekts stellt ein solches empirisches Material dar. Die Menge aller möglichen empirischen Materialien ist formal:

$$\mathcal{M} := \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{E} \text{ und } \mathcal{B} \text{ endlich} \}$$

Auch \mathcal{M} kann in \mathcal{A}_0 eingebettet werden. Dazu wird das empirische Material

$$\mathcal{B} = \{(A_1, t_1), \dots, (A_k, t_k)\}$$

abgebildet auf das zugehörige mögliche Faktum

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}} &:= \langle A_1, t_1 \rangle_o \wedge \dots \wedge \langle A_k, t_k \rangle_o \\ &= \{ \omega \in \Omega_o \mid \forall_j (A_j, t_j) \in \omega \} \\ &= \{ \omega \in \Omega_o \mid \mathcal{B} \subset \omega \} \end{aligned}$$

$F_{\mathcal{B}}$ ist ein Element von \mathcal{A}_0 ; es entspricht der logischen Konjunktion der zu \mathcal{B} gehörenden Ereignisse. Für $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{M}$ gilt offenbar:

$$F_{\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'} = F_{\mathcal{B}} \wedge F_{\mathcal{B}'}$$

Das Bild der angegebenen Einbettung von \mathcal{M} in \mathcal{A}_0 ist

$$\mathcal{F} := \{ F_{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{M} \}$$

Wenn man jedes empirische Material mit seinem Bild in \mathcal{A}_0 identifiziert, kann man die Elemente von \mathcal{F} auch selbst als die möglichen empirischen Materialien ansehen.

In Anlehnung an Popper definieren wir den empirischen Gehalt der durch AX gegebenen Theorie als

$$\text{EMP}_{AX} := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M} \mid \neg \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

d.h. als die Menge der möglichen empirischen Materialien, durch die die Theorie falsifiziert würde.

Mit dem durch

$$\Box_{AX} A := \Leftrightarrow \neg \Diamond_{AX}(\neg A) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

definierten Notwendigkeitsoperator wird der logische Gehalt der Theorie definiert als

$$\text{LOG}_{AX} := \{ A \in \mathcal{A}_0 \mid \Box_{AX} A \}$$

d.h. als die Menge der aus den Axiomen der Theorie notwendig folgenden möglichen Fakten. Zwischen dem so definierten empirischen und logischen Gehalt besteht die einfache Beziehung:

$$\mathcal{B} \in \text{EMP}_{AX} \Leftrightarrow (\neg F_{\mathcal{B}}) \in \text{LOG}_{AX} \quad (\text{für } \mathcal{B} \in \mathcal{M})$$

Bemerkung: Der logische Gehalt der durch das Axiomensystem AX angegebenen Theorie wird durch den Operator \diamond_{AX} auf \mathcal{A}_0 beschrieben. Der empirische Gehalt entspricht hingegen der Beschränkung von \diamond_{AX} auf die möglichen empirischen Materialien, also auf die Teilmenge \mathcal{F} von \mathcal{A}_0 . Sie beschreibt, wann ein empirisches Material gemäß der durch das Axiomensystem AX gegebenen Theorie möglich ist.

Es ist möglich, dass zwei verschiedene Axiomensysteme AX und AX' zwar verschiedene Mengen Ω_{AX} und $\Omega_{AX'}$ festlegen und somit einen unterschiedlichen logischen Gehalt haben, dass sie aber dennoch denselben empirischen Gehalt aufweisen. Wir werden hierfür später – im Rahmen der klassischen Mechanik – ein Beispiel diskutieren.

In der Praxis interessiert man sich typischerweise für die folgende Frage: Wenn ein bestimmtes (empirisches) Vorwissen \mathcal{B} gegeben ist, ist es dann möglich, dass gewisse zusätzliche Ereignisse \mathcal{B}' eintreten? Dies ist genau dann der Fall, wenn das empirische Material $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ durch die Theorie nicht ausgeschlossen ist. Man kann hierzu bedingte Möglichkeitsoperatoren einführen:

$$\diamond_{AX}(A|B) \quad :\Leftrightarrow \quad \diamond_{AX}(A \wedge B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A}_0)$$

$$\diamond_{\text{emp}, AX}(\mathcal{B}'|\mathcal{B}) \quad :\Leftrightarrow \quad \diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}'}|F_{\mathcal{B}}) \quad (\text{für } \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{M})$$

Was hier entwickelt wurde, ist ein allgemeines wissenschaftstheoretisches Konzept für Theorien, die

- der klassischen Logik,
- dem ontologischen Realismus und
- der klassischen (absoluten) Zeitvorstellung

entsprechen. Im folgenden Kapitel wollen wir dieses Konzept zunächst auf die klassische Mechanik anwenden.

Anmerkung 1

Die bei der Definition von $\forall_j A_j$ und Ω_{AX} auftretenden \cap -Terme sind so zu verstehen, dass der Durchschnitt in Ω_0 gebildet wird. Für eine leere Index-

menge $J = \emptyset$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}\bigvee_{j \in J} A_j &= \bigcap_{j \in J} A_j \\ &= \Omega_0\end{aligned}$$

Ist $AX = \emptyset$, so wird

$$\begin{aligned}\Omega_{AX} &= \bigcap (AX) \\ &= \Omega_0\end{aligned}$$

Für das leere empirische Material $\emptyset \in \mathcal{M}$ erhalten wir ebenso:

$$F_{\emptyset} = \Omega_0$$

Anmerkung 2

Ein Axiomensystem AX ist genau dann logisch inkonsistent, wenn $\Omega_{AX} = \emptyset$ ist. Im allgemeinen ist $\text{EMP}_{AX} \subset \mathcal{M}$. Das System AX ist genau dann logisch inkonsistent, wenn $\text{EMP}_{AX} = \mathcal{M}$ ist, das heißt, wenn AX den maximal möglichen empirischen Gehalt hat. In diesem Fall steht schon das leere empirische Material im Widerspruch zu der durch AX gegebenen Theorie.

3. Klassische Mechanik

Wie bereits erwähnt, definieren wir für den Fall der klassischen Mechanik den Phasenraum

$$\begin{aligned} Z &:= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^N \\ &= \mathbb{R}^{6N} \end{aligned}$$

wobei N die Anzahl der im Universum vorhandenen Teilchen bezeichnet und jedes Teilchen durch drei Orts- und drei Impulskoordinaten beschrieben wird. Hierzu sei

$\mathcal{U} :=$ die Algebra der Borel'schen Teilmengen von Z

Jede Eigenschaft des Universums wird somit durch eine Teilmenge des Phasenraums dargestellt. Wir wählen als \mathcal{U} nicht die ganze Potenzmenge von Z , da dies später zu maßtheoretischen Problemen führen würde.

Wie im allgemeinen Konzept werden gebildet:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \mathcal{U} \times T && \text{(die Menge der möglichen Ereignisse)} \\ \Omega_0 &:= \wp(\mathcal{E}) && \text{(die Menge der möglichen Weltabläufe)} \end{aligned}$$

Innerhalb von Ω_0 müssen nun die physikalisch möglichen Weltabläufe ausgezeichnet werden.

Das Bewegungsgesetz der klassischen Mechanik ist deterministisch, reversibel und stationär. Es kann beschrieben werden durch eine Familie von Abbildungen

$$\beta_t : Z \rightarrow Z \quad (\text{für } t \in T)$$

Dabei stellt β_t den Übergang des Zustands vom Zeitpunkt 0 zum Zeitpunkt t dar. Aus der Reversibilität des Bewegungsgesetzes folgt, dass β_t bijektiv ist. Die Abbildung

$$\beta_{t,t'} := \beta_t \circ (\beta_{t'})^{-1} \quad (\text{für } t, t' \in T)$$

stellt den Übergang des Zustands von t nach t' dar. Die Stationarität des Bewegungsgesetzes, d.h. die Invarianz gegenüber zeitlichen Verschiebungen, wird durch die Gleichung

$$\beta_{t+\Delta, t'+\Delta} = \beta_{t, t'} \quad (\text{für } t, t' \in T \text{ mit } t+\Delta, t'+\Delta \in T)$$

beschrieben. Auf die Tatsache, dass das Bewegungsgesetz auch in Form einer Differentialgleichung ausgedrückt werden kann, kommt es hier nicht an.

Unter einem Pfad ist eine Abbildung p von der Zeitachse in den Phasenraum zu verstehen. Die Menge dieser Pfade ist

$$\text{Pf} := \{ p \mid p : T \rightarrow Z \}$$

Jedem Pfad $p \in \text{Pf}$ lässt sich in kanonischer Weise ein möglicher Weltablauf $\omega_p \in \Omega_0$ zuordnen durch

$$\omega_p := \{ (A,t) \in \mathcal{E} \mid p(t) \in A \}$$

Innerhalb der Pfade lassen sich diejenigen Pfade auszeichnen, die dem Bewegungsgesetz entsprechen:

$$\text{Pf}_\beta := \{ p \in \text{Pf} \mid \forall_{t \in T} p(t) = \beta_t(p(0)) \}$$

Damit kann die Menge der physikalisch möglichen Weltabläufe gebildet werden:

$$\Omega := \{ \omega_p \mid p \in \text{Pf}_\beta \}$$

Anders als im allgemeinen Konzept vorgesehen wurde Ω hier nicht über eine Menge von Axiomen $AX \subset \mathcal{A}_0$ definiert. Es ist aber möglich, dieselbe Menge Ω auch über ein solches Axiomensystem AX festzulegen. Dies soll nun geschehen.

Zu $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$ drückt der Term

$$\langle A,0 \rangle_0 \leftrightarrow \langle \beta_t A, t \rangle_0$$

die Gültigkeit des Bewegungsgesetzes aus. Dabei ist

$$\beta_t A := \{ \beta_t(z) \mid z \in A \}$$

für $A \in \mathcal{U}$. Es sei

$$\text{BG} := \{ \langle A,0 \rangle_0 \leftrightarrow \langle \beta_t A, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{U} \wedge t \in T \}$$

Dies ist eine Teilmenge von \mathcal{A}_0 und somit ein Axiom (genau genommen ein "Axiomenschema"). Es drückt die allgemeine Gültigkeit des Bewegungsgesetzes aus.

Als weitere Axiome definieren wir:

$$\text{MON} := \{ \langle A,t \rangle_0 \rightarrow \langle B,t \rangle_0 \mid A,B \in \mathcal{U} \wedge t \in T \wedge A \subset B \}$$

$$\text{SEC} := \{ \neg(\forall_j \langle A_j, t \rangle_0) \mid A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U} \wedge t \in T \wedge \bigcap_j A_j = \emptyset \}$$

$$\text{NEG} := \{ \langle A,t \rangle_0 \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{U} \wedge t \in T \}$$

Das Axiom MON besagt: Wenn A Teilmenge von B ist und wenn das Universum zur Zeit t die Eigenschaft A hat, so hat es auch die Eigenschaft B (Monotonieprinzip).

Das Axiom SEC besagt: Das Universum kann nicht zugleich die (abzählbar vielen) Eigenschaften A_j haben, wenn der mengentheoretische Durchschnitt der A_j leer ist (Ausschlussprinzip).

Das Axiom NEG besagt: Das Universum hat zur Zeit t stets entweder die Eigenschaft A oder die komplementäre Eigenschaft $\neg A$ (Negationsprinzip). Das Negationsprinzip kann auch als "physikalische tertium non datur" bezeichnet werden.

Das gesamte Axiomensystem wird definiert als

$$AX := BG \cup MON \cup SEC \cup NEG$$

Es ist $AX \subset \mathcal{A}_0$ und hierzu sei (wie im allgemeinen Konzept)

$$\Omega_{AX} := \bigcap (AX)$$

Dies ist die Menge der nach dem Axiomensystem AX möglichen Weltabläufe.

Man kann rein formal beweisen, dass gilt:

$$\Omega = \Omega_{AX} \quad (\text{vgl. T.3.1})$$

Dies zeigt die Äquivalenz dieses axiomatischen Ansatzes mit dem zuvor angegebenen Pfadkonzept.

Durch Ω wird der Möglichkeitsoperator auf \mathcal{A}_0 festgelegt:

$$\diamond_{AX}(A) := \Leftrightarrow \Omega \cap A \neq \emptyset$$

Wie zuvor wird der empirische Gehalt der Theorie definiert als die Menge der möglichen empirischen Materialien, die in der durch AX gegebenen Theorie physikalisch unmöglich sind, d.h. als

$$EMP_{AX} := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M} \mid \neg \diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

Bemerkenswert ist die folgende Tatsache: Wenn man das Axiom NEG weglässt und definiert:

$$AX' := BG \cup MON \cup SEC$$

so erhält man zwar eine echt größere Menge möglicher Weltabläufe:

$$\Omega_{AX'} \neq \Omega_{AX}$$

jedoch gilt die Gleichung

$$EMP_{AX'} = EMP_{AX} \quad (\text{vgl. T.3.2})$$

Die Aufgabe des Axioms NEG führt demnach nicht zu einer Veränderung (d.h. einer Verringerung) des empirischen Gehalts der Theorie.

Fassen wir zusammen: Die klassische Mechanik kann in der bekannten Weise über "Pfade im Phasenraum" beschrieben werden. Diese Theorie ist völlig gleichwertig zu der Theorie, die durch die Axiome BG, MON, SEC und NEG angegeben wird. Beide Theorien sind daher auch empirisch gleichwertig. Man

kann dann das Axiom NEG weglassen, ohne den empirischen Gehalt der Theorie zu verändern. Demnach hat die klassische Mechanik denselben empirischen Gehalt wie die durch die Axiome BG, MON und SEC angegebene Theorie.

Wir kommen somit zu der Feststellung: Das Axiom NEG trägt in der klassischen Mechanik zum empirischen Gehalt der Theorie nichts bei. Mit anderen Worten: Das physikalische "tertium non datur" ist in der klassischen Physik empirisch überflüssig.

Die durch das Axiomensystem AX angegebene Theorie wollen wir als "starke" klassische Theorie bezeichnen. Sie ist vollkommen äquivalent zu der herkömmlichen klassischen Theorie. Die durch AX' angegebene Theorie bezeichnen wir hingegen als "schwache" klassische Theorie. Sie entsteht aus der starken Theorie, indem das physikalische "tertium non datur" als Axiom weggelassen wird. Beide Theorien haben denselben empirischen Gehalt.

Wir diskutieren nun noch die Frage, welche Rolle das Axiom NEG spielt. Die zu NEG gehörende Aussage

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_0$$

kann als das physikalische "tertium non datur" zu dem Ereignis (A, t) bezeichnet werden. Sie ist streng zu unterscheiden vom logischen "tertium non datur":

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \neg \langle A, t \rangle_0$$

Eine Aufgabe des Axioms NEG bedeutet daher keine Abkehr von der klassischen Logik.

Um die Bedeutung des physikalischen "tertium non datur" näher zu beleuchten, betrachten wir das Konzept der Observablen für den Fall der klassischen Mechanik. Eine Observable entspricht in diesem Fall einer Abbildung

$$L : Z \rightarrow \mathbb{R}$$

Diese Abbildung muss Borel-messbar sein, d.h. zu jeder Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$ muss

$$L^{-1}(B) := \{ z \in Z \mid L(z) \in B \}$$

eine Borelmenge von Z , also ein Element von \mathcal{U} sein.

Eine solche Observable L hat in einem physikalisch möglichen Weltablauf $\omega \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t \in T$ den Wert $r \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$(L^{-1}(r), t) \in \omega$$

Das Axiom SEC garantiert, dass jede Observable L (im Weltablauf $\omega \in \Omega$) zur Zeit t *höchstens* einen Wert hat: Für $r \neq r'$ ist

$$L^{-1}(r) \cap L^{-1}(r') = \emptyset$$

und wegen SEC (genauer: wegen $SEC \subset AX$) gilt dann

$$\omega \in \neg ((L^{-1}(r), t)_0 \wedge (L^{-1}(r'), t)_0)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\neg [(L^{-1}(r),t) \in \omega \wedge (L^{-1}(r'),t) \in \omega]$$

Dies besagt, dass die Observable L nicht zugleich die Werte r und r' hat.

Im Axiomensystem AX ist darüber hinaus garantiert, dass jede Observable stets *genau* einen Wert hat: Jeder mögliche Weltablauf $\omega \in \Omega_{AX}$ entspricht (wegen $\Omega_{AX} = \Omega$) einem Pfad p im Phasenraum, und der Wert der Observablen L wird hierdurch festgelegt als:

$$L(p(t))$$

Gibt man das physikalische "tertium non datur" (also das Axiom NEG) auf, so gilt dies nicht mehr. Die wesentliche Rolle dieses Axioms liegt darin sicherzustellen, dass jede Observable zu jeder Zeit mindestens (und damit genau) einen Wert hat. Durch das physikalische "tertium non datur" wird die "Wertbestimmtheit" (value definiteness) der physikalischen Größen garantiert.

Bemerkung: Bereits dann, wenn nur die Axiome MON und SEC vorausgesetzt werden, ist die Annahme der allgemeinen Wertbestimmtheit äquivalent zu der Annahme des physikalischen "tertium non datur". Das Bewegungsgesetz wird hierfür nicht benötigt.

Die Aufgabe des physikalischen "tertium non datur" bedeutet im Kern die Aufgabe der Vorstellung, dass die Welt über numerische Größen (wie z.B. Ort und Impuls) zu beschreiben ist. Man kann sagen, dass damit das numerische Weltbild oder der numerische Realismus aufgegeben wird. Zugleich wird damit aber auch der Atomismus aufgegeben: Die Vorstellung von "Atomen", d.h. von unteilbaren Objekten, ist daran gebunden, dass jedes Atom stets "lokal" ist, dass die Observable "Ort" also stets einen Wert hat.

Nicht aufgegeben wird hierbei allerdings der Ereignis-Realismus, demzufolge ein Teil der möglichen Ereignisse \mathcal{E} wirkliche Ereignisse sind. An die Stelle der Wertbestimmtheit der numerischen Observablen tritt die Wahrheitswert-Bestimmtheit (truth value definiteness) der möglichen Ereignisse.

Zu den möglichen Ereignissen gehört auch das Ereignis

$$(L^{-1}(\Delta L),t) \quad (\text{mit } \Delta L \subset \mathbb{R} \text{ und } t \in T)$$

Es entspricht der Aussage:

"Zur Zeit t liegt L im Intervall ΔL "

Auf diese Weise spielen die numerischen Observablen auch dann eine Rolle, wenn das physikalische "tertium non datur" und damit die allgemeine Wertbestimmtheit der Observablen aufgegeben wird.

Bemerkung: Die Aussage

"Zur Zeit t liegt L im Intervall ΔL "

darf hier nicht so verstanden werden, dass die durch die messbare Abbildung

$$L : Z \rightarrow \mathbb{R}$$

dargestellte physikalische Größe einen bestimmten Wert r hat, der im Intervall ΔL liegt. In der schwachen klassischen Theorie hat eine Observable nicht den Charakter einer stets wertbestimmten Größe. Sie ist vielmehr aufzufassen als eine parametrisierte Familie von Eigenschaften des Universums mit ΔL als Parameter. Konkret wird durch L jedem reellen Intervall ΔL die durch $L \in \Delta L$ angegebene Eigenschaft zugeordnet, d.h. die Eigenschaft $L^{-1}(\Delta L) \in \mathcal{U}$. Die obige Aussage ist dann so zu verstehen, dass diese Eigenschaft zur Zeit t gegeben ist.

Die Aufgabe der Aussage NEG als Axiom bedeutet nicht, dass eine Aussage der Form

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_0$$

nun generell unzutreffend wäre. Es handelt sich hierbei dann lediglich um eine "kontingente" Aussage, d.h. um eine Aussage, die in einer konkreten Situation entweder zutreffen kann oder auch nicht. Dass die Aussage im Einzelfall zutrifft, kann mitunter empirisch beobachtet werden. Wenn ein Ereignis $(B, s) \in \mathcal{E}$ beobachtet wurde, für das entweder

$$\beta_{s,t}(B) \subset A$$

oder

$$\beta_{s,t}(B) \subset Z \setminus A$$

gilt, so wurde damit zugleich auch die Gültigkeit der Einzelaussage

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_0$$

empirisch festgestellt.

Ähnliches gilt für die Beobachtung des Wertes einer Observablen. Wenn man ein Ereignis (B, s) beobachtet, für welches gilt:

$$\beta_{s,t}(B) \subset L^{-1}(r) \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R})$$

so hat man empirisch festgestellt, dass die Observable L zum Zeitpunkt t den Wert r hat. Dies ist ein rein logischer Zusammenhang. Durch die Beobachtung wird nicht erst bewirkt, dass die Observable einen Wert erhält, den sie sonst nicht gehabt hätte. Folge der Beobachtung ist nur, dass der Beobachter nun weiß, dass die Observable in diesem Fall einen Wert hat.

Bemerkung: In der Praxis lässt sich ein einzelner Wert $r \in \mathbb{R}$ im allgemeinen nur dann präzise beobachten, wenn es sich um eine Observable mit diskretem Wertebereich handelt.

Die Annahme der *allgemeinen* Gültigkeit des physikalischen "tertium non datur" (d.h. des Axioms NEG), und damit die Annahme des numerischen Realismus einschließlich des Atomismus, kann auch durch eine große Anzahl empirischer Beobachtungen nicht begründet werden. Hier handelt es sich um das bekannte "Induktionsproblem". Allenfalls könnte man behaupten, diese Annahme hätte sich in der Praxis stets bewährt.

Dem ist entgegenzuhalten, dass dies nur solange zutrifft, wie sich die klassische Mechanik insgesamt – und zwar als eine allgemeingültige Theorie des Universums – bewährt hat. Diese Theorie ist jedoch durch die Experimente zum Verhalten der Elementarteilchen empirisch widerlegt worden. Zu dieser Widerlegung kam es, sobald man versucht hat, die "Bahnen" der im Modell der klassischen Mechanik angenommenen Elementarteilchen tatsächlich zu beobachten, etwa bei Experimenten am Doppelspalt.

4. Quantenmechanik und das Kochen-Specker-Theorem

Die Quantenmechanik handelt – ebenso wie die klassische Mechanik – vom Universum und seinen Eigenschaften. Genau genommen geht es hierbei um das *Modelluniversum* der Quantenmechanik. Das wirkliche Universum unterscheidet sich hiervon, weil darin auch Felder eine Rolle spielen und weil es außerdem allgemein relativistisch ist.

Bemerkung: In diesem und den folgenden Kapiteln diskutieren wir zunächst nur die Quantenmechanik, als einfachste Form einer Quantentheorie. Wenn wir hierbei von "Quantentheorie" sprechen, so ist damit zunächst nur die Quantenmechanik gemeint. In den späteren Kapiteln über die Quantenfeldtheorie (QFT) werden wir dann auf die Frage eingehen, ob und gegebenenfalls wie alle hier angestellten Überlegungen auch auf den Fall der QFT angewendet werden können.

Praktisch kann man sich unter dem quantenmechanischen Modelluniversum einen Ausschnitt des wirklichen Universums vorstellen, in dem weder Felder noch die Gesetze der Relativitätstheorie eine Rolle spielen. Man muss sich ein großes, abgeschlossenes, rein mechanisches System vorstellen, in dem alle Subjekte, die möglicherweise eine vorhandene Eigenschaft dieses Systems beobachten können, selbst enthalten sind. Wechselwirkungen "von außen" (auch Messungen oder Beobachtungen) sind ausgeschlossen; anderenfalls wäre das System nicht wirklich abgeschlossen.

Mit \mathcal{H} bezeichnen wir den Hilbertraum dieses Universums. \mathcal{H} ist das Tensorprodukt der Hilberträume aller im Universum enthaltenen Quanten. Es handelt sich hierbei um einen separablen Hilbertraum, d.h. es gibt in \mathcal{H} eine abzählbare oder endliche Orthonormalbasis.

Wenn A ein topologisch abgeschlossener, linearer Unterraum von \mathcal{H} ist, so schreiben wir kurz:

$$A < \mathcal{H}$$

Mit π_A bezeichnen wir in diesem Fall den Projektionsoperator auf A .

Jede (binäre) Eigenschaft des Universums entspricht einem solchen Unterraum, d.h. wir setzen:

$$\mathcal{U} := \{ A \mid A < \mathcal{H} \}$$

und bilden wie zuvor

$$\mathcal{E} := \mathcal{U} \times T \quad (\text{mögliche Ereignisse})$$

$$\Omega_0 := \wp(\mathcal{E}) \quad (\text{mögliche Weltabläufe})$$

usw.

Zu jedem Hilbertraum \mathcal{H} lässt sich rein algebraisch die Menge der Subsysteme definieren (siehe dazu T.4.1 bis T.4.9). Man geht dabei aus von den möglichen Zerlegungen des Hilbertraums in Tensorfaktoren

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

wobei \cong die Hilbertraum-Isomorphie bezeichnet. Der jeweils erste Faktor einer solchen Zerlegung stellt ein Subsystem dar. (Genau genommen ist ein Subsystem eine Äquivalenzklasse derartiger Tensorfaktoren.) Mit SUB bezeichnen wir die Menge aller dieser Subsysteme.

Zu der Menge der Subsysteme kann man in kanonischer Weise definieren:

- eine Teilsystem-Relation " \leq " auf SUB
- ein maximales Element V bezüglich dieser Relation
- das komplementäre System Q^- zu jedem $Q \in \text{SUB}$
- die Zusammenfügung $Q + Q'$ zweier disjunkter Subsysteme (zwei Subsysteme Q, Q' sind disjunkt, wenn gilt: $Q' \leq Q^-$)
- den Hilbertraum \mathcal{H}_Q des Subsystems Q

Sind Q und Q' zwei disjunkte Subsysteme, so gilt:

$$\mathcal{H}_{Q+Q'} \cong \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q'}$$

Beispielsweise sind Q und Q^- disjunkte Subsysteme und es gilt

$$Q + Q^- = V$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-} &\cong \mathcal{H}_V \\ &\cong \mathcal{H} \end{aligned}$$

Der physikalische Sinn der Subsysteme liegt darin, dass man jedes Teilobjekt des Universums durch ein solches Subsystem darstellen kann. Das maximale Subsystem V stellt in diesem Sinne das ganze Universum dar. Zwei Objekte, von denen das erste ein Teilobjekt des zweiten ist, lassen sich durch Subsysteme Q und Q' mit $Q \leq Q'$ darstellen. Wird ein Objekt durch ein Subsystem Q dargestellt, so stellt Q^- den "Rest der Welt" dar.

Quanten sind spezielle Subsysteme. Sie unterscheiden sich von den übrigen Subsystemen dadurch, dass sie bei der Konstruktion des Hamiltonoperators eine besondere Rolle spielen: Auf ihren Hilberträumen sind Orts-, Impuls- und Spin-Operatoren definiert, die den Hamiltonoperator auf \mathcal{H} festlegen. Die Quanten sind – als Subsysteme – paarweise disjunkt, und ihre Zusammen-

fügung ergibt das gesamte Universum. Demnach entspricht der Hilbertraum des Universums dem Tensorprodukt aus den Hilberträumen der einzelnen Quanten.

Nicht jedes physikalisch relevante Subsystem ist ein Quant oder aus Quanten zusammengesetzt: Z.B. stellt auch die x-Bewegungsrichtung (und ebenso der Spin) eines Quants ein Subsystem dar.

Wird ein Objekt durch ein Subsystem Q dargestellt, so entspricht jede (binäre) Eigenschaft des Objekts einem Unterraum von \mathcal{H}_Q . Wir definieren daher:

$$\mathcal{U}_Q := \{ A' \mid A' < \mathcal{H}_Q \}$$

Der Tatsache entsprechend, dass man jede Eigenschaft eines Objekts auch als eine Eigenschaft des Universums auffassen kann, definieren wir die kanonische (injektive) Einbettung

$$\alpha_Q : \mathcal{U}_Q \rightarrow \mathcal{U}$$

durch

$$\alpha_Q(A') := A' \otimes \mathcal{H}_{Q^c} \quad (\text{für alle } A' \in \mathcal{U}_Q)$$

Wir übertragen nun die Axiome der klassischen Mechanik auf die Quantentheorie. Mit H bezeichnen wir den Hamiltonoperator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} des Universums und definieren in der üblichen Weise die unitären Operatoren

$$U_t := e^{-itH/\hbar} \quad (\text{für } t \in \mathbb{R})$$

Für diese Operatoren gilt

$$U_{t+t'} = U_t U_{t'} \quad (\text{für } t, t' \in \mathbb{R})$$

Da das Universum ein abgeschlossenes System ist, an dem folglich keine "Messungen" von außen stattfinden können, gilt die Schrödingergleichung hierfür uneingeschränkt. Dementsprechend definieren wir:

$$SG := \{ \langle A, 0 \rangle_0 \leftrightarrow \langle U_t A, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{U} \wedge t \in T \}$$

SG stellt, ebenso wie BG in der klassischen Mechanik, ein deterministisches, reversibles und stationäres Bewegungsgesetz dar.

Es ist davon auszugehen, dass das Universum auch das einzige wirklich vollkommen abgeschlossene System ist. Für jedes echte Subsystem kann allenfalls unter bestimmten Bedingungen eine angenäherte Schrödingergleichung gelten.

Das Axiom der Monotonie kann analog zum Fall der klassischen Mechanik definiert werden als:

$$MON := \{ \langle A, t \rangle_0 \rightarrow \langle B, t \rangle_0 \mid A, B \in \mathcal{U} \wedge t \in T \wedge A < B \}$$

Das Ausschlussprinzip kann nur auf den Fall "vertauschbarer" Eigenschaften bezogen werden. Wir nennen zwei Eigenschaften $A, B \in \mathcal{U}$ vertauschbar, wenn die entsprechenden Projektionsoperatoren vertauschbar sind, wenn also gilt:

$$\pi_A \pi_B = \pi_B \pi_A$$

Dazu definieren wir

$$\mathcal{C} := \{ (A_1, A_2, \dots) \mid A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U} \text{ und } \forall_j \forall_k [A_j, A_k \text{ vertauschbar}] \}$$

als die Menge aller Folgen aus paarweise vertauschbaren Eigenschaften. Es sei nun:

$$\text{SEC} := \{ \neg(\forall_j \langle A_j, t \rangle_0) \mid (A_1, A_2, \dots) \in \mathcal{C} \wedge t \in T \wedge \bigcap_j A_j = 0 \}$$

Dieses Axiom besagt: Wenn die Eigenschaften A_j paarweise vertauschbar sind und ihr Durchschnitt der Nullraum ist, so kann das Universum nicht alle diese Eigenschaften zur gleichen Zeit aufweisen.

Das physikalische "tertium non datur" ist ganz analog zur klassischen Mechanik zu formulieren:

$$\text{NEG} := \{ \langle A, t \rangle_0 \vee \langle A^\perp, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{U} \wedge t \in T \}$$

Dabei wird in der Quantentheorie anstelle des Mengenkplements das orthogonale Komplement verwendet.

Die angegebenen Axiome sind Teilmengen von \mathcal{A}_0 und wir können bilden:

$$\text{AX}_1 := \text{SG} \cup \text{MON} \cup \text{SEC} \cup \text{NEG}$$

sowie

$$\Omega_1 := \bigcap (\text{AX}_1)$$

Hier stellt sich nun heraus, dass die angegebenen Axiome logisch inkonsistent sind. Es lässt sich nämlich rein formal zeigen, dass Ω_1 die leere Menge ist (vgl. T.4.11). Dies ist gewissermaßen das zentrale No-Go-Theorem der Quantenmechanik, soweit es um die deterministischen, d.h. die nicht probabilistischen Gesetze geht. Es steht in einem engen Zusammenhang mit dem bekannten Kochen-Specker-Theorem.

Um das Problem zu lösen, müssen wir das Axiomensystem so abschwächen, dass es konsistent wird, aber dabei den empirischen Gehalt der Quantenmechanik beibehalten. Wie wir gezeigt haben, trägt das physikalische "tertium non datur" (d.h. das Axiom NEG) in der klassischen Mechanik nichts zum empirischen Gehalt der Theorie bei. Deshalb ist es naheliegend, dieses Axiom in der Quantenmechanik ganz wegzulassen. In diesem Sinne definieren wir:

$$\text{AX} := \text{SG} \cup \text{MON} \cup \text{SEC}$$

$$\Omega := \bigcap (\text{AX})$$

Es lässt sich zeigen, dass Ω nicht leer und somit das Axiomensystem AX logisch konsistent ist (siehe dazu T.4.12).

Wir haben damit die deterministischen (d.h. die nicht probabilistischen) Gesetze der Quantenmechanik vollständig angegeben und wollen im folgenden Kapitel diskutieren, welche Konsequenzen die Aufgabe des physikalischen "tertium non datur" hat.

Anmerkung 1

Zwei Unterräume A und B von \mathcal{H} stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sie miteinander vertauschbar sind und wenn für sie gilt: $A \cap B = 0$.

Damit lässt sich der Begriff der Orthogonalität auf mehrere Unterräume A_1, A_2, \dots von \mathcal{H} verallgemeinern. Hierzu definieren wir:

$$\perp_j A_j \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{die } A_j \text{ sind paarweise miteinander vertauschbar} \\ \text{und es gilt } \bigcap_j A_j = 0 \end{array}$$

Dabei kann A_1, A_2, \dots eine endliche oder eine unendliche Folge von Unterräumen sein.

Wenn $\perp_j A_j$ gilt, so bezeichnen wir die Unterräume A_1, A_2, \dots als "gemeinsam orthogonal". Im Falle zweier Unterräume steht dies für die einfache Beziehung $A_1 \perp A_2$.

Für den Fall der klassischen Mechanik kann man dieselbe Schreibweise verwenden, indem man für eine beliebige Folge von Eigenschaften $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$ definiert:

$$\perp_j A_j \quad :\Leftrightarrow \quad \bigcap_j A_j = \emptyset$$

Mit dieser Schreibweise lässt sich das Axiom SEC in einheitlicher Weise sowohl für die Quantentheorie als auch für die klassische Mechanik definieren als:

$$\text{SEC} := \{ \neg \forall_j \langle A_j, t \rangle_0 \mid t \in T \wedge A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U} \wedge \perp_j A_j \}$$

Im Falle der Quantentheorie stellt das Axiom SEC eine Verallgemeinerung der Aussage dar, dass für $A, B \in \mathcal{U}$ mit $A \perp B$ niemals A und B zugleich gegeben sein können.

Anmerkung 2

Im Falle der klassischen Physik entspricht jeder Zustand z (d.h. jedes Element des Phasenraums) einer Abbildung

$$z' : \mathcal{U} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

die durch die Beziehung

$$z'(A) = \text{wahr} \quad :\Leftrightarrow \quad z \in A$$

gegeben ist und dem Monotonieprinzip, dem Ausschlussprinzip sowie dem physikalischen "tertium non datur" genügt. Da ein klassischer Zustand jede Eigenschaft eindeutig festlegt, können wir ihn auch als "deterministischen Zustand" bezeichnen.

In demselben Sinne ist in der Quantentheorie ein "deterministischer Zustand" eine Abbildung, die jedem Unterraum des Hilbertraums des Universums einen Wahrheitswert zuordnet, und zwar so, dass das Monotonieprinzip ebenso wie das Ausschlussprinzip erfüllt ist. Der (deterministische) Zustandsraum der Quantentheorie ist dann definiert als die Menge aller derartigen Abbildungen. Ein deterministischer Zustand z ist hier also eine spezielle Abbildung

$$z : \mathcal{U} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

Die Bewegung dieses deterministischen Zustands wird durch die Schrödingergleichung beschrieben. Konkret gilt für alle $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$:

$$z_t(A) = z_0(U_{-t}A)$$

wobei z_t den Zustand zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Anmerkung 3

Der Begriff "deterministisch" wird hier in einem mehrfachen Sinn verwendet. Zum einen werden jene Axiome, die nicht probabilistisch sind, als "deterministisch" bezeichnet. Zum andern geht es um ein Bewegungsgesetz, welches einen deterministischen Zusammenhang über die Zeit hinweg beschreibt. Letzteres bedeutet, dass durch die Gesamtheit der (Wahrheits-) Werte aller Eigenschaften zu einem einzelnen Zeitpunkt die (Wahrheits-) Werte sämtlicher Eigenschaften zu jedem anderen Zeitpunkt eindeutig festgelegt sind. Zum dritten bezeichnen wir jenen Zustand als deterministisch, durch den alle Eigenschaften des Universums zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig gegeben sind. Aus dem Zusammenhang ist stets zu erkennen, in welchem Sinn der Begriff "deterministisch" gemeint ist, und es ist daher keine Verwechslung zu befürchten.

Anmerkung 4

Wir haben im letzten Kapitel unterschieden zwischen einer starken und einer schwachen klassischen Theorie. Die schwache Theorie entsteht aus der starken, indem man auf das physikalische "tertium non datur" verzichtet. Dieselben Begriffe lassen sich auch auf die Quantentheorie anwenden. Hierfür gilt dann: Die starke Theorie ist logisch inkonsistent und es bleibt nur die Möglichkeit, sich auf die schwache Theorie zu beschränken. Mit anderen Worten: Die Quantentheorie ist notwendigerweise eine schwache Theorie im hier diskutierten Sinn.

Anmerkung 5

Man kann leicht zeigen, dass das Axiom MON unmittelbar aus den Axiomen SEC und NEG ableitbar ist. Dies gilt für die klassische Theorie ebenso wie für die Quantentheorie. Der Grund, warum wir das Axiom MON dennoch als eigenständiges Axiom angeben, liegt darin, dass die Abschwächung der Theorie dann einfach durch die Aufgabe eines Axioms, eben des Axioms NEG, erfolgen kann.

Anmerkung 6

Für den Beweis der Inkonsistenz des Axiomensystems AX_1 werden nur die Axiome MON, SEC und NEG benötigt, nicht aber das Bewegungsgesetz SG. Die Inkonsistenz wird dabei bewiesen für endlich-dimensionale Hilberträume \mathcal{H} mit $\dim \mathcal{H} \geq 3$ sowie für unendlich-dimensionale (separable) Hilberträume.

Für den Fall eines separablen Hilbertraumes \mathcal{H} mit $\dim \mathcal{H} = \infty$ lässt sich die Inkonsistenz der Axiome MON, SEC und NEG auch direkt beweisen, ohne dass auf die Beweiskonstruktion des Kochen–Specker–Theorems (s. T.4.11) zurückgegriffen werden muss. Diesen direkten Beweis wollen wir hier kurz skizzieren.

Es sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum mit $\dim \mathcal{H} = \infty$. Bekanntlich ist dann \mathcal{H} isomorph zu dem Hilbertraum der quadratisch integrierbaren komplexen Funktionen auf \mathbb{R} . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir somit annehmen:

$$\mathcal{H} = \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

Bemerkung: Genau genommen müssen hier Äquivalenzklassen von derartigen Funktionen betrachtet werden. Für den grundsätzlichen Ablauf des Beweises ist dies aber ohne Bedeutung.

Wir müssen zeigen, dass $\Omega_1 = \emptyset$ ist. Hierzu nehmen wir an, dass ω ein Element von Ω_1 ist, und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Wir definieren:

$$\begin{aligned} I(n,j) &:= [j/2^n, (j+1)/2^n) && \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } j \in \mathbb{Z} \\ A_I &:= \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \varphi|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0 \} && \text{für Intervalle } I \subset \mathbb{R} \\ A_{n,j} &:= A_{I(n,j)} && \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } j \in \mathbb{Z} \\ C_{n,j} &:= (A_{n,j})^\perp && \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Für jedes n kann man leicht zeigen, dass die $C_{n,j}$ miteinander vertauschbar sind und dass gilt:

$$\bigcap_j C_{n,j} = \{0\}$$

Wegen $\omega \in \bigcap(\text{SEC})$ folgt damit

$$\forall_n \exists_j (C_{n,j}, 0) \notin \omega$$

und wegen $\omega \in \bigcap(\text{NEG})$ weiterhin:

$$\forall_n \exists_j (A_{n,j}, 0) \in \omega$$

Für jedes n sei $j(n)$ so ausgewählt, dass gilt:

$$\forall_n (A_{n,j(n)}, 0) \in \omega$$

Mit $G_n := A_{n,j(n)}$ erhalten wir somit:

$$\forall_n (G_n, 0) \in \omega$$

Man kann wiederum leicht zeigen, dass die G_n vertauschbar sind und dass gilt:

$$\bigcap_n G_n = \emptyset$$

Wegen $\omega \in \bigcap(\text{SEC})$ folgt dann:

$$\exists_n (G_n, 0) \notin \omega$$

im Widerspruch zu der obigen Aussage (QED).

Der vorstehende Beweis verwendet insbesondere die Tatsache, dass SEC für unendliche Folgen von Ereignissen formuliert ist. Um die Inkonsistenz des Axiomensystems zu vermeiden, erscheint es daher naheliegend, das Axiom SEC zu ersetzen durch das entsprechende (schwächere) Axiom

$$\text{SEC}^e := \{ \neg \forall_j \langle A_j, t \rangle_0 \mid t \in T \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \wedge \perp_j A_j \}$$

welches sich nur auf endliche Folgen von Ereignissen bezieht. Für den empirischen Gehalt der Theorie spielt es letztlich keine Rolle, ob man SEC oder SEC^e verwendet, da er stets nur endliche empirische Materialien betrifft.

Der Übergang von SEC zu SEC^e stellt jedoch keinen Ausweg dar, da auch die Inkonsistenz der Axiome MON, SEC^e und NEG mit der unter T.4.11 dargestellten Beweiskonstruktion gezeigt werden kann. Diese Beweiskonstruktion bleibt somit relevant für den Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ sowie für den Fall, dass SEC durch SEC^e ersetzt wird.

5. Die Bedeutung der Aufgabe des physikalischen "tertium non datur"

Wir gehen hier auf die Frage ein, welche Bedeutung das physikalische "tertium non datur" (also das Axiom NEG) in der Quantentheorie hat und zu welchen Konsequenzen die Aufgabe dieses Axioms führt. Die Überlegungen erfolgen ganz analog zu denen, die zu einem möglichen Verzicht auf das Axiom NEG in der klassischen Mechanik angestellt wurden. Während jedoch die Aufgabe dieses Axioms in der klassischen Mechanik erfolgen *kann* (ohne dass der empirische Gehalt der Theorie eine Einbuße erleidet), ist die Aufgabe des physikalischen "tertium non datur" in der Quantentheorie unvermeidbar.

Das mögliche Faktum

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle A^\perp, t \rangle_0$$

stellt – als eines der Elemente des Axioms NEG – das physikalische "tertium non datur" zu dem Einzelereignis (A, t) dar. Es ist nicht zu verwechseln mit dem logischen "tertium non datur"

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \neg \langle A, t \rangle_0$$

Wir geben also keineswegs die klassische Logik auf, etwa zugunsten einer "Quantenlogik".

Die Aufgabe des Axioms NEG bedeutet nicht, dass eine Aussage der Form

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle A^\perp, t \rangle_0$$

generell unzutreffend wäre. Es handelt sich hierbei vielmehr um eine "kontingente" Aussage, die in einer konkreten Situation entweder zutreffen kann oder auch nicht. Dass sie im Einzelfall zutrifft, kann mitunter empirisch beobachtet werden.

Um die Konsequenzen der Aufgabe des Axioms NEG zu diskutieren, betrachten wir wiederum die Observablen. Eine Observable ist im Falle der Quantenmechanik ein selbstadjungierter linearer Operator

$$L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Wir beschränken uns hier auf diskrete Observable mit höchstens abzählbar unendlichem Wertebereich, d.h. auf Operatoren mit diskretem Spektrum. Ein solcher Operator hat eine Spektraldarstellung

$$L = \sum_j \lambda_j \pi_{A_j}$$

Dabei sind λ_j die verschiedenen (reellen) Eigenwerte von L und A_j die zugehörigen (paarweise orthogonalen) Eigenräume mit

$$\bigoplus_j A_j = \mathcal{H}$$

Eine solche Observable L hat in einem physikalisch möglichen Weltablauf $\omega \in \Omega$ zum Zeitpunkt $t \in T$ genau dann den Wert λ_j , wenn das Universum zur Zeit t die Eigenschaft A_j aufweist, wenn also gilt:

$$(A_j, t) \in \omega$$

Sie hat *tatsächlich* zur Zeit t diesen Wert, wenn gilt:

$$(A_j, t) \in \omega_0$$

Durch das Axiom SEC wird sichergestellt, dass eine Observable L (in jedem möglichen Weltablauf $\omega \in \Omega$) zu jedem Zeitpunkt t *höchstens* einen Wert haben kann: Für $j \neq k$ ist $A_j \perp A_k$; daher sind A_j und A_k vertauschbar mit $A_j \cap A_k = 0$. Wegen $\omega \in \bigcap(\text{SEC})$ folgt

$$\omega \in \neg (\langle A_j, t \rangle_o \wedge \langle A_k, t \rangle_o)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\neg [(A_j, t) \in \omega \wedge (A_k, t) \in \omega]$$

und besagt, dass die Observable L nicht zugleich die Werte λ_j und λ_k hat.

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist es in der Quantentheorie nicht möglich anzunehmen, dass jede Observable stets *genau* einen Wert hat, dass also im allgemeinen die sogenannte "Wertbestimmtheit" (value definiteness) gegeben ist. Würde man dies annehmen, so müsste die Wertbestimmtheit speziell auch für jeden Projektionsoperator π_A gelten. Ein solcher Operator hat die Spektraldarstellung

$$\pi_A = 1 \pi_A + 0 \pi_{A^\perp}$$

und entspricht somit (als Observable betrachtet) den beiden Unterräumen A und A^\perp . Die Annahme der Wertbestimmtheit für diese speziellen Observablen läuft gerade auf die Annahme des Axioms NEG hinaus und führt so zur Inkonsistenz des Axiomensystems.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass eine Observable der Form

$$L = \sum_j \lambda_j \pi_{A_j}$$

(mit den verschiedenen Eigenwerten λ_j sowie $\bigoplus_j A_j = \mathcal{H}$) genau dann zur Zeit t einen eindeutigen Wert hat, wenn für alle j das physikalische "tertium non datur" in Bezug auf das Ereignis (A_j, t) – als ein kontingentes Faktum – gegeben ist.

Dass eine Observable einen Wert hat, stellt ein kontingentes (mögliches) Faktum dar. Alles, was die Theorie darüber sagen kann, ist: Die Observable

$$L = \sum_j \lambda_j \pi_{A_j}$$

(mit verschiedenen Eigenwerten λ_j sowie $\bigoplus_j A_j = \mathcal{H}$) hat genau dann zur Zeit t einen Wert, wenn es ein tatsächliches Ereignis $(B, s) \in \omega_0$ und ein $j \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$U_{t-s}B \subset A_j$$

Speziell gilt dies für die Frage, ob ein bestimmtes Quant Q "lokal" ist, d.h. ob es ein (relativ kleines) Raumsegment Δx gibt, auf das der Ort von Q (zur Zeit t) beschränkt ist. Die Theorie macht hierüber keine allgemeine Aussage. Allenfalls handelt es sich dabei um ein kontingentes mögliches Faktum, das im Einzelfall eintreten und dann eventuell auch beobachtet werden kann.

Bemerkung: Die Wertbestimmtheit der numerischen Größen ist ein Merkmal der klassischen Physik. Im alltäglichen Denken stellt sie hingegen keine plausible Annahme dar. Numerische Größen, wie z.B. der Ort eines Eiswürfels auf einem Tisch, zeichnen sich dadurch aus, dass sie nur während einer bestimmten Zeitspanne einen Wert aufweisen. Ist der Eiswürfel geschmolzen, so ist es sinnlos, nach seinem Ort zu fragen. Entsprechendes gilt auch für jede andere mechanische Größe. Erst durch die idealisierende Annahme der klassischen Physik, dass es "ewige" Objekte (Atome bzw. Elementarteilchen) gebe, ist man zu der Vorstellung gelangt, es müsse numerische Größen geben, die zu jeder Zeit einen bestimmten Wert haben.

Die wesentliche Rolle des Axioms NEG in der klassischen Mechanik liegt darin sicherzustellen, dass jede Observable zu jeder Zeit mindestens (und damit genau) einen Wert hat. Die in der klassischen Mechanik mögliche, in der Quantenmechanik aber notwendige Aufgabe des Axioms NEG bedeutet daher im Kern die Aufgabe des "numerischen Weltbildes", also der Vorstellung, dass die Welt durch numerische Größen (wie z.B. Orte und Impulse) zu beschreiben sei, die jederzeit einen Wert aufweisen.

Die Aufgabe der allgemeinen Wertbestimmtheit, und damit des numerischen Weltbildes, bedeutet keine Aufgabe des ontologischen Realismus. Es wird vielmehr an der Vorstellung festgehalten, dass jede Eigenschaft des Universums zu jeder Zeit objektiv entweder gegeben ist oder nicht. An die Stelle der Wertbestimmtheit der numerischen Observablen tritt die Wahrheitswert-Bestimmtheit (truth value definiteness) der möglichen Ereignisse. Der numerische Realismus wird durch einen Realismus der Fakten ersetzt. Die Welt ist – im Sinne Wittgensteins – "alles was der Fall ist".

Bemerkung: Der hier verfolgte ontologisch realistische Ansatz geht davon aus, dass zur Zeit t jeder (binären) Eigenschaft $A < \mathcal{H}$ ein Wahrheitswert zugeordnet ist. Jedem $A < \mathcal{H}$ entspricht in eindeutiger Weise ein Projektionsoperator π_A . Dies bedeutet aber nicht, dass die durch π_A angegebene Observable stets einen Wert hat. Man muss also unterscheiden zwischen der Eigenschaft A und dem Projektionsoperator π_A , der als Observable den beiden Eigenschaften A und A^\perp entspricht. Um diese Unterscheidung deutlicher zu machen, könnte man statt von "binären Eigenschaften" auch von "logischen", "faktischen" oder "elementaren" Eigenschaften sprechen.

Mit der Aufgabe des numerischen Weltbildes wird zugleich auch der Atomismus aufgegeben: Die Vorstellung von "Atomen", d.h. von unteilbaren elementaren Objekten, ist daran gebunden, dass jedes Atom stets "lokal" ist, dass die Observable "Ort" also stets einen Wert hat. Die Aufgabe des Atomismus ist schon in der Quantenmechanik notwendig, nicht erst in der Quantenfeldtheorie, in der man ohnehin nicht von der Existenz stabiler Elementarteilchen ausgehen kann.

Die Aufgabe des Atomismus hat nichts mit einer Aufgabe des ontologischen Realismus zu tun. Das diskrete Verhalten bestimmter Systeme muss nicht mit der Existenz materieller "Atome" erklärt werden. So kann auch die Existenz diskreter Energieniveaus durch Operatoren mit diskretem Spektrum beschrieben werden, ohne dass man die Existenz unteilbarer "Energieatome" annehmen muss. Diskrete Strukturen kommen in der Welt vor, aber das besagt nicht, dass jede realistische Ontologie notwendigerweise eine atomistische ist.

Im Rahmen der Quantenmechanik sind die eigentlichen Quanten keine "Atome" im Sinne unteilbarer Kügelchen oder lokaler Materiekonzentrationen. Als Subsysteme des Hilbertraums des Universums (die im Hamiltonoperator eine spezielle Rolle spielen) stellen sie einen formalen Aspekt des Universums dar und statten es mit einer diskreten Struktur aus. Wie allen abstrakten Objekten kommt ihnen eine "ewige", das heißt eine zeitlose Existenz zu.

Bemerkung: Es wäre denkbar, den Atomismus der klassischen Mechanik durch eine (klassische) Feldtheorie zu ersetzen. Auch letztere stellt eine numerisch realistische Theorie dar. Die (erfolgreiche) Entwicklung der Quantenfeldtheorie zeigt jedoch, dass man auf diese Weise nicht zu einer Theorie gelangt, die die tatsächlichen Verhältnisse im Universum korrekt beschreibt.

Zu den möglichen Ereignissen gehören auch jene Ereignisse, die einer Aussage der Form

(*) "zur Zeit t gilt $L \in \Delta L$ "

entsprechen, wobei L eine Observable, $t \in T$ ein Zeitpunkt und $\Delta L \subset \mathbb{R}$ ist. Wenn L die oben angegebene Spektraldarstellung hat, so entspricht der Aus-

druck " $L \in \Delta L$ " dem Unterraum

$$A := \bigoplus \{ A_j \mid \lambda_j \in \Delta L \}$$

und damit einer Eigenschaft des Universums. Die Aussage (*) entspricht dann dem möglichen Ereignis

$$(A, t) \in \mathcal{E}$$

Auf diese Weise spielen die numerischen Observablen auch nach der Aufgabe des numerischen Weltbildes eine Rolle.

Eine numerische Observable (mit diskretem Spektrum) beruht auf einer Menge von sich paarweise ausschließenden Eigenschaften A_j . Jeder dieser Eigenschaften wird dabei ein Wert λ_j zugeordnet. In diesem Sinne dient eine Observable lediglich dazu, eine solche Menge von Eigenschaften "durchzunummerieren". Fasst man die numerischen Observablen in dieser Weise auf, so ist die Annahme der "Wertbestimmtheit" für diese Observablen überhaupt nicht plausibel.

Wir haben uns bisher auf Observable mit diskretem Spektrum beschränkt. Ist hingegen L eine Observable mit kontinuierlichem Spektrum, so entspricht ein bestimmter Wert r aus diesem Spektrum nicht in sinnvoller Weise einem Unterraum des Hilbertraums. Es ist daher auch nicht möglich festzulegen, wann L zur Zeit t den Wert r haben soll. Dies entspricht der Tatsache, dass einem solchen Wert nicht ein Vektor in \mathcal{H} , sondern allenfalls eine Distribution auf \mathcal{H} zugeordnet werden kann. In der Praxis ist die Frage eines bestimmten Wertes hier auch gar nicht relevant. Im Falle einer kontinuierlichen Observablen kann es immer nur um die Frage gehen, ob L in einem Intervall ΔL liegt oder nicht. Dem entspricht dann in der üblichen Weise ein Unterraum von \mathcal{H} . Die Frage nach der Wertbestimmtheit einer kontinuierlichen Observablen stellt sich somit gar nicht: Eine solche Observable hat niemals einen bestimmten Wert.

Die Rolle kontinuierlicher Observabler besteht darin, eine Menge von Unterräumen von \mathcal{H} so "durchzunummerieren" bzw. zu parametrisieren, dass jedem reellen Intervall ΔL ein Unterraum $A_{\Delta L}$ von \mathcal{H} zugeordnet wird, wobei gilt:

$$A_{\Delta L} = A_{\Delta L'} \cap A_{\Delta L''}$$

für Intervalle $\Delta L'$ und $\Delta L''$ mit $\Delta L = \Delta L' \cap \Delta L''$ sowie

$$A_{\Delta L} = A_{\Delta L'} \oplus A_{\Delta L''}$$

für Intervalle $\Delta L'$ und $\Delta L''$ mit $\Delta L = \Delta L' \cup \Delta L''$.

Wenn ein Ereignis $(B, s) \in \mathcal{E}$ beobachtet wurde, für das entweder

$$U_{t-s}(B) < A$$

oder

$$U_{t-s}(B) < A^\perp$$

gilt, so wurde damit zugleich auch die Gültigkeit der Einzelaussage

$$\langle A, t \rangle_0 \vee \langle A^\perp, t \rangle_0$$

und somit das physikalische "tertium non datur" für das Ereignis (A, t) empirisch festgestellt.

Ähnliches gilt für die Beobachtung des Wertes einer diskreten Observablen

$$L = \sum_j \lambda_j \pi_{A_j}$$

(mit den verschiedenen Eigenwerten λ_j sowie $\bigoplus_j A_j = \mathcal{H}$). Beobachtet man ein Ereignis (B, s) , für welches gilt:

$$U_{t-s}B < A_j \quad (\text{für ein } j \in \mathbb{N})$$

so hat man empirisch festgestellt, dass die Observable L zum Zeitpunkt t einen Wert hat.

Wenn ein Subjekt zur Zeit t die Observable L beobachtet und einen Wert λ_j feststellt (wenn es also ein Ereignis (B, s) mit $U_{t-s}B < A_j$ beobachtet), so wird durch die Beobachtung nicht erst *bewirkt*, dass die Observable einen Wert erhält, den sie sonst nicht gehabt hätte. Folge der Beobachtung ist nur, dass das Subjekt erfährt, dass die Observable in diesem Fall einen Wert aufweist.

Die Rolle der Beobachtung beschränkt sich somit auf den folgenden rein logischen Zusammenhang: Wird ein Wert λ_j für die Observable L beobachtet, so folgt hieraus, dass L in diesem Fall einen Wert hat.

Anmerkung 1

Da wir in der hier dargestellten realistischen Quantentheorie von einem faktischen Realismus ausgehen, könnte der Eindruck entstehen, man habe es mit einer "digitalen" oder einer "diskontinuierlichen" Theorie zu tun. Dies ist jedoch nicht der Fall. Digitale Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass sie auf endlich viele binäre Alternativen beschränkt sind. In unserer Theorie gibt es jedoch ein unendliches Kontinuum von binären Alternativen, ebenso wie im Fall der klassischen Physik. Wenn man zu einer numerischen Größe L mit kontinuierlichem Wertebereich die Menge aller Aussagen $L \in [a, b]$ bildet, wobei a und b (mit $a < b$) stetige Parameter sind, so entsteht durch die Tatsache, dass jede einzelne dieser Aussagen nur einen von zwei möglichen Wahrheitswerten hat, keine "diskontinuierliche" Theorie. Im unendlich-dimensionalen Hilbertraum lässt sich jede Aussage der Form $L \in [a, b]$ als Unterraum $A_{[a, b]} < \mathcal{H}$

darstellen. Für verschiedene Intervalle erhalten wir dabei im allgemeinen unterschiedliche Unterräume, und $A_{[a,b]}$ hängt in stetiger Weise von a und b ab.

Anmerkung 2

Nach den obigen Ausführungen kann eine Observable L mit diskretem Spektrum verstanden werden als eine parametrisierte Menge von sich paarweise ausschließenden Eigenschaften $A_j \in \mathcal{U}$. Ist $J \subset \mathbb{N}$ die zugehörige Indexmenge, so entspricht L demnach einer Abbildung

$$L' : J \rightarrow \mathcal{U}$$

welche durch

$$L'(j) := A_j \quad (\text{für } j \in J)$$

definiert ist.

Dies ist jedoch nur ein spezieller Fall. Allgemeiner definiert ein Operator mit diskretem Spektrum zu jeder Teilmenge $I \subset J$ eine Eigenschaft $A_I \in \mathcal{U}$. Für alle $I \subset J$ ist dann:

$$A_I = \bigoplus_{j \in I} A_j$$

Auch die A_I bilden eine parametrisierte Menge von Eigenschaften. Da das physikalische "tertium non datur" nicht angenommen werden kann, lässt sich das mögliche Faktum $\langle A_I, t \rangle_0$ nicht mit der Aussage

$$\exists_{j \in I} \langle A_j, t \rangle_0$$

identifizieren. Die parametrisierte Menge der A_I kann daher nicht auf die parametrisierte Menge der A_j reduziert werden.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für Observable mit kontinuierlichem Spektrum. Eine solche Observable legt nicht nur für jedes reelle Intervall, sondern auch für jede Borel-messbare Teilmenge B von \mathbb{R} eine Eigenschaft $A_B \in \mathcal{U}$ fest.

6. Exkurs: Die scheinbare Plausibilität des numerisch realistischen Denkens

Wir haben festgestellt, dass es für den Aufbau der ontologisch realistischen Quantentheorie notwendig ist, den numerischen Realismus aufzugeben. Es stellt sich daher die Frage, warum uns die Vorstellung eines numerischen Realismus überhaupt plausibel erscheint.

Es gibt etliche Beispiele dafür, dass eine zunächst plausibel erscheinende Annahme über die physikalische Welt aufgrund neuer Erkenntnisse überwunden werden musste. In jedem dieser Fälle stellt sich die Frage, warum die jeweilige Annahme zunächst plausibel erscheinen konnte.

Betrachten wir zum Beispiel die Frage, ob es zutrifft, dass die Fall-Linien an der Erdoberfläche parallel zueinander verlaufen, so dass die Welt sich gliedert in ein Oben und Unten, konkret in den Himmel, die Erde selbst und die Unterwelt. Diese Vorstellung erschien plausibel, solange sich die Menschen nur innerhalb kleiner Segmente der Erdoberfläche bewegt haben und auch nicht über große Distanzen hinweg kommunizieren konnten. Unter diesen Voraussetzungen sind alle von einem Individuum beobachtbaren Fall-Linien näherungsweise parallel; folglich erschien die Erde als eine "Scheibe", die zwischen Himmel und Unterwelt gelegen ist.

Ein weiteres Beispiel stellt die Ansicht dar, die Erde ruhe im Mittelpunkt des Kosmos und die Himmelskörper bewegten sich auf bestimmten Bahnen um sie herum. Diese Vorstellung gründete sich unter anderem darauf, dass von einer Bewegung der Erde auf einer Bahn um die Sonne schlicht nichts zu bemerken war. Weder konnte man empfinden, dass die Erde um die Sonne herumgeschleudert wird (dafür dauert ein Erdumlauf viel zu lange), noch bemerkte man einen "Fahrtwind", da sich die gesamte Atmosphäre zusammen mit der Erde fast ohne jede Reibung in einem annähernden Vakuum bewegt.

Ebenso war es naheliegend anzunehmen, dass der reale physikalische Raum euklidisch ist und somit die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt. Die allgemeine Relativitätstheorie lehrt uns heute, dass dies keineswegs so ist. Allerdings ist das Gravitationsfeld dort, wo wir leben, sehr schwach. Die Abweichungen der Winkelsumme von dem präzisen Wert von 180° sind daher so klein, dass sie mit bloßem Auge oder mit einfachen Messinstrumenten nicht feststellbar sind.

In allen genannten Fällen war es notwendig, die jeweilige beschränkte Perspektive zu überwinden und durch eine allgemeinere Sichtweise zu ersetzen. Als "Fall-Linien" mussten beliebige Kurven (z.B. konzentrisch auf den Erdmittelpunkt gerichtete Geraden), für die Bewegung der Erde beliebige Bahnen im Raum und in der Geometrie beliebige Metriken zugelassen werden. Dabei waren allerdings stets nur bestimmte physikalische Annahmen betroffen, und in

keinem Fall wurde die Aufgabe der klassischen Logik oder der Vorstellung von der Existenz einer objektiv vorhandenen realen Welt (also des ontologischen Realismus) in Erwägung gezogen.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, warum der numerisch realistische Ansatz in der Physik plausibel, wenn nicht gar unverzichtbar erscheint, so dass eine nicht numerische Theorie (wie die hier vorliegende) als "unbefriedigend" empfunden werden könnte.

Unbestreitbar ist, dass das traditionelle physikalische Denken von numerischen Konzepten geprägt ist. Nichts scheint in der Physik so wichtig zu sein, wie die richtige "Gleichung" zu finden, mit der das Universum beschrieben werden kann, und das letzte Ziel der physikalischen Theoriebildung scheint darin zu bestehen, eine "Weltformel" zu finden. Darunter stellt man sich dann mit größter Selbstverständlichkeit eine numerische Formel vor, vorzugsweise eine Differentialgleichung.

Unter numerischem Realismus ist hier konkret die Ansicht zu verstehen, das Universum sei vollständig zu beschreiben mittels einer Menge numerischer Größen, die zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Wert haben. Diese Menge numerischer Größen kann endlich sein (wie in der klassischen Mechanik) oder unendlich (wie in der klassischen Feldtheorie). Als Wertebereich für jede dieser Größen kommt dann eine Menge reeller (oder komplexer) Zahlen bzw. Vektoren in Frage.

Der in diesem Sinne verstandene numerische Realismus hat sich in der Physik erst im Laufe der Zeit entwickelt. Für eine zu jedem Zeitpunkt geltende Wertbestimmtheit numerischer Größen spricht die Alltagserfahrung oder die unmittelbare Beobachtung der Natur zunächst einmal nicht. Zwar lassen sich makroskopische Objekte mitunter durch wertbestimmte numerische Größen beschreiben, aber dies gilt immer nur so lange, wie das jeweilige Objekt existiert. Erst bei der Formulierung einer mikroskopischen Theorie kann man zu der Vorstellung gelangen, das Universum könne vollständig durch eine bestimmte Menge von stets wertbestimmten numerischen Größen beschrieben werden.

Für die Plausibilität des numerischen Realismus gibt es im wesentlichen zwei Gründe, die wir im folgenden diskutieren wollen.

Wir leben in einem Bereich des Universums, in dem feldartige Phänomene beobachtet werden können. Beispielsweise sind "langwellige" Photonen (d.h. Photonen mit niedriger Einzelenergie) in einer solchen Dichte vorhanden, etwa in Form von Licht oder Radiowellen, dass ihre Beschreibung als klassisches elektromagnetisches Feld erfolgen kann. Derartige Felder konnten zunächst mit den vorhandenen einfachen Apparaturen nur grob makroskopisch betrachtet werden. Die gequantelte Struktur der Felder war unter diesen Voraussetzungen nicht zu erkennen.

Bemerkung: Felder lassen sich zum Beispiel veranschaulichen anhand einer Wasseroberfläche, auf der sich Wellen ausbreiten und die zu jedem Zeitpunkt

und an jeder Stelle eine Höhe hat. Ein elektrisches oder ein magnetisches Feld lässt sich mittels makroskopischer Indikator-Objekte (z.B. mit Hilfe von Eisenfeilspänen) sichtbar machen. Hieraus ergab sich die Vorstellung von Feldern, die zu jeder Zeit und überall im Raum eine "Feldstärke" haben, welche durch einen numerischen Wert gegeben ist.

Wir leben außerdem in einem Umfeld, in dem bestimmte Formen kondensierter Materie auftreten, die als in sich stabile Objekte erscheinen, wie zum Beispiel Billardkugeln. Mit bloßem Auge oder einfachen Apparaturen lassen sich nur solche makroskopischen Objekte beobachten. Die Bewegung dieser Objekte kann mit numerischen Größen wie "Ort" und "Impuls" beschrieben werden. Daran ändert sich auch dann nichts, wenn ein Objekt in mehrere (immer noch makroskopische) Teilobjekte aufgespalten wird.

Im Rahmen der klassischen Physik wurden – in einer durchaus naiven Weise – diese beiden Konzepte, nämlich das Konzept des Feldes und das des Objekts, auf die mikroskopische Ebene übertragen. So entstand zum einen der Atomismus, d.h. die Vorstellung, die Welt sei aus elementaren Teilchen zusammengesetzt, die sich wie makroskopische Objekte durch ihren Ort und ihren Impuls beschreiben lassen. Zum andern entstand das Konzept des Feldes, das tatsächlich an jedem einzelnen Punkt des Raumkontinuums und zu jedem Zeitpunkt eine Feldstärke aufweist. Ein solches Feld entspricht einer Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \times T \rightarrow W$$

die auf dem physikalischen Raum \mathbb{R}^3 und der Zeitachse T definiert ist und einen kontinuierlichen Wertebereich hat, etwa \mathbb{R} (bei einem skalaren Feld) oder \mathbb{R}^3 bei einem Vektorfeld.

Erst durch diese Übertragung auf die mikroskopische Ebene entstand der numerische Realismus im oben beschriebenen Sinn. Entscheidend ist dabei die Vorstellung, die elementaren Teilchen seien aus sich heraus stabile Objekte, so wie wir es von makroskopischen Gegenständen kennen. Diesen Teilchen wird allerdings eine immerwährende Existenz zugeschrieben. Dabei wird angenommen, dass ihre Orte und Impulse (als numerische Größen) zu jedem Zeitpunkt der gesamten Zeitachse einen Wert haben, und nicht nur während des beschränkten Zeitintervalls, in dem etwa ein makroskopisches Objekt existiert.

Mit der Erforschung mikroskopischer Erscheinungen und mit der Durchführung bestimmter Quantenexperimente erwies sich sowohl die Annahme klassischer Felder als auch das Konzept der klassischen Teilchen als unzutreffend.

Das Konzept physikalischer Felder beruhte zunächst auf der Beobachtung makroskopischer, d.h. grober räumlicher Verhältnisse. Sie legen es nahe anzunehmen, es gebe Felder, die an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt eine Feldstärke haben. Solange feldartige Erscheinungen nur auf einer makroskopischen Ebene beobachtet werden konnten, erschien diese klassische Vorstellung des Feldes plausibel. Die Betrachtung auf einer mikroskopischen Ebene zeigt

jedoch, dass die realen Felder eine gequantelte Struktur aufweisen. Die Plausibilität des numerischen Realismus der klassischen Feldtheorie ist somit lediglich eine Folge der makroskopischen Perspektive.

Bemerkung: Schon wenn man im Sinne der klassischen Vorstellung davon ausgeht, dass Wasser aus einzelnen Molekülen zusammengesetzt ist, so kann man nicht mehr annehmen, dass eine Wasseroberfläche – mikroskopisch betrachtet – an jedem Ort eine bestimmte Höhe hat. Eine Analogie zu einem klassischen Feld liegt hier also nur dann vor, wenn man sich auf eine makroskopische Betrachtung beschränkt.

Nach der Durchführung bestimmter Quantenexperimente war auch die Vorstellung von elementaren Teilchen, die sich auf klassischen Bahnen bewegen, nicht mehr aufrechtzuerhalten.

Mikroskopische Teilchen (Atome, Elementarteilchen usw.) erweisen sich vielmehr als äußerst flüchtige, fluktuierende Objekte, und je "kleiner" ein solches Objekt ist, d.h. je geringer seine Masse ist, desto instabiler ist es auch. Eine Voraussetzung für eine numerisch realistische Beschreibung würde darin bestehen, dass der Ort jedes Teilchens stets mit absoluter Genauigkeit bestimmt ist. Nach der Unschärferelation wäre der Impuls dieses Teilchens dann aber völlig unbestimmt. Dies hätte zur Folge, dass das Teilchen bereits nach einem beliebig kurzen Zeitintervall mit derselben Wahrscheinlichkeit an jedem beliebigen Ort anzutreffen wäre. In diesem Sinne wäre ein exakt ortsbestimmtes Teilchen zugleich vollkommen instabil. Der numerisch realistischen Beschreibung im Sinne der klassischen Physik ist damit auch hier die Basis entzogen.

Solange wir das Universum makroskopisch betrachten (weil uns z.B. keine anderen Mittel zur Verfügung stehen), begegnen uns Objekte, die aus sich heraus stabil erscheinen und mit bestimmten numerischen Größen beschrieben werden können. In dem Augenblick, als man begann, die vermuteten klassischen elementaren Teilchen im einzelnen zu untersuchen, stellte sich heraus, dass solche Teilchen in der angenommenen Form nicht existieren. Die Plausibilität des numerischen Realismus ist daher auch hier nur eine Folge der Beschränkung auf die makroskopische Perspektive.

Zusammenfassend können wir also feststellen: Für eine zu jedem Zeitpunkt geltende Wertbestimmtheit numerischer Größen spricht die Alltagserfahrung oder die unmittelbare Beobachtung der Natur zunächst einmal nicht. Das numerisch realistische Denken basiert wesentlich auf den Konzepten des Atomismus sowie des kontinuierlichen Feldes. Diese beiden Konzepte beruhen

- 1) darauf, dass wir in einem Umfeld leben, in dem wir makroskopische Objekte beobachten können, die – als kondensierte Materie – aus sich heraus stabil sind,
- 2) darauf, dass wir außerdem feldartige Erscheinungen wie Licht oder Radiowellen beobachten können,

- 3) auf der makroskopischen Perspektive, d.h. darauf, dass Möglichkeiten zu einer genaueren, mikroskopischen Beobachtung zunächst nicht zur Verfügung standen,
- 4) auf der naiven Übertragung makroskopischer Konzepte auf mikroskopische Verhältnisse.

Das numerisch realistische Denken beruht somit im wesentlichen auf einer eingeschränkten, makroskopischen Perspektive. Ähnlich wie in den oben genannten Beispielen ist es zur Überwindung dieser Einschränkung notwendig, zu der allgemeineren Sichtweise eines faktischen Realismus überzugehen.

Anmerkung 1

Bei der klassischen Logik handelt es sich um Regeln, die bestimmte Elemente der Sprache betreffen, etwa die "logischen" Begriffe "und", "nicht", "alle" usw. Durch die Ergebnisse von Experimenten können diese Regeln naturgemäß nicht in Frage gestellt werden. Der ontologische Realismus (etwa im Gegensatz zu einem Phänomenalismus) betrifft eine grundsätzliche Haltung, mit der wir der Welt gegenüber treten. Durch Experimente, die in der Realität stattfinden und die zu realen Ergebnissen führen, kann auch er prinzipiell nicht in Frage gestellt werden.

Der numerische Realismus hingegen stellt eine spezielle physikalische Annahme über die mikroskopischen Verhältnisse des Universums dar, konkret die Annahme einer vollständigen Beschreibbarkeit mittels einer Menge stets wertbestimmter numerischer Größen. Ähnlich wie im Falle der euklidischen Geometrie ist es auch hier möglich, dass uns die experimentellen Befunde veranlassen, diese spezielle Annahme über die physikalische Realität aufzugeben und durch eine andere Vorstellung zu ersetzen.

Der numerische Realismus kann hier insbesondere auch deshalb aufgegeben werden, weil es sich dabei um eine rein theoretische Annahme handelt, die in der beobachtbaren Realität keine unmittelbare Grundlage hat.

Anmerkung 2

Es stellen sich hier zwei naheliegende Fragen:

- Wenn makroskopische Objekte aus instabilen bzw. flüchtigen Teilchen zusammengesetzt sind, weshalb gibt es dann überhaupt stabile Objekte, die durch ihren Ort und Impuls beschrieben werden können?
- Warum lassen sich mit Hilfe des Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskops stabile Teilchen innerhalb einer Kristallstruktur beobachten?

Um dies zu verstehen, müssen wir von der Quantenfeldtheorie (QFT) ausgehen. Ihr zufolge ist das Universum durchzogen von mehreren Quantenfeldern. "Teilchen" sind darin als lokale Materiekonzentrationen aufzufassen, die sich als Manifestationen eines solchen Quantenfeldes bilden. Diese Konzentrationen

der Materie darf man sich nicht als kompakte "Kügelchen" vorstellen und sie sind im allgemeinen nicht aus sich heraus stabil. Dies ergibt sich – wie bereits ausgeführt – allein schon aus der Unschärferelation zwischen Ort und Impuls.

Stabil ist eine derartige Materiekonzentration nur dann, wenn sie sich in einer "Teilchenfalle" befindet, wie z.B. ein Ion in einer Ionenfalle. Aufgrund der Wechselwirkung mit der umgebenden Materie bleibt das "Teilchen" dort über längere Zeit stabil an einem Ort. So verhält es sich auch im Falle eines Kristalls. Dort bleiben die einzelnen Ionen deshalb stabil lokalisiert, weil die übrigen Ionen des Kristalls gemeinsam eine Ionenfalle für das einzelne Ion darstellen.

Der Kristall besteht, wie auch jedes andere makroskopische Objekt, aus sehr vielen Teilchen und hat daher eine große Masse. Derartige Objekte unterliegen natürlich als Ganzes ebenfalls der Unschärferelation, und somit bleiben auch sie nicht vollkommen stabil an ihrem Ort. Allerdings bemerken wir davon normalerweise überhaupt nichts. Aufgrund ihrer großen Masse sind sie von stabilen Objekten praktisch nicht zu unterscheiden, und sie können daher als "quasi-stabil" bezeichnet werden. Objekte, die aus sich heraus quasi-stabil sind, erscheinen uns dann sogar als vollkommen stabil.

Innerhalb von quasi-stabilen (makroskopischen) Objekten lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen stabile lokale Materiekonzentrationen beobachten, die wir dann als mikroskopische Teilchen auffassen können. In einem makroskopischen Objekt stabilisieren sich diese Teilchen wechselseitig, d.h. jedes einzelne von ihnen wird durch seine Wechselwirkung mit dem Verbund der übrigen Teilchen (also von außen) auf einen bestimmten Raumbereich eingeschränkt.

Dies gilt für die einzelnen Ionen in einem Kristall ebenso wie für Ionen, die in einer Ionenfalle gefangen sind. Für freie Teilchen und ebenso für die Teilchen in einem (dünnen) Gas gilt dies so nicht. Sie haben vielmehr den oben beschriebenen flüchtigen Charakter.

Bemerkung: Eine der wesentlichen Kräfte, die der Bildung kondensierter Materie zugrunde liegen, ist die Gravitation als eine weitreichende attraktive Kraft. Sie hat nicht nur die Erde zusammengefügt, sondern sie sorgt auch für das Bestehen eines atmosphärischen Drucks, der uns und die uns umgebende Materie zusammenhält. In diesem Umfeld bilden sich Strukturen, die durch weniger weit reichende Kräfte, etwa die elektromagnetische Kraft, zusammengehalten werden. In einer solchen Umgebung finden sich dann makroskopische Objekte und innerhalb dieser Objekte – als Manifestationen des Quantenfeldes – jene Materiekonzentrationen, die sich als stabile "Teilchen" beobachten lassen.

Zusammenfassung

Es gibt eine Vielzahl von Fällen, in denen zunächst plausibel erscheinende Annahmen über die physikalische Welt aufgegeben werden mussten. Der Grund

für die scheinbare Plausibilität dieser Vorstellungen lag in jedem Fall in einer in der einen oder anderen Weise eingeschränkten Perspektive, die später überwunden wurde.

Unter numerischem Realismus ist die Vorstellung zu verstehen, das Universum sei vollständig zu beschreiben mittels einer Menge von stets wertbestimmten numerischen Größen. Für ein solches Konzept spricht die Alltagserfahrung zunächst einmal nicht. Seine Plausibilität beruht im wesentlichen auf zwei Gründen, dem Atomismus und dem Konzept des klassischen Feldes.

Der Atomismus besagt, das Universum bestehe aus ewigen elementaren Teilchen, die zu jedem Zeitpunkt einen Ort und einen Impuls aufweisen. Er erscheint plausibel, da wir mit bloßem Auge oder mit einfachen Apparaturen nur die in unserem Umfeld vorhandenen quasi-stabilen makroskopischen Objekte, d.h. große Systeme kondensierter Materie beobachten können, nicht aber mikroskopische Strukturen.

Das Konzept klassischer Felder basiert darauf, dass wir feldartige Erscheinungen unmittelbar (oder mit einfachen Messinstrumenten) nur in einer räumlich groben Weise beobachten können.

Die scheinbare Plausibilität des numerisch realistischen Denkens beruht somit auf einer Einschränkung der Perspektive, die durch die (zunächst) fehlenden Möglichkeiten zur Beobachtung mikroskopischer Phänomene bedingt ist. Eine Überwindung dieser Einschränkung macht einen Übergang zu dem allgemeineren Konzept des faktischen Realismus erforderlich.

Die unter bestimmten Umständen beobachtbare Stabilität einzelner Teilchen beruht auf ihrer Wechselwirkung mit großen Systemen kondensierter Materie ("Teilchenfalle"). Die Stabilität dieser Systeme wiederum – auch bei ihnen handelt es sich um Manifestationen des Quantenfeldes – beruht auf ihrer großen Masse.

7. Exkurs: Das physikalische "tertium non datur" und die Rolle der Beobachtung

Das Kochen-Specker-Theorem zwingt dazu, in der Quantentheorie das physikalische "tertium non datur" als allgemeines Gesetz aufzugeben. Die verbleibenden deterministischen Gesetze erlauben es in der Regel nicht, von einer (endlichen) Menge bekannter Ereignisse auf ein weiteres (etwa ein zukünftiges) Ereignis zu schließen. Es sind demnach im allgemeinen keine positiven Schlüsse der Form

$$(*) \quad \forall_j \langle V_j, t_j \rangle_o \Rightarrow \langle A, t \rangle_o$$

möglich, wobei (V_j, t_j) und (A, t) Ereignisse sind.

Es werden hier die Definitionen

$$\Diamond_{AX} F \quad :\Leftrightarrow \quad F \cap \Omega \neq \emptyset \quad (\text{für alle } F \in \mathcal{A}_o)$$

$$\Box_{AX} F \quad :\Leftrightarrow \quad \neg \Diamond_{AX} (\neg F) \quad (\text{für alle } F \in \mathcal{A}_o)$$

zugrunde gelegt, und für alle $F, G \in \mathcal{A}_o$ schreiben wir

$$F \Rightarrow G \quad \text{für} \quad \Box_{AX}(F \rightarrow G)$$

und ebenso

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{für} \quad \Box_{AX}(F \leftrightarrow G)$$

Möglich sind (auf der Basis der Axiome MON und SEC sowie des Bewegungsgesetzes) negative Schlüsse der Form

$$(**) \quad \forall_j \langle V_j, t_j \rangle_o \Rightarrow \neg \langle A^\perp, t \rangle_o$$

Ein solcher Schluss besagt: Wenn alle Ereignisse (V_j, t_j) gegeben sind, so kann das Ereignis (A^\perp, t) nicht eintreten. Dieser Schluss ist dann möglich, wenn die (V_j, t_j) sowie (A, t) so gewählt sind, dass gilt:

$$\neg \Diamond_{AX} (\forall_j \langle V_j, t_j \rangle_o \wedge \langle A^\perp, t \rangle_o)$$

Wir wollen nun annehmen, dass das Geschehen, auf das sich die Aussage $\langle A, t \rangle_o$ bezieht, von einem Subjekt beobachtet wird, und zwar so genau beobachtet, dass die Alternative

$$\langle A, t \rangle_o \quad \text{oder} \quad \langle A^\perp, t \rangle_o$$

eine entscheidbare Alternative darstellt. Formal bedeutet dies, dass es eine

Folge B_1, \dots, B_n von sich paarweise ausschließenden Eigenschaften gibt, für die gilt:

- (a) Eines der B_k wird tatsächlich zur Zeit t beobachtet.
- (b) Jedes der B_k ist entweder in A oder in A^\perp enthalten.

Der Punkt (a) drückt aus, dass das Geschehen beobachtet wird. Punkt (b) besagt, dass die interessierende Alternative auf der Basis dieser Beobachtung entscheidbar ist.

Wenn B_k zur Zeit t beobachtet wird, so muss das mögliche Faktum $\langle B_k, t \rangle_o$ tatsächlich eingetreten sein, andernfalls hätte man es nicht mit einer Beobachtung, sondern mit einer Täuschung zu tun. Aus der Annahme (a) folgt daher, dass das mögliche Faktum $\exists_k \langle B_k, t \rangle_o$ gegeben ist.

Da jedes B_k gemäß der Annahme (b) entweder in A oder in A^\perp enthalten ist, erlaubt die Theorie (wegen des Axioms MON) den Schluss

$$\exists_k \langle B_k, t \rangle_o \Rightarrow \langle A, t \rangle_o \vee \langle A^\perp, t \rangle_o$$

Aus der Annahme, dass das Geschehen ausreichend genau beobachtet wird, folgt somit, dass das mögliche Faktum

$$(***) \quad \langle A, t \rangle_o \vee \langle A^\perp, t \rangle_o$$

eingetreten ist. Bei diesem Faktum handelt es sich um das kontingente physikalische "tertium non datur" für das spezielle Ereignis $\langle A, t \rangle_o$.

Nehmen wir nun an, die $\langle V_j, t_j \rangle_o$ sowie $\langle A, t \rangle_o$ seien so gewählt, dass der Schluss

$$(**) \quad \forall_j \langle V_j, t_j \rangle_o \Rightarrow \neg \langle A^\perp, t \rangle_o$$

aufgrund der deterministischen Gesetze der Theorie möglich ist. Mittels des kontingenten physikalischen "tertium non datur" (***) kann dann von der Voraussetzung $\forall_j \langle V_j, t_j \rangle_o$ auf das Ereignis $\langle A, t \rangle_o$ geschlossen werden.

Zusammengefasst bedeutet dies, dass ein positiver Schluss der Form (*) dann möglich ist, wenn das Geschehen (von irgendeinem Subjekt) so genau beobachtet wird, dass das Subjekt aufgrund seiner Beobachtung in der Lage ist, die Alternative

$$\langle A, t \rangle_o \text{ oder } \langle A^\perp, t \rangle_o$$

zu entscheiden. Dieselbe Argumentation ist auch dann möglich, wenn das Geschehen nicht wirklich beobachtet wird, sondern lediglich beobachtet werden *könnte*, denn auch dann muss neben der Bedingung (b) eines der B_k zur Zeit t gegeben sein.

Da ein positiver Schluss nur dann von praktischem Interesse ist, wenn das Geschehen beobachtet wird oder doch wenigstens beobachtet werden könnte, stellt das Fehlen positiver Schlüsse in der Quantentheorie keinen wesentlichen Mangel dar. In allen praxisrelevanten Fällen sind diejenigen positiven Schlüsse möglich, die man aus der "Alltagsphysik" kennt.

Anders als bei manchen Deutungen der Quantentheorie ist es hier nicht erforderlich, dass die Alternative

$$\langle A, t \rangle_0 \text{ oder } \langle A^\perp, t \rangle_0$$

tatsächlich beobachtet wird, und eine Wechselwirkung zwischen dem Beobachter und den beobachteten Objekten spielt hier ebenfalls keine Rolle. Es genügt, dass das Geschehen beobachtbar und die in Frage stehende Alternative aufgrund einer solchen Beobachtung entscheidbar ist, um von gegebenen Ereignissen auf weitere, z.B. in der Zukunft liegende Ereignisse schließen zu können.

Der Unterschied zwischen diesen Deutungen und der hier vorliegenden Argumentation kann wie folgt zusammengefasst werden:

Angenommen, eine Alternative $A \vee B$ werde beobachtet. Dann ist es nicht so, dass durch den Prozess der Beobachtung eine der beiden Möglichkeiten *hergestellt* wird. Vielmehr folgt aus der Tatsache der Beobachtung, dass *logischerweise* A oder B gegeben (wahr) sein muss, da andernfalls weder A noch B beobachtet werden könnte. Es gibt hier keine *kausale* Beziehung zwischen der Beobachtung und dem Eintreten von A oder von B.

Während in bestimmten Deutungen der Quantentheorie der Eindruck vermittelt wird, eine Messung (oder eine Messwechselwirkung) sei verantwortlich für das Vorhandensein einer beobachteten Eigenschaft, besteht hier in Wahrheit ein logischer Zusammenhang: Was beobachtet wird oder werden kann, muss (zuvor) tatsächlich vorhanden sein.

Im folgenden wollen wir auf die Rolle der Beobachtung im Zusammenhang mit dem Schrödinger'schen Katzenexperiment eingehen. Unter den Voraussetzungen dieses Experiments bezeichne L die Eigenschaft des Universums, die dann gegeben ist, wenn sich in dem Kasten genau eine lebende Katze befindet (und keine tote). Ebenso bezeichne T die Eigenschaft, die gegeben ist, wenn sich dort genau eine tote Katze befindet. Es ist somit:

$$L < \mathcal{H}$$

$$T < \mathcal{H}$$

$$L \perp T$$

Die Eigenschaft

$$R := (L \oplus T)^\perp$$

entspricht dann der möglichen Tatsache, dass entweder überhaupt kein Kasten vorhanden ist oder sich in dem Kasten gar keine Katze oder mehrere Katzen zugleich (z.B. eine lebende und eine tote) befinden.

Die Voraussetzungen des Experiments werden durch Ereignisse (V_j, t_j) beschrieben. Es ist dann

$$V := \forall_j \langle V_j, t_j \rangle_0$$

das mögliche Faktum, dass alle diese Ereignisse gegeben sind. Unter den Voraussetzungen des Experiments soll das Ereignis (R, t) unmöglich sein, d.h. es muss gelten:

$$\neg \diamond_{AX} (V \wedge \langle R, t \rangle_0)$$

Die Theorie erlaubt demnach den Schluss

$$V \Rightarrow \neg \langle R, t \rangle_0$$

Der Experimentator beobachtet nun das Geschehen. Dies bedeutet, dass es eine Menge B_k von sich paarweise ausschließenden Eigenschaften des Universums gibt, von denen der Experimentator genau eine beobachtet. Die B_k sind dabei paarweise orthogonale Unterräume von \mathcal{H} .

Wir nehmen an, dass die Beobachtung ausreicht, um zu entscheiden, ob

- die Katze lebendig ist,
- die Katze tot ist
- oder die Bedingungen für diese Entscheidung gar nicht gegeben sind, weil entweder der Kasten nicht da ist oder gar keine Katze oder mehrere Katzen vorhanden sind.

Formal bedeutet dies, dass jedes der B_k entweder in L oder in T oder in R enthalten sein muss.

Der Experimentator kann das Geschehen in dieser Weise nur beobachten, wenn eines der Ereignisse (B_k, t) tatsächlich eintritt. Aus der Beobachtbarkeit des Geschehens folgt daher, dass zum Zeitpunkt t entweder L oder T oder R vorliegt. Da R aufgrund der experimentellen Voraussetzungen ausgeschlossen ist, muss somit L oder T vorliegen. Demnach gilt ein physikalisches "tertium non datur" in der folgenden bedingten Form:

"Sind die Voraussetzungen des Experiments gegeben und ist das Geschehen ausreichend genau beobachtbar, so ist die Katze zur Zeit t entweder lebendig oder tot."

Es ist dafür nicht erforderlich, dass tatsächlich eine Beobachtung stattfindet; es

genügt vielmehr vorauszusetzen, dass das Geschehen beobachtet werden *könnte*.

Formal erlaubt die Theorie folgenden Schluss:

$$\forall \exists_k \langle B_k, t \rangle_o \Rightarrow \langle L, t \rangle_o \vee \langle T, t \rangle_o$$

In Worten kann dies so formuliert werden: Wenn die Voraussetzungen des Schrödinger'schen Katzenexperiments gegeben sind, und wenn eines der Ereignisse $\langle B_k, t \rangle$ gegeben ist (und das Geschehen somit beobachtbar ist), so befindet sich in dem Kasten entweder eine lebende oder eine tote Katze. Dies gilt unabhängig davon, ob der Experimentator den Kasten öffnet oder nicht.

Bemerkung: Wir gehen davon aus, dass es eine Eigenschaft $L < \mathcal{H}$ gibt, die dem möglichen Faktum entspricht, dass in dem Kasten (genau) eine lebende Katze vorhanden ist. Dieses mögliche Faktum ist jedoch, wenn man den Ausdruck "eine lebende Katze" wörtlich interpretiert, zunächst einmal eine Existenz- bzw. eine Oder-Aussage. Wir können annehmen, dass sich eine lebende Katze in dem Kasten befindet, wenn sie sich dort an einem bestimmten Ort und in einer bestimmten Haltung aufhält. Jede dieser Möglichkeiten wird durch eine Eigenschaft L_j des Universums modelliert. Die oben genannte Oder-Aussage lautet dann zum Beispiel:

$$\langle L_1, t \rangle_o \vee \dots \vee \langle L_n, t \rangle_o$$

Dieser Aussage entspricht unmittelbar *keine* physikalische Eigenschaft L im Sinne einer Äquivalenz

$$\langle L_1, t \rangle_o \vee \dots \vee \langle L_n, t \rangle_o \Leftrightarrow \langle L, t \rangle_o \quad (\text{für alle } t \in T)$$

Der Grund hierfür liegt in dem Fehlen des physikalischen "tertium non datur". Jedoch ist mit $L := \bigoplus_j L_j$ die kleinste Eigenschaft L gegeben, für welche die Implikation

$$\langle L_1, t \rangle_o \vee \dots \vee \langle L_n, t \rangle_o \Rightarrow \langle L, t \rangle_o \quad (\text{für alle } t \in T)$$

gilt. In *diesem* Sinne entspricht L der oben angegebenen Existenz- bzw. Oder-Aussage.

Bemerkung: Die Begriffe "tote Katze" und "lebende Katze" werden als zwei physikalische Eigenschaften des Universums verstanden, d.h. es ist $L < \mathcal{H}$ und $T < \mathcal{H}$ mit $L \perp T$. Die Frage ist dann, ob das mögliche Faktum

$$\langle L, t \rangle_o \vee \langle T, t \rangle_o$$

gegeben ist oder nicht. Würden wir hingegen "tot" definieren als *logische* Negation von lebend, etwa

$$\begin{aligned} \text{lebend} &:= \langle L, t \rangle_o \\ \text{tot} &:= \neg \text{lebend} \end{aligned}$$

so wäre das (logische) "tertium non datur"

lebend \vee tot

in jedem Fall gegeben, da die klassische Logik zugrunde gelegt wird. Es kommt also darauf an, den Begriff "tote Katze" präzise zu definieren, anders als man es im alltäglichen Denken gewohnt ist.

Diese Überlegungen zur Schrödinger'schen Katze lassen sich verallgemeinern auf den Fall beliebiger physikalischer Größen mit einem positiven und diskreten Wertebereich. Eine solche Größe G entspricht einer Observablen M der Form

$$M = \sum_j \lambda_j \pi_{A_j}$$

Dabei sind die λ_j paarweise verschiedene, positive reelle Zahlen und die A_j sind paarweise orthogonale Unterräume von \mathcal{H} . Die Observable M dient dazu, die Eigenschaften A_j "durchzunummerieren", und wir gehen davon aus, dass die Größe G zum Zeitpunkt t genau dann den Wert λ_j hat, wenn das Ereignis (A_j, t) eintritt.

Wenn die Eigenschaft

$$R := (\oplus_i A_i)^\perp$$

zum Zeitpunkt t vorhanden ist, so hat die Observable M den Wert 0. In diesem Fall hat die physikalische Größe G gar keinen ihrer möglichen Werte.

Die Eigenschaft R soll unter den Voraussetzungen des Experiments wiederum ausgeschlossen sein. Es muss also auch hier gelten:

$$\neg \diamond_{AX}(V \wedge \langle R, t \rangle_0)$$

so dass die Theorie den Schluss

$$V \Rightarrow \neg \langle R, t \rangle_0$$

erlaubt.

Für die Größe G stellt sich die Frage der Wertbestimmtheit (value definiteness) zur Zeit t . Sie ist genau dann gegeben, wenn das mögliche Faktum

$$\exists_j \langle A_j, t \rangle_0$$

eintritt.

Wie im Falle der Schrödinger'schen Katze folgt nun: Wenn das Geschehen beobachtet werden kann (und zwar so genau, dass entscheidbar ist, welches der A_j vorliegt), so ist unter den Voraussetzungen des Experiments stets genau eine der Eigenschaften (A_j, t) gegeben. Aus der Beobachtbarkeit des Geschehens

folgt also, dass die physikalische Größe G unter den Voraussetzungen des Experiments genau einen Wert hat (bedingte Wertbestimmtheit). Es ist dafür wiederum nicht erforderlich, dass eine Beobachtung tatsächlich stattfindet, sondern es genügt, dass das Geschehen beobachtet werden *könnte*.

Diese Überlegungen zeigen, warum die Wertbestimmtheit bzw. das physikalische "tertium non datur" im Alltag als eine Selbstverständlichkeit erscheint, wenn man z.B. davon ausgeht, dass jedes Objekt sich stets an einem bestimmten Ort befindet oder eine Katze, die sich in einem Kasten befindet, entweder lebendig oder tot ist. Im Kern beruht dies darauf, dass man sich im alltäglichen Leben stets nur für beobachtbares Geschehen interessiert. Aus der Beobachtbarkeit folgt aber stets die (bedingte) Wertbestimmtheit der betrachteten Observablen.

Anmerkung

Man könnte versuchen, das Axiom SEC zu ersetzen durch die beiden (zusammengenommen stärkeren) Axiome

$$\text{CONJ} := \{ (\forall_j \langle A_j, t \rangle_o) \rightarrow \langle \bigcap_j A_j, t \rangle_o \mid (A_1, A_2, \dots) \in \mathcal{C} \wedge t \in T \}$$

und

$$\text{NIL} := \{ \neg \langle o, t \rangle_o \mid t \in T \}$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{C} wie zuvor die Menge aller Folgen aus paarweise vertauschbaren Eigenschaften.

Die auf dem Axiomensystem

$$\text{AX}' := \text{MON} \cup \text{CONJ} \cup \text{NIL} \cup \text{SG}$$

basierende Theorie würde (auch ohne das physikalische "tertium non datur") positive Schlüsse erlauben.

Das Axiom CONJ umfasst speziell die Menge

$$\text{CONJ}_2 := \{ \langle A, t \rangle_o \wedge \langle B, t \rangle_o \rightarrow \langle A \cap B, t \rangle_o \mid A, B \in \mathcal{U} \text{ und } t \in T \text{ und } A \text{ ist mit } B \text{ vertauschbar} \}$$

Dieses Axiom erlaubt den Schluss von A und B auf $A \cap B$ für vertauschbare Eigenschaften.

Man kann, ähnlich wie beim Beweis der Inkonsistenz des Axiomensystems AX_1 (vgl. T.4.11), unter ausschließlicher Verwendung der Axiome MON , CONJ_2 und NIL zeigen, dass für je zwei Elemente φ und ψ von \mathcal{H} gilt:

$$[\varphi] \neq [\psi] \Rightarrow \neg \diamond_{\text{AX}'} (\langle [\varphi], t \rangle_o \wedge \langle [\psi], t \rangle_o)$$

wobei $[\varphi]$ den von dem Vektor φ erzeugten Unterraum von \mathcal{H} bezeichnet. Aus der Theorie folgt demnach, dass nie zwei verschiedene, durch eindimensionale

Unterräume dargestellte Eigenschaften des Universums zugleich gegeben sein können. Dies führt zu der Wahrscheinlichkeitsaussage

$$P(\langle [\varphi], t \rangle_o \mid \langle [\psi], t \rangle_o) = 0 \quad (\text{für } \varphi, \psi \in \mathcal{H} \text{ mit } [\varphi] \neq [\psi])$$

und ist mit dem probabilistischen Gesetz der Quantentheorie nicht in Einklang zu bringen.

Die Ersetzung des Axioms SEC durch die beiden (stärkeren) Axiome CONJ und NIL führt demnach nicht zu einem für die Quantentheorie geeigneten Axiomensystem.

8. Exkurs: Zur grundsätzlichen Erkennbarkeit konkreter Verletzungen des physikalischen "tertium non datur"

Die Theorie schließt – da das Axiom NEG aufgegeben wurde – Verletzungen des physikalischen "tertium non datur" nicht aus. Aus der logischen Inkonsistenz des Axioms NEG lässt sich sogar schließen, dass es im wirklichen Weltablauf ω_0 mindestens eine solche Verletzung geben muss. Demnach gibt es mindestens ein $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$ mit

$$\omega_0 \notin \langle A, t \rangle_o \vee \langle A^\perp, t \rangle_o$$

oder gleichbedeutend

$$\langle A, t \rangle_o \notin \omega_0 \wedge \langle A^\perp, t \rangle_o \notin \omega_0$$

Es stellt sich daher die Frage, ob es möglich ist, eine derartige Situation tatsächlich zu beobachten. Dazu wäre es notwendig, das Zutreffen der beiden Negationen

$$\neg \langle A, t \rangle_o \quad \text{und} \quad \neg \langle A^\perp, t \rangle_o$$

durch empirische Beobachtung festzustellen.

Bemerkung: Wir müssen hier davon ausgehen, dass für den wahren Weltablauf ω_0 die deterministischen Gesetze gelten, dass also $\omega_0 \in \Omega$ ist.

Wie wir oben ausgeführt haben, lassen sich logische Kombinationen (und insbesondere Negationen) möglicher Ereignisse nicht unmittelbar beobachten. Der direkte Weg, das Zutreffen einer Negation der Form $\neg \langle A, t \rangle_o$ empirisch festzustellen, besteht darin, ein Ereignis $\langle D, t \rangle_o$ zu beobachten, für das gilt: $D \perp A$. Hieraus kann mittels SEC sofort auf $\neg \langle A, t \rangle_o$ geschlossen werden.

Wenn wir außerdem $\neg \langle A^\perp, t \rangle_o$ empirisch feststellen wollen, müssen wir ein weiteres Ereignis $\langle E, t \rangle_o$ beobachten mit $E \perp A^\perp$.

Aus diesen Voraussetzungen folgt:

$$\begin{aligned} D &< A^\perp \\ E &< (A^\perp)^\perp \\ &= A \end{aligned}$$

und somit

$$D \perp E$$

Wegen $\omega_0 \in \bigcap(\text{SEC})$ folgt hieraus

$$\omega_0 \notin \langle D, t \rangle_o \wedge \langle E, t \rangle_o$$

Die beiden Ereignisse $\langle D, t \rangle_0$ und $\langle E, t \rangle_0$ können demnach nicht zugleich eintreten. Eine Verletzung des physikalischen "tertium non datur" kann daher auf diesem direkten Wege nicht beobachtet werden, und zwar auch dann nicht, wenn sie tatsächlich gegeben ist.

Das Zutreffen einer logischen Kombination aus Ereignissen kann empirisch festgestellt werden, indem man darauf, von einem beobachteten empirischen Material ausgehend, mit Hilfe logischer und physikalischer Gesetzmäßigkeiten schließt. Es stellt sich daher die Frage, ob es ein empirisches Material gibt, aus dem man mit den Axiomen der Quantentheorie auf eine konkrete Verletzung des physikalischen "tertium non datur" schließen kann. Dass dies grundsätzlich der Fall ist, zeigt das folgende Beispiel.

Es sei

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^3$$

Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$, so bezeichnen wir mit

$$[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$$

den von diesen Vektoren erzeugten Unterraum. Es seien

$$\varphi := (1, 1, 1)$$

$$\psi := (1, 1, -1)$$

Elemente von \mathcal{H} . Das empirische Material

$$\{([\varphi], t), ([\psi], t)\}$$

sei "wahr", das heißt es gelte:

$$([\varphi], t) \in \omega_0 \quad \text{und} \quad ([\psi], t) \in \omega_0$$

Es seien nun

$$a := (1, 0, 0)$$

$$b := (0, 1, 1)$$

$$c := (0, 1, -1)$$

sowie

$$A := [a]^\perp$$

$$B := [a, b]$$

$$C := [a, c]$$

Wegen $\varphi \in B$, $\psi \in C$ und $\omega_0 \in \bigcap(\text{MON})$ folgt

$$(B, t) \in \omega_0 \quad \text{und} \quad (C, t) \in \omega_0$$

Da die Vektoren a , b und c paarweise orthogonal sind, sind A , B und C paarweise vertauschbar. Außerdem gilt $A \cap B \cap C = o$. Wegen $\omega_0 \in \bigcap(\text{SEC})$ folgt daher

$$(A,t) \notin \omega_0$$

In analoger Weise lässt sich für

$$a' := (0, 1, 0)$$

$$b' := (1, 0, 1)$$

$$c' := (1, 0, -1)$$

sowie

$$A' := [a']^\perp$$

$$B' := [a', b']$$

$$C' := [a', c']$$

zeigen:

$$(A',t) \notin \omega_0$$

Wegen $a \perp a'$ gilt

$$A^\perp = [a] < [a']^\perp = A'$$

und mit $\omega_0 \in \bigcap(\text{MON})$ folgt

$$(A^\perp, t) \notin \omega_0$$

Zusammengefasst ergibt dies:

$$(A,t) \notin \omega_0 \wedge (A^\perp, t) \notin \omega_0$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\omega_0 \notin \langle A, t \rangle_o \vee \langle A^\perp, t \rangle_o$$

Aus dem möglichen empirischen Material

$$\{ ([\varphi], t), ([\psi], t) \}$$

kann somit auf die Verletzung des kontingenten physikalischen "tertium non datur" für das Ereignis (A,t) geschlossen werden. Ein Subjekt, welches die beiden Ereignisse $([\varphi], t)$ und $([\psi], t)$ tatsächlich beobachtet, kann demnach auf eine konkrete Verletzung des physikalischen "tertium non datur" schließen.

9. Zur Modellierung der möglichen Fakten bei gegebenem Axiomensystem

Wir haben sowohl für die klassische Mechanik als auch für die Quantentheorie ein bestimmtes Axiomensystem AX angegeben und damit die deterministischen Gesetze festgelegt. Mit

$$\Omega := \bigcap (AX)$$

ist dann auch die Menge Ω der physikalisch möglichen Weltabläufe eindeutig gegeben. Unter dieser Voraussetzung können wir für $A \in \mathcal{A}_0$ definieren:

$$\diamond_{AX} A \Leftrightarrow A \cap \Omega \neq \emptyset \quad (\text{Möglichkeitsoperator})$$

$$\square_{AX} A \Leftrightarrow \neg \diamond_{AX} (\neg A) \quad (\text{Notwendigkeitsoperator})$$

Aus diesen Definitionen folgt unter anderem:

$$\square_{AX} A \Leftrightarrow \Omega \subset A \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

Wir nennen zwei mögliche Fakten $A, B \in \mathcal{A}_0$ *deterministisch äquivalent*, wenn gilt:

$$\square_{AX}(A \leftrightarrow B)$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gleichung

$$A \cap \Omega = B \cap \Omega$$

erfüllt ist. Zwei verschiedene mögliche Fakten A und $B \in \mathcal{A}_0$ sind genau dann deterministisch äquivalent, wenn sie aufgrund der deterministischen Gesetze stets entweder beide eintreten oder beide nicht eintreten.

Es sei

$$\mathcal{A} := \{ A \cap \Omega \mid A \in \mathcal{A}_0 \}$$

die Spuralgebra von \mathcal{A}_0 auf Ω . Jedes Element von \mathcal{A} entspricht genau einer Äquivalenzklasse von Elementen von \mathcal{A}_0 bezüglich der deterministischen Äquivalenz. In diesem Sinne können wir auch die Elemente von \mathcal{A} als die "möglichen Fakten" ansehen. Zwei zunächst als verschieden anzusehende mögliche Fakten, die aber deterministisch äquivalent sind, werden dabei durch dasselbe Element von \mathcal{A} modelliert.

Speziell wird ein Ereignis $(A, t) \in \mathcal{E}$ in \mathcal{A} dargestellt als:

$$\langle A, t \rangle := \langle A, t \rangle_0 \cap \Omega$$

Es ist dann

$$\langle A, t \rangle = \{ \omega \in \Omega \mid (A, t) \in \omega \} \quad (\text{für } A \in \mathcal{U} \text{ und } t \in T)$$

die Menge derjenigen physikalisch möglichen Weltabläufe, in denen das Ereignis (A, t) eintritt.

Mit der Definition

$$\mathcal{R} := \{ \langle A, t \rangle \mid A \in \mathcal{U} \wedge t \in T \}$$

ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$$

die von \mathcal{R} erzeugte σ -Algebra auf Ω .

Bemerkung: $\langle A, t \rangle_0$ ist das mögliche Faktum, dass das Ereignis (A, t) eintritt, und zwar ohne Bezugnahme auf die Gültigkeit bestimmter deterministischer Gesetze. Hingegen stellt $\langle A, t \rangle$ dasselbe mögliche Faktum unter Berücksichtigung der durch das Axiomensystem AX gegebenen deterministischen Gesetze dar. \mathcal{R} entspricht der Menge der möglichen Ereignisse, und \mathcal{A} ist die Menge aller möglichen Fakten, modelliert unter Berücksichtigung der deterministischen Gesetze.

Sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Quantentheorie gibt es ein deterministisches Bewegungsgesetz. Jedes mögliche Faktum der Form $\langle A, t \rangle_0$ ist daher deterministisch äquivalent zu einem möglichen Faktum der Form $\langle B, 0 \rangle_0$. Mit der Definition

$$\langle A \rangle := \langle A, 0 \rangle \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{U})$$

gilt folglich auch:

$$\mathcal{R} = \{ \langle A \rangle \mid A \in \mathcal{U} \}$$

Auf die Elemente von \mathcal{A} lassen sich die logischen Operationen in ähnlicher Weise anwenden, wie auf die Elemente von \mathcal{A}_0 . So ist z.B.:

$$A \wedge B := A \cap B \quad (\text{für alle } A, B \in \mathcal{A})$$

$$\neg A := \Omega \setminus A \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

usw.

Für $A, B \in \mathcal{A}$ können wir außerdem die Modaloperatoren definieren:

$$\Diamond(A) := \Leftrightarrow A \neq \emptyset \quad (\text{Möglichkeit})$$

$$\Box(A) := \Leftrightarrow \neg \Diamond(\neg A) \quad (\text{Notwendigkeit})$$

$$\Diamond(A|B) := \Leftrightarrow \Diamond(A \wedge B) \quad (\text{bedingte Möglichkeit})$$

$$\Box(A|B) := \Leftrightarrow \neg \Diamond(\neg A|B) \quad (\text{bedingte Notwendigkeit})$$

Für die Notwendigkeitsoperatoren gelten unter anderem die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\Box(A) &\Leftrightarrow A = \Omega \\ \Box(A|B) &\Leftrightarrow \Box(B \rightarrow A) \\ &\Leftrightarrow B \subset A\end{aligned}$$

Aus der Definition von \Diamond folgt: Mit Ausnahme von \emptyset sind alle im Modell möglichen Fakten $A \in \mathcal{A}$ auch physikalisch möglich.

Bemerkung: Genau genommen müsste man in der Notation unterscheiden zwischen den logischen Operationen auf \mathcal{A}_0 und denen auf \mathcal{A} . Beispielsweise steht $\neg A$ für $\Omega_0 \setminus A$, wenn $A \in \mathcal{A}_0$ ist, jedoch für $\Omega \setminus A$, wenn $A \in \mathcal{A}$ ist. Da im jeweiligen Kontext keine Missverständnisse zu befürchten sind, verzichten wir auf diese Unterscheidung.

Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\wedge &:= \{ \langle A_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \} \\ &= \{ \forall_j \langle A_j \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \}\end{aligned}$$

als die Menge aller endlichen logischen Konjunktionen von Ereignissen der Form $\langle A \rangle$ mit $A \in \mathcal{U}$. \mathcal{A}^\wedge ist eine Teilmenge von \mathcal{A} . Wegen des deterministischen Bewegungsgesetzes gilt auch:

$$\mathcal{A}^\wedge = \{ \langle A_1, t_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n, t_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge (A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n) \in \mathcal{E} \}$$

Damit entspricht \mathcal{A}^\wedge der Menge aller möglichen empirischen Materialien, modelliert unter Berücksichtigung der deterministischen Gesetze.

Der Sinn der hier vorgenommenen Modellierung der möglichen Fakten als Elemente von \mathcal{A} liegt unter anderem darin, dass es bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsgesetzen nicht sinnvoll ist, deterministisch äquivalente (mögliche) Fakten voneinander zu unterscheiden. Wenn man den Elementen von \mathcal{A} (und nicht jenen von \mathcal{A}_0) Wahrscheinlichkeiten zuordnet, so wird damit die Verträglichkeit der Wahrscheinlichkeiten mit den deterministischen Gesetzen sichergestellt.

10. Das Kolmogoroff'sche Konzept der Wahrscheinlichkeit

In der Quantentheorie werden neben den bisher diskutierten deterministischen Gesetzen auch probabilistische Aussagen benötigt. Hierzu zählen Angaben über die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Messwert beobachtet wird, aber auch Aussagen über Korrelationen zwischen verschiedenen Observablen. In der klassischen Mechanik wird das Konzept der Wahrscheinlichkeit ebenfalls gebraucht, etwa wenn thermodynamische Vorgänge im Rahmen der statistischen Mechanik erklärt werden sollen.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff begegnet uns zunächst im Zusammenhang mit bestimmten Experimenten, z.B. dem Werfen eines Würfels. Ein solches Experiment beschreibt man nach Kolmogoroff mit Hilfe eines Modells $(\Omega_e, \mathcal{A}_e)$. Dabei ist Ω_e eine Menge sogenannter "Elementarereignisse" und \mathcal{A}_e eine σ -Algebra auf Ω_e . Jedes mögliche Ergebnis des Experiments wird durch ein Element A von \mathcal{A}_e dargestellt. Man geht sodann von der Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$P_e : \mathcal{A}_e \rightarrow [0,1]$$

aus. P_e ist eine σ -additive Funktion auf \mathcal{A}_e , die der Normierungsbedingung

$$P_e(\Omega_e) = 1$$

genügt. Zu jedem möglichen Ergebnis $A \in \mathcal{A}_e$ gibt $P_e(A)$ die Wahrscheinlichkeit an, mit der A bei dem Experiment herauskommt.

Jedes mögliche Ergebnis des Experiments stellt ein mögliches Faktum dar. Daher ist es im Rahmen unserer physikalischen Modellierung sinnvoll anzunehmen, dass

$$\Omega_e = \Omega_0$$

und

$$\mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}_0$$

ist. Die sogenannte "Ergebnisalgebra" des Experiments ist also eine Teilalgebra von \mathcal{A}_0 , der Algebra aller möglichen Fakten.

Das Stattfinden des Experiments entspricht dem Zutreffen einer bestimmten physikalischen Bedingung, die wir als EB_e bezeichnen wollen. EB_e beschreibt z.B. die Tatsache, dass ein Würfel in bestimmter Weise auf den Tisch geworfen wird. Wenn diese Beschreibung so "grob" ist, dass unter der Bedingung EB_e mehrere verschiedene Resultate herauskommen können, so können wir von einem "Zufallsexperiment" sprechen. Bei der Bedingung EB_e handelt es sich

ebenfalls um ein mögliches Faktum, d.h. es gilt:

$$EB_e \in \mathcal{A}_0$$

Insgesamt ist ein Experiment demnach charakterisiert durch eine experimentelle Bedingung $EB_e \in \mathcal{A}_0$ und eine Ergebnisalgebra $\mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}_0$. Die Wahrscheinlichkeiten für jedes der möglichen experimentellen Ergebnisse werden durch ein auf \mathcal{A}_e definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P_e angegeben.

Die Wahrscheinlichkeitsmaße P_e für verschiedene Experimente sind notwendigerweise miteinander verknüpft. Betrachten wir zwei Experimente, die durch EB_1 und \mathcal{A}_1 bzw. EB_2 und \mathcal{A}_2 charakterisiert sind. Es seien P_1 und P_2 die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße. Falls EB_2 sich daraus ergibt, dass zu EB_1 eine weitere Bedingung $B \in \mathcal{A}_1$ hinzutritt, falls also gilt:

$$EB_2 = EB_1 \wedge B$$

so sollte für alle $A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ gelten:

$$P_2(A) = P_1(A|B)$$

Dabei ist die bedingte Wahrscheinlichkeit wie üblich definiert durch:

$$P_1(A|B) := P_1(A \wedge B) / P_1(B)$$

Es lässt sich nur schwer ein Kriterium dafür angeben, wann ein bestimmtes mögliches Faktum $EB' \in \mathcal{A}_0$ als Bedingung eines Experiments aufgefasst werden kann. Ebenso problematisch ist die Abgrenzung derjenigen Teilalgebren $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_0$, die als Ergebnisalgebra in Frage kommen. Es scheint daher nicht sinnvoll zu sein, hier im Rahmen der physikalischen Theorie eine Beschränkung vorzunehmen. Naheliegend ist somit zunächst die Annahme, dass zu *jedem* möglichem Faktum $EB_e \in \mathcal{A}_0$ und zu *jeder* Teilalgebra \mathcal{A}_e von \mathcal{A}_0 ein auf \mathcal{A}_e definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P_e existiert.

Ausgehend von dieser Annahme können wir hier speziell den Fall $EB_0 = \Omega_0$ und die Algebra \mathcal{A}_0 betrachten. Auch hierzu muss es dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß geben, welches wir mit P_0 bezeichnen. Aus der oben angegebenen Beziehung folgt nun zu einem Experiment, das durch EB_e und \mathcal{A}_e charakterisiert ist:

$$P_e(A) = P_0(A|EB_e) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_e)$$

Alle experimentbezogenen Wahrscheinlichkeitsmaße können somit abgeleitet werden aus dem auf ganz \mathcal{A}_0 definierten Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 . Da P_0 von

keiner experimentellen Bedingung abhängig ist, stellt es einen absoluten Wahrscheinlichkeitsbegriff dar. Während die P_e jeweils zu einem Modell $(\Omega_e, \mathcal{A}_e)$ gehören, ist P_0 modellunabhängig.

Die Annahme, dass es ein auf ganz \mathcal{A}_0 definiertes, absolutes Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 gibt, aus dem sich alle experimentbezogenen Wahrscheinlichkeitsmaße P_e ableiten lassen, ist allerdings keine Selbstverständlichkeit. Zwar kann man ohne weiteres zu jedem möglichen Faktum $A \in \mathcal{A}_0$ von "der Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt" sprechen. Dies garantiert aber keineswegs, dass es eine solche Wahrscheinlichkeit tatsächlich gibt und dass für den so gegebenen Wahrscheinlichkeitsbegriff notwendigerweise die Axiome eines Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsmaßes (σ -Additivität und Normierung) gelten müssen. In der Praxis hat sich die Verwendung von Wahrscheinlichkeitsmaßen stets nur im Zusammenhang mit konkret durchführbaren, auswertbaren und wiederholbaren Experimenten bewährt.

Wenn wir von der Annahme ausgehen, dass es das auf ganz \mathcal{A}_0 definierte absolute Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 gibt, so erwarten wir von einer (probabilistischen) physikalischen Theorie, dass sie dieses P_0 angibt und somit für jedes Experiment grundsätzlich die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen experimentellen Ergebnisse vorhersagt. In der Praxis kann eine solche Vorhersage allerdings daran scheitern, dass die nötigen Berechnungen zu aufwendig und deshalb nicht durchführbar sind.

Kann man die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten experimentellen Ergebnisses einerseits auf der Basis der Theorie berechnen und andererseits mittels einer ausreichenden Anzahl von "Wiederholungen" des Experiments auch empirisch bestimmen, so lässt sich damit die Vorhersage der Theorie bestätigen bzw. widerlegen.

Ein auf \mathcal{A}_0 definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 muss in jedem Fall verträglich sein mit den deterministischen Gesetzen der Theorie. Diese Gesetze drücken sich, wie wir gesehen haben, bei gegebenem Axiomensystem AX in der Festlegung der Menge

$$\Omega := \bigcap (AX)$$

der physikalisch möglichen Weltabläufe aus. Für jedes Element $A \in \mathcal{A}_0$, welches nach den deterministischen Gesetzen physikalisch unmöglich ist, für das also die Aussage

$$\neg \diamond_{AX} A$$

gilt, muss P_0 den Wert Null annehmen. Folglich muss für alle $A \in \mathcal{A}_0$ gelten:

$$A \cap \Omega = \emptyset \Rightarrow P_0(A) = 0$$

Aus dieser Aussage lässt sich ableiten, dass für alle $A, B \in \mathcal{A}_0$ gelten muss:

$$(*) \quad A \cap \Omega = B \cap \Omega \Rightarrow P_0(A) = P_0(B)$$

Um zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 zu gelangen, das dieser Bedingung genügt, kann man auf \mathcal{A} ein Wahrscheinlichkeitsmaß P einführen. Mit

$$P_0(A) := P(A \cap \Omega) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_0)$$

erhält man dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}_0 , das die Bedingung (*) bereits aufgrund seiner Konstruktion erfüllt und folglich mit den deterministischen Gesetzen der Theorie verträglich ist. Man kann zeigen, dass sich auch umgekehrt jedes mit den deterministischen Gesetzen verträgliche Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 auf diese Weise darstellen lässt.

Die Definition von P_0 auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf \mathcal{A} macht deutlich, auf welche Weise deterministische und probabilistische Gesetze miteinander koexistieren können. Zwischen beiden gibt es keinen Gegensatz.

Sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Quantentheorie haben wir ein deterministisches Bewegungsgesetz angegeben, das gewissermaßen auf der "mikroskopischen Ebene" operiert. Dies besagt: Ein Laplace'scher Dämon könnte, wenn er über die Eigenschaften des Universums zu einem Zeitpunkt vollständig informiert wäre, zu jedem künftigen möglichen Ereignis vorhersagen, ob es eintritt oder nicht. Betrachtet man hingegen nur eine bestimmte "makroskopische" Alternative von sich gegenseitig ausschließenden Eigenschaften (A_1, \dots, A_n) , so liefert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 ein probabilistisches Gesetz für den Übergang von einem Zeitpunkt zu einem anderen. Die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für einen solchen Übergang von $t \in T$ nach $t' \in T$ werden dabei angegeben durch:

$$p_{jk} := P_0(\langle A_k, t' \rangle_0 \mid \langle A_j, t \rangle_0) \quad (\text{für } j, k \in \{1, \dots, n\})$$

Diese Überlegungen zeigen, dass sich in der Physik nicht die Frage stellt, ob "Gott würfelt" oder nicht. Allenfalls kann man sich vorstellen, es sei am Anfang der Entwicklung des Universums einmal "gewürfelt" und damit der gesamte weitere Verlauf festgelegt worden.

Zusammenfassung

Ω_0 ist die Menge der (im Rahmen der vorgenommenen Modellierung) möglichen Weltabläufe, und \mathcal{A}_0 ist die Algebra der möglichen Fakten (eine σ -Algebra auf der Menge Ω_0).

Durch ein Axiomensystem $AX \subset \mathcal{A}_0$ wird mit

$$\Omega := \bigcap (AX)$$

die Menge der physikalisch möglichen Weltabläufe definiert, und \mathcal{A} bezeichnet die Spur-Algebra von \mathcal{A}_0 auf Ω .

Von der physikalischen Theorie erwarten wir die Angabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf der σ -Algebra \mathcal{A} .

Wenn ein solches Maß P gegeben ist, wird mit

$$P_0(A) := P(A \cap \Omega) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

ein "absolutes" Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 auf \mathcal{A}_0 definiert, das mit den deterministischen Gesetzen verträglich ist.

Zu einem Experiment, das durch die Bedingung $EB_e \in \mathcal{A}_0$ und die Ergebnisalgebra $\mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}_0$ charakterisiert ist, erhalten wir mittels

$$P_e(A) := P_0(A|EB_e) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_e)$$

das Wahrscheinlichkeitsmaß, welches die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse des Experiments beschreibt.

Es ist keine Selbstverständlichkeit, dass ein solches absolutes, auf ganz \mathcal{A}_0 definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 existiert. Insbesondere folgt dies auch nicht daraus, dass man für jedes mögliche Faktum A stets von "der Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt" sprechen kann.

Weder in der klassischen Mechanik noch in der Quantentheorie besteht ein Widerspruch zwischen dem deterministischen Bewegungsgesetz (im Sinne eines mikroskopischen Determinismus) einerseits und der Existenz von Übergangswahrscheinlichkeiten für makroskopische Alternativen andererseits.

11. Exkurs: Subjektbezogene Wahrscheinlichkeiten

Auf der Basis des Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs wollen wir hier auf das Konzept der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit und auf die Veränderungen derartiger Wahrscheinlichkeiten mit der Zeit eingehen. Hierzu setzen wir voraus, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der σ -Algebra \mathcal{A} ist, beispielsweise das von einer physikalischen Theorie angegebene Wahrscheinlichkeitsmaß.

Wenn ein Subjekt s zum Zeitpunkt τ über ein empirisches Wissen $\{B_1, \dots, B_n\}$ verfügt, wobei die B_j Elemente von \mathcal{A} sind, so kann dieses Wissen zusammenfassend durch das mögliche Faktum

$$W_{s,\tau} := B_1 \wedge \dots \wedge B_n$$

beschrieben werden. Die subjektbezogene Wahrscheinlichkeit für das Subjekt s zur Zeit τ wird dann angegeben durch das mittels

$$P_{s,\tau}(A) := P(A|W_{s,\tau}) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A})$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Eine subjektbezogene Wahrscheinlichkeit ist demnach eine bedingte Wahrscheinlichkeit, bei der das (empirische) Wissen eines Subjekts in der Bedingung steht.

Das subjektbezogene Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{s,\tau}$ gibt an, von welchen Wahrscheinlichkeitswerten das Subjekt bei gegebenem Wissen ausgehen *sollte*; dies gilt unabhängig davon, ob das Subjekt diese Werte tatsächlich kennt oder überhaupt mit Wahrscheinlichkeiten umgehen kann.

Wir betrachten nun ein zeitabhängiges mögliches Faktum der Form A_t . Beispielsweise könnte A_t bedeuten, dass es zur Zeit t regnet. Der Ausdruck

$$P_{s,\tau}(A_t) = P(A_t|W_{s,\tau})$$

ist dann in zweifacher Hinsicht zeitabhängig. Zum einen kann die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, im Verlauf des Tages abnehmen oder zunehmen. In den meisten Fällen wird eine solche Änderung der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit mit der Zeit in stetiger Weise erfolgen. Zum andern kann das Subjekt (durch eine Beobachtung oder eine Messung) zusätzliches Wissen erwerben, so dass sich $W_{s,\tau}$ in Abhängigkeit von dem Parameter τ ändert. In diesem Fall ändert sich die subjektbezogene Wahrscheinlichkeit sprunghaft.

Diese sprunghafte Änderung der (subjektbezogenen) Wahrscheinlichkeit beruht auf der Änderung der Bedingung in dem Ausdruck

$$P(A_t|W_{s,\tau})$$

Ein vernünftiges Subjekt, das über ein Wissen W verfügt, wird sich zunächst für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|W)$$

eines möglichen Faktums A interessieren. Wenn das Subjekt nun zusätzliches Wissen erwirbt, indem es ein Faktum B beobachtet, so wird sich sein Interesse anschließend auf den Ausdruck

$$P(A|W \wedge B)$$

richten. Die sprunghafte Änderung der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit bedeutet daher keine Änderung einer objektiven Größe im Laufe der Zeit. Sie beschreibt vielmehr, wie sich das Interesse eines (vernünftigen) Subjekts aufgrund einer Zunahme seines Wissens auf eine andere bedingte Wahrscheinlichkeit verlagert.

Es besteht eine offensichtliche Analogie zum Verhalten von "Quantenzuständen", so wie sie in der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie interpretiert werden. Ein solcher "Quantenzustand" ändert sich einerseits kontinuierlich mit der Schrödingergleichung, andererseits ändert er sich sprunghaft im Falle einer Messung oder Beobachtung. Dies legt die Vermutung nahe, dass es sich bei "Quantenzuständen" um theoretische Konstrukte handelt, die zur Beschreibung subjektbezogener Wahrscheinlichkeiten dienen.

12. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik

Wir betrachten hier die herkömmliche Version der klassischen Mechanik. Dazu sei

$$Z := \mathbb{R}^{6N}$$

der Phasenraum ($N = \text{Anzahl der Teilchen}$) und \mathcal{U} die Borelalgebra auf Z . Die Menge \mathcal{U} stellt die möglichen Eigenschaften des Universums dar. Wie im allgemeinen Fall seien hierzu \mathcal{E} , Ω_0 und \mathcal{A}_0 definiert. Es sei weiter

$$\text{Pf}_\beta := \{ p : T \rightarrow Z \mid \forall_{t \in T} p(t) = \beta_t(p(0)) \}$$

die Menge aller Pfade im Phasenraum, die dem Bewegungsgesetz genügen. Mit der Definition

$$\omega_p := \{ (A, t) \in \mathcal{E} \mid p(t) \in A \} \quad (\text{für alle } p \in \text{Pf}_\beta)$$

ist die Menge der physikalisch möglichen Weltabläufe gegeben durch

$$\Omega := \{ \omega_p \mid p \in \text{Pf}_\beta \}$$

Da jeder Pfad $p \in \text{Pf}_\beta$ durch seinen Wert zum Zeitpunkt 0 bereits eindeutig festgelegt ist, kann Ω mit dem Phasenraum Z identifiziert werden. Ebenso entspricht die Mengenalgebra \mathcal{A} auf Ω (d.h. die Spuralgebra von \mathcal{A}_0 auf Ω) der Borelalgebra \mathcal{U} auf Z .

Formal lässt sich diese Entsprechung folgendermaßen darstellen: Zu $z \in Z$ sei p_z derjenige Pfad, welcher durch

$$p_z(t) := \beta_t(z) \quad (\text{für alle } t \in T)$$

definiert ist. Die Abbildung

$$f : Z \rightarrow \Omega$$

sei dann gegeben durch:

$$f(z) := \omega_{p_z} \quad (\text{für alle } z \in Z)$$

Man kann leicht zeigen, dass f bijektiv ist. Folglich induziert f auch eine bijektive Mengenabbildung zwischen den Potenzmengen:

$$f : \wp(Z) \rightarrow \wp(\Omega)$$

Für diese Abbildung lässt sich beweisen:

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{A}$$

Somit stellt f auch eine Bijektion von \mathcal{U} nach \mathcal{A} her.

Wenn wir vom Kolmogoroff'schen Konzept der Wahrscheinlichkeit ausgehen, so sollte das Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik nun angegeben werden durch ein auf \mathcal{A} definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P . Mindestens erwarten wir, dass dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz invariant ist gegenüber Koordinatentransformationen. Demzufolge suchen wir ein translationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{U} . Unter "Translationen" sind hierbei Verschiebungen des Nullpunktes der Orts- bzw. Impuls-Koordinaten sämtlicher Teilchen zu verstehen.

Man kann zeigen, dass ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{U} nicht existiert, da die Normierung auf Eins nicht mit der Invarianz gegenüber den unendlich vielen möglichen Translationen verträglich ist. Wir müssen daher die Forderung der Normierung fallenlassen und suchen stattdessen nach einem translationsinvarianten Maß auf \mathcal{U} , aus dem sich die zur Beschreibung von Zufallsexperimenten benötigten bedingten Wahrscheinlichkeitsmaße ableiten lassen.

Da wir von einem physikalischen Gesetz erwarten, dass es eine möglichst einfache und allgemeingültige Form hat, und da es keinen Grund gibt, bestimmte Punkte im Phasenraum gegenüber anderen Punkten von vornherein auszuzeichnen, ist es naheliegend, von der Gleichverteilung auf dem Phasenraum auszugehen. Das (bis auf einen konstanten Faktor) einzige Maß auf \mathcal{U} , welches diesem Kriterium entspricht, ist das Lebesguemaß λ . Dieses Maß ist insbesondere nicht auf Eins normierbar. Die oben angegebene Bijektion von Z nach Ω erlaubt es, ein entsprechendes Maß auch auf \mathcal{A} zu definieren. Der Einfachheit halber bezeichnen wir dieses Maß ebenfalls mit λ und sprechen vom Lebesguemaß auf \mathcal{A} .

Bekanntlich ist das Lebesguemaß auf \mathcal{A} nicht nur invariant gegenüber Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems, sondern auch gegenüber dem Ablauf der Zeit (Liouville'scher Satz über die Erhaltung des Phasenvolumens). Aus diesem Grunde kann man sagen, dass unter λ jeder Pfad im Phasenraum, der dem Bewegungsgesetz genügt, dieselbe "Wahrscheinlichkeit" hat und somit jeder physikalisch mögliche Weltablauf $\omega \in \Omega$ gleich "wahrscheinlich" ist.

Anstelle des gesuchten Wahrscheinlichkeitsmaßes P haben wir also im Falle der klassischen Mechanik lediglich ein (nicht auf Eins normierbares) Maß λ auf der Algebra \mathcal{A} .

Auf der Basis von λ lässt sich bei einer gegebenen Bedingung $B \in \mathcal{A}$ mittels

$$P(A|B) := \lambda(A \wedge B) / \lambda(B) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

ein bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß ableiten. Voraussetzung für diese Definition ist allerdings, dass $\lambda(B)$ endlich ist und nicht den Wert Null hat. $P(\cdot|B)$ entspricht der Gleichverteilung auf B . Insofern beschreibt das Maß λ (obwohl

es kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist) in einem verallgemeinerten Sinne die "Gleichverteilung" auf Ω .

Bemerkung: Das Lebesguemaß λ ist nicht invariant gegenüber einer Veränderung der Skalierung (der Maßeinheit) von Orten und Impulsen. Vielmehr führt eine solche Veränderung zur Multiplikation von λ mit einer Konstanten. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ bleiben dabei aber unverändert.

Bemerkung: Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeitsmaße zeigt, dass die fehlende Normierung von λ keinen Mangel darstellt. In der Praxis benötigt man niemals die absolute Wahrscheinlichkeit eines möglichen Faktums, sondern immer nur bedingte Wahrscheinlichkeiten. Deren Normierung auf Eins wird durch die Quotientenbildung bei der Definition erreicht.

Bemerkung: Aufgrund der angegebenen Definition entspricht die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(\langle A, t \rangle | \langle B, s \rangle)$$

für $A, B \in \mathcal{U}$ und $s, t \in T$ dem Anteil der Pfade, die zur Zeit t die Menge A erreichen, innerhalb der Menge jener Pfade, die zur Zeit s in B beginnen. Auf diese Weise ist die Existenz eines probabilistischen Gesetzes in der klassischen Mechanik vereinbar mit dem Bestehen des deterministischen Bewegungsgesetzes.

Die Beschränkung der Definition von $P(A|B)$ auf Bedingungen B mit $0 < \lambda(B) < \infty$ steht einer Anwendung auf konkrete Experimente nicht entgegen. Zusätzlich zu den übrigen experimentellen Bedingungen kann man stets die Annahme machen, dass alle Elementarteilchen des Universums sich (zu Beginn des Experiments) in einem zwar sehr großen, aber doch endlichen Raumsegment aufhalten, und dass ihre Impulse ebenfalls durch einen großen, aber endlichen Bereich eingeschränkt sind. Man erreicht damit, dass die experimentelle Bedingung endliches Lebesguemaß hat. Umgekehrt wird die experimentelle Bedingung die Gegebenheiten nie in einer so präzisen Weise beschreiben, dass sie das Lebesguemaß Null haben könnte.

In der Praxis erhalten wir so für ein Experiment, das durch eine Bedingung $EB_e \in \mathcal{A}$ und eine Ergebnisalgebra $\mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}$ beschrieben wird, mit

$$P_e(A) := \lambda(A \wedge EB_e) / \lambda(EB_e) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_e)$$

das gewünschte Wahrscheinlichkeitsmaß, welches zu jedem möglichen experimentellen Ergebnis die Wahrscheinlichkeit angibt.

Zusammenfassend können wir feststellen: Im Falle der klassischen Mechanik lässt sich (in sinnvoller Weise) kein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{A} definieren, aus dem sich zu jedem Experiment die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse ableiten ließen. Der wesentliche Grund hierfür liegt darin, dass die Eigenschaften des Universums auf der Basis eines unendlich großen Phasen-

raumes modelliert werden. Wenn wir jedoch auf die für Wahrscheinlichkeitsmaße charakteristische Normierung auf Eins verzichten, so können wir eine Mengenfunktion λ mit den Eigenschaften eines Maßes angeben, die für alle praktisch relevanten Fälle die interessierenden (bedingten) Wahrscheinlichkeiten festlegt.

Anmerkung 1

Man könnte die Auffassung vertreten, dass eine probabilistische Theorie nur dann als vernünftig angesehen werden kann, wenn sie es erlaubt, die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse beliebiger Experimente aus einem absoluten Wahrscheinlichkeitsmaß abzuleiten. Demnach müsste man davon ausgehen, dass jedem möglichen Faktum (d.h. jeder logischen Kombination aus Ereignissen, die aufgrund unserer Modellierung möglich sind) ein Wahrscheinlichkeitswert zugeordnet werden kann, und zwar so,

- dass sich insgesamt ein (σ -additives und normiertes) Wahrscheinlichkeitsmaß P auf A ergibt
- und dass sich hieraus zu jedem Experiment die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse ableiten lassen.

Der Fall der klassischen Mechanik macht deutlich, dass diese Annahme, so plausibel sie bei einer naiven Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zunächst erscheinen mag, nicht aufrechtzuerhalten ist. Die bloße Tatsache, dass man allgemein von "der Wahrscheinlichkeit von A " sprechen kann, garantiert noch nicht die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes mit den genannten Eigenschaften.

Anmerkung 2

Da es bereits im Falle der klassischen Mechanik kein absolutes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, aus dem sich die zu den möglichen Experimenten gehörenden Wahrscheinlichkeitsmaße P_e ableiten ließen, und da sich das Konzept des additiven und normierten Wahrscheinlichkeitsmaßes nur bezogen auf konkrete Experimente in der Praxis bewährt hat, könnte man sich darauf zurückziehen, lediglich die Wahrscheinlichkeitsmaße P_e überhaupt zu betrachten und auf die Ableitung der P_e aus dem Maß λ zu verzichten.

Die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsmaße P_e aus dem "absoluten" Maß λ hat jedoch den Vorteil, dass hierdurch die erforderlichen Beziehungen zwischen den zu verschiedenen Experimenten gehörenden P_e hergestellt werden. Die Einführung des "absoluten" Maßes λ ist deshalb sinnvoll, auch wenn λ selbst kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Anmerkung 3

Das Lebesguemaß λ ist (auch abgesehen von der Multiplikation mit einem konstanten Faktor) nicht das einzige Maß auf \mathcal{A} , welches gegenüber Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems und gegenüber dem Zeitablauf invariant ist. In Frage kommt beispielsweise auch eine Beschränkung auf ein Energieband der Form $E \in \Delta E$, indem man definiert:

$$\lambda_{\Delta E}(A) := \lambda(A \cap (E \in \Delta E)) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Derartige Maße lassen sich außerdem "mischen". Für disjunkte Intervalle $\Delta E_1, \dots, \Delta E_n$ sowie Gewichte $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ mit

$$\sum_j p_j = 1$$

hat auch

$$\lambda' := \sum_j p_j \lambda_{\Delta E_j}$$

die erforderlichen Invarianzeigenschaften. Durch einen Grenzprozess kann man darüber hinaus zu jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung F auf $[0, \infty)$ ein Maß λ_F definieren, welches für jeden einzelnen Energiewert einer Gleichverteilung entspricht und unter dem die Energie die durch F vorgegebene Verteilung aufweist. Auch dieses Maß ist gegenüber Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems und gegenüber dem Zeitablauf invariant.

Anmerkung 4

Geht man von dem durch das Lebesguemaß λ angegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetz aus, so folgt beispielsweise für ein Würfelexperiment, dass aufgrund der Symmetrie des Würfels jedes mögliche Ergebnis bei einem Würfelwurf dieselbe Wahrscheinlichkeit hat. Die praktische Erfahrung mit derartigen Würfelexperimenten (sowie vielen weiteren Experimenten) steht so im Einklang mit dem von uns angegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik. Ebenso lassen sich Vorgänge, die mit einer Zunahme der Entropie einhergehen – wie z.B. der Temperaturengleich in einer Flüssigkeit – auf der Basis dieses Gesetzes verstehen. Gleiches gilt auch dann, wenn man λ durch ein λ_F mit einer passenden Wahrscheinlichkeitsverteilung F ersetzt.

Anmerkung 5

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ sind nicht nur invariant gegenüber Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems oder Änderungen der

Skalierung, sondern darüber hinaus invariant gegenüber beliebigen affinen Transformationen des Phasenraumes Z , d.h. gegenüber bijektiven Abbildungen der Form

$$z \rightarrow Lz + z_0$$

wobei z_0 ein Element von Z und L eine lineare Abbildung von Z nach Z ist.

Anmerkung 6

Die klassische Mechanik muss aufgrund der Quantenexperimente als empirisch widerlegt gelten. Allerdings gilt dies nur im probabilistischen Sinne, d.h. wenn wir das Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik voraussetzen. Die deterministischen Gesetze für sich allein genommen (und insbesondere das Bewegungsgesetz) stehen hingegen nicht im Widerspruch zu den experimentellen Befunden.

Man betrachte hierzu beispielsweise ein Experiment, bei dem Elektronen auf einen Doppelspalt treffen, wodurch ein Interferenzmuster erzeugt wird. Die deterministischen Gesetze der klassischen Mechanik schließen nicht aus, dass die Elektronen, welche das Muster bilden, aufgrund der thermischen Bewegung gerade in der Weise zufällig aus dem Material, aus dem die Doppelspaltkonstruktion besteht, herausgeschleudert werden, dass das beobachtete Interferenzmuster entsteht. Das sich ergebende Muster ist somit aus Sicht der klassischen Mechanik nicht völlig unmöglich, es ist lediglich (extrem) unwahrscheinlich. Durch Wiederholungen des Experiments lässt sich die Wahrscheinlichkeit zwar noch sehr viel weiter verringern, am Prinzip ändert sich hierdurch aber nichts.

Von Unwahrscheinlichkeit kann nur dann die Rede sein, wenn ein Wahrscheinlichkeitsgesetz vorausgesetzt wird. Die klassische Mechanik kann somit aufgrund der Quantenexperimente nur als widerlegt gelten, insofern sie ein solches Gesetz beinhaltet. Widerlegung bedeutet in diesem Fall, dass die Ergebnisse der Experimente unter diesem Gesetz extrem unwahrscheinlich sind.

Die Aussage, dass die klassische Mechanik empirisch widerlegt ist, kann demnach nur so verstanden werden: Wenn diese Theorie mit einem sinnvollen Wahrscheinlichkeitsgesetz ausgestattet wird, so erweist sie sich als empirisch widerlegt durch das Eintreten von Resultaten, die aufgrund dieses Gesetzes extrem unwahrscheinlich sind.

13. Absolute Wahrscheinlichkeiten in der Quantenmechanik

Wir erinnern zunächst an die Definition der Algebra \mathcal{A} auf der Basis der deterministischen Axiome der Theorie. Das Axiomensystem der Quantenmechanik ist gegeben durch

$$AX := SG \cup MON \cup SEC$$

Die Menge der physikalisch möglichen Weltabläufe ist dann definiert als

$$\Omega := \bigcap (AX)$$

Zu jedem $A < \mathcal{H}$ und $t \in T$ stellt

$$\langle A, t \rangle := \langle A, t \rangle_0 \cap \Omega$$

das Ereignis $\langle A, t \rangle$ dar als eine Teilmenge von Ω . Für jeden physikalisch möglichen Weltablauf $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\langle A, t \rangle \in \omega \Leftrightarrow \omega \in \langle A, t \rangle \quad (\text{für alle } A < \mathcal{H} \text{ und } t \in T)$$

Aus dem Axiom MON lässt sich für alle $A, B < \mathcal{H}$ und $t \in T$ die Aussage

$$\underline{MON} \quad A < B \Rightarrow \langle A, t \rangle \subset \langle B, t \rangle$$

ableiten. Wegen des Axioms SEC gilt ferner für jede Folge paarweise vertauschbarer Unterräume $A_j < \mathcal{H}$ die Implikation

$$\underline{SEC} \quad \bigcap_j A_j = 0 \Rightarrow \forall_j \langle A_j, t \rangle = \emptyset$$

Als Spezialfall ergibt sich daraus für alle $A, B < \mathcal{H}$ und $t \in T$ die Aussage

$$\underline{ORTH} \quad A \perp B \Rightarrow \langle A, t \rangle \wedge \langle B, t \rangle = \emptyset$$

Aufgrund des Axioms SG gilt außerdem für alle $A < \mathcal{H}$ und $t \in T$ die Gleichung

$$\underline{SG} \quad \langle A, 0 \rangle = \langle U_t A, t \rangle$$

Ähnlich wie im Falle der klassischen Mechanik ist aufgrund des deterministischen Bewegungsgesetzes jeder physikalisch mögliche Weltablauf bereits eindeutig bestimmt durch die zu ihm gehörenden Ereignisse zur Zeit 0. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Aussage SG.

Mit der Abkürzung

$$\langle A \rangle := \langle A, 0 \rangle \quad (\text{für alle } A < \mathcal{H})$$

erhalten wir aus den Aussagen MON, SEC und ORTH als Spezialfälle:

$$\begin{aligned} A < B &\Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle && (\text{für } A, B < \mathcal{H}) \\ \bigcap_j A_j = 0 &\Rightarrow \forall_j \langle A_j \rangle = \emptyset && (\text{für vertauschbare } A_j < \mathcal{H}) \\ A \perp B &\Rightarrow \langle A \rangle \wedge \langle B \rangle = \emptyset && (\text{für alle } A, B < \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen SG die Gleichung

$$\langle A, t \rangle = \langle U_{-t} A \rangle \quad (\text{für alle } A < \mathcal{H} \text{ und } t \in T)$$

Mit der Definition

$$\mathcal{R} := \{ \langle A, t \rangle \mid A < \mathcal{H} \wedge t \in T \}$$

ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$$

die von \mathcal{R} auf Ω erzeugte σ -Algebra. Wegen SG gilt auch

$$\mathcal{R} = \{ \langle A \rangle \mid A < \mathcal{H} \}$$

Durch \mathcal{R} wird die Menge der möglichen Ereignisse in \mathcal{A} dargestellt. Mit der Definition

$$\mathcal{A}^\wedge := \{ \langle A_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, \dots, A_n < \mathcal{H} \}$$

können wir die Menge der möglichen empirischen Materialien ebenfalls als Teilmenge von \mathcal{A} darstellen.

Unser Ziel besteht nun darin, auf \mathcal{A} ein (absolutes) Wahrscheinlichkeitsmaß P anzugeben, aus dem sich die probabilistischen Aussagen der Quantenmechanik ableiten lassen.

Im Falle der klassischen Mechanik existiert, wie wir gesehen haben, kein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{A} , das gegenüber Koordinatentransformationen invariant wäre. Ein ähnliches Problem tritt auch in der Quantentheorie auf. Um dies zu zeigen, betrachten wir eine Observable X , die den Ort eines beliebigen Subsystems Q des Hilbertraums \mathcal{H} angibt. Beispielsweise könnte Q ein Elektron darstellen und X die Observable sein, die dem Ort von Q in der x -Richtung entspricht.

Es sei

$$\Delta X := [a, b]$$

ein beliebiges endliches Teilintervall von \mathbb{R} . Mit d wählen wir eine Verschiebungskonstante, die größer ist als die Länge des Intervalls ΔX :

$$d > b - a$$

Damit definieren wir die um ganzzahlige Vielfache von d verschobenen Intervalle:

$$\Delta X_k := [a+kd, b+kd] \quad (\text{für alle } k \in \mathbb{Z})$$

Die Aussage $X \in \Delta X_k$ entspricht einem Unterraum B_k von \mathcal{H}_Q , dem Hilbertraum des Subsystems Q . Zu B_k sei

$$A_k := \alpha_Q(B_k)$$

die entsprechende Darstellung als Unterraum von \mathcal{H} , d.h. als Eigenschaft des Universums.

Da die Intervalle ΔX_k paarweise disjunkt sind, handelt es sich bei den B_k und folglich auch bei den A_k um paarweise orthogonale Unterräume. Die Mengen $\langle A_k \rangle$ sind daher paarweise disjunkt.

Wir nehmen nun an, P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A} , welches gegenüber Koordinatentransformationen invariant ist, und setzen

$$c_k := P(\langle A_k \rangle)$$

Da P translationsinvariant ist, müssen alle c_k denselben Wert haben, d.h. es muss gelten:

$$c_k = c_0 \quad (\text{für alle } k \in \mathbb{Z})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &\geq P(\exists_k \langle A_k \rangle) \\ &= \sum_k P(\langle A_k \rangle) \\ &= \sum_k c_k \\ &= \sum_k c_0 \end{aligned}$$

Da es sich hierbei um eine unendliche Summe handelt, muss c_0 gleich Null sein. Wegen $\Delta X = \Delta X_0$ folgt:

$$\begin{aligned} P(X \in \Delta X) &= P(\langle A_0 \rangle) \\ &= c_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes beliebige endliche Intervall $\Delta X \subset \mathbb{R}$. Wir können speziell $\Delta X := [-M, M]$ setzen und $M \rightarrow \infty$ gehen lassen. Wenn wir annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X \in \Delta X)$ in stetiger Weise von ΔX abhängt, erhalten wir durch einen Grenzübergang:

$$P(X \in \mathbb{R}) = 0$$

Dies besagt: Das Subsystem Q hält sich mit Wahrscheinlichkeit Eins nirgends im Raum auf. Damit ist gezeigt, dass es auch im Falle der Quantenmechanik kein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{A} gibt, welches gegenüber Koordinatentransformationen invariant wäre.

Ebenso wie im klassischen Fall müssen wir daher auch für die Quantenmechanik die Forderung aufgeben, dass die gesuchte Mengenfunktion auf Eins

normiert sein soll. Stattdessen können wir allenfalls ein Maß

$$\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

suchen, aus dem sich (zu $A, B \in \mathcal{A}$) bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A|B) := \lambda(A \cap B) / \lambda(B)$$

für den Fall $\lambda(B) > 0$ und $\lambda(B) < \infty$ ableiten lassen.

14. Probleme des Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Quantenmechanik

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik, für die sich mit dem Lebesguemaß λ auf \mathcal{A} wenigstens ein Maß angeben lässt, aus dem die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse von Experimenten abgeleitet werden können, stoßen wir in der Quantenmechanik auf weitere Probleme. Um dies zu sehen, nehmen wir zunächst an, es gebe auch für diesen Fall ein Maß

$$\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

aus dem sich die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Theorie ergeben. Mit

$$P(A|B) := \lambda(A \wedge B) / \lambda(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \lambda(B) < \infty)$$

definieren wir dazu die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Es sei $\varphi \in \mathcal{H}$ ein beliebiges, durch $|\varphi| = 1$ normiertes Element des Hilbertraums. Es ist dann $[\varphi] < \mathcal{H}$ ein eindimensionaler Unterraum. Wir schreiben kurz

$$\langle \varphi \rangle := \langle [\varphi] \rangle$$

und interessieren uns für die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung $\langle \varphi \rangle$, d.h. für $P(\cdot | \langle \varphi \rangle)$.

Speziell kann man $P(\cdot | \langle \varphi \rangle)$ anwenden auf mögliche Fakten der Form $\langle E \rangle$, wobei $E < \mathcal{H}$ ist. Da sich φ im Sinne der herkömmlichen Interpretation der Quantentheorie als "Zustandsvektor" deuten lässt, erwarten wir die bekannte und empirisch anscheinend bestätigte Beziehung:

$$\text{PROB: } P(\langle E \rangle | \langle \varphi \rangle) = |\pi_E \varphi|^2 \quad (\text{für alle } E < \mathcal{H} \text{ und } \varphi \in \mathcal{H} \text{ mit } |\varphi| = 1)$$

Ausgehend von einem festen Vektor φ mit $|\varphi| = 1$ setzen wir zur Abkürzung:

$$P_\varphi(A) := P(A | \langle \varphi \rangle) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Damit sollte P_φ die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes haben.

Aufgrund des Axioms SEC gilt für alle $E < \mathcal{H}$

$$\langle E \rangle \wedge \langle E^\perp \rangle = \emptyset$$

Mit der Aussage PROB folgt daher

$$\begin{aligned} P_\varphi(\langle E \rangle \vee \langle E^\perp \rangle) &= P_\varphi(\langle E \rangle) + P_\varphi(\langle E^\perp \rangle) \\ &= |\pi_E \varphi|^2 + |\pi_{E^\perp} \varphi|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dies besagt, dass unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_φ das physikalische "tertium non datur" (das Axiom NEG) mit Wahrscheinlichkeit Eins gilt.

Wie wir oben ausgeführt haben, lässt sich die Inkonsistenz des Axiomensystems

$$AX_1 = SG \cup MON \cup SEC \cup NEG$$

beweisen, indem man zeigt, dass für

$$\Omega_1 := \bigcap (AX_1)$$

gilt:

$$\Omega_1 = \emptyset$$

Da nun das Axiom NEG unter P_φ mit Wahrscheinlichkeit Eins gilt, kann in analoger Weise bewiesen werden:

$$P_\varphi(\Omega) = 0$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu den Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Daraus folgt, dass die Aussage PROB mit den Axiomen SG, MON und SEC nicht verträglich ist.

Bemerkung: Das Axiom SG wird beim Beweis der Inkonsistenz von AX_1 nicht benötigt. Die Aussage PROB ist dementsprechend schon mit den Axiomen MON und SEC unverträglich.

Wir diskutieren nun ein weiteres Problem, zu dem die Aussage PROB führt. Es seien $a, b \in \mathcal{H}$ zwei normierte Elemente des Hilbertraums. Mit a^* bezeichnen wir den zu a adjungierten Vektor. Aus PROB folgt dann:

$$P(\langle a | \langle b \rangle) = |\pi_{[a]} b|^2 = |a^* b|^2$$

Es gilt also

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle) / \lambda(\langle b \rangle) = |a^* b|^2$$

und ebenso umgekehrt

$$\lambda(\langle b \rangle \wedge \langle a \rangle) / \lambda(\langle a \rangle) = |b^* a|^2$$

Aus diesen beiden Beziehungen folgt (zunächst für $a^* b \neq 0$, dann aber auch allgemein) die Gleichung

$$\lambda(\langle a \rangle) = \lambda(\langle b \rangle)$$

Da diese Überlegung auf beliebige normierte Vektoren $a, b \in \mathcal{H}$ anwendbar ist, lässt sich durch eine Renormierung von λ erreichen, dass gilt:

$$\lambda(\langle a \rangle) = 1 \quad (\text{für alle } a \in \mathcal{H} \text{ mit } |a| = 1)$$

Wir erhalten dann

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle) = |a^* b|^2 \quad (\text{für alle } a, b \in \mathcal{H} \text{ mit } |a| = |b| = 1)$$

sowie

$$\begin{aligned}\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle b \rangle) &= \lambda(\langle a \rangle) - \lambda(\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle) \\ &= 1 - |a^* b|^2 \\ &= 1 - \cos^2 \sphericalangle(a, b) \\ &= \sin^2 \sphericalangle(a, b)\end{aligned}$$

Das Maß λ erfüllt für alle $A, B \in \mathcal{A}$ die Beziehungen

$$A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B) \quad (\text{Monotonie})$$

und

$$\lambda(A \vee B) \leq \lambda(A) + \lambda(B) \quad (\text{Subadditivität})$$

Jede monotone und subadditive Mengenfunktion von \mathcal{A} in $[0, \infty]$ erfüllt wegen

$$(A \wedge \neg C) \subset (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)$$

die Dreiecksungleichung

$$\lambda(A \wedge \neg C) \leq \lambda(A \wedge \neg B) + \lambda(B \wedge \neg C)$$

Wenn $\dim \mathcal{H} \geq 2$ ist, können wir \mathcal{H} darstellen als

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{H}'$$

In diesem Sinne setzen wir (mit $\beta > 0$)

$$a := (\cos \beta, \sin \beta) \oplus 0$$

$$b := (1, 0) \oplus 0$$

$$c := (\cos \beta, -\sin \beta) \oplus 0$$

Es folgt

$$\sphericalangle(a, b) = \beta$$

$$\sphericalangle(b, c) = \beta$$

$$\sphericalangle(a, c) = 2\beta$$

Für die spezielle Dreiecksungleichung

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle c \rangle) \leq \lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle b \rangle) + \lambda(\langle b \rangle \wedge \neg \langle c \rangle)$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\sin^2(2\beta) &\leq \sin^2\beta + \sin^2\beta \\ &= 2 \sin^2\beta\end{aligned}$$

und mit

$$\sin(2\beta) = 2 \sin(\beta) \cos(\beta)$$

die Ungleichung

$$4 \cos^2 \beta \leq 2$$

Diese Ungleichung ist offenbar falsch für alle $\beta \in (0, 45^\circ)$.

Für kleine Winkel β kann man approximieren:

$$\begin{aligned} \sin^2(2\beta) &\approx (2\beta)^2 \\ \sin^2\beta &\approx \beta^2 \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung geht dann über in die ebenfalls falsche Ungleichung:

$$4 \beta^2 \leq 2 \beta^2$$

Die Aussage PROB führt also zu einem Widerspruch. Der wesentliche Grund hierfür liegt darin, dass der Ausdruck

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle b \rangle) = \sin^2 \beta(a, b)$$

für zwei Vektoren a und b , die einen kleinen Winkel β bilden, aufgrund der Aussage PROB annähernd quadratisch von β abhängt. Die Dreiecksungleichung für λ erlaubt hingegen maximal eine lineare Abhängigkeit. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass zur Ableitung der Dreiecksungleichung nicht die Additivität, sondern lediglich Subadditivität und Monotonie des Maßes λ benötigt werden.

Die Annahme von PROB führt somit zu zwei Problemen. Zum einen bewirkt sie, dass das physikalische "tertium non datur" unter einer Bedingung $\langle \varphi \rangle$ mit Wahrscheinlichkeit Eins gilt. Dies führt wie zuvor zu einem Widerspruch mit den Axiomen MON und SEC. Zum andern erzeugt sie für kleine Winkel

$$\beta = \beta(a, b) \quad (\text{mit } a, b \in \mathcal{H})$$

eine annähernd quadratische Abhängigkeit des Ausdrucks

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle b \rangle)$$

von β , während die für jedes Maß gültige Dreiecksungleichung maximal eine lineare Abhängigkeit erlaubt. Beide Probleme bestehen unabhängig vom Bewegungsgesetz SG. Insgesamt ist die Aussage PROB daher nicht verträglich mit den deterministischen Axiomen MON und SEC.

Zusammenfassend müssen wir feststellen, dass es im Falle der Quantenmechanik kein Maß λ auf \mathcal{A} gibt, welches diejenigen Wahrscheinlichkeitsaussagen wiedergibt, die aus der Quantentheorie bekannt sind.

Bemerkung: Zur Ableitung der Aussage $P_\varphi(\Omega) = 0$ genügt neben den Axiomen MON und SEC die Voraussetzung, dass P_φ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A} ist, für welches die Aussage PROB gilt. Es spielt dabei keine Rolle, ob P_φ auf der Basis eines absoluten Maßes λ definiert worden ist oder nicht.

Bemerkung: Man erhält dieselben Probleme auch dann, wenn man die Axiome MON und SEC sowie die Aussage PROB nicht auf das ganze Universum, sondern lediglich auf ein Subsystem Q bezieht. Damit $P_\varphi(\Omega) = 0$ abgeleitet werden kann, muss der zu Q gehörende Hilbertraum \mathcal{H}_Q mindestens dreidimensional sein. Zur Ableitung des zweiten Widerspruchs muss lediglich $\dim \mathcal{H}_Q \geq 2$ sein.

15. Die Bell'sche Ungleichung

Das Problem der Bell'schen Ungleichung beruht ebenfalls auf der Tatsache, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{A} die Dreiecksungleichung erfüllen muss. Für beliebiges P sowie $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ folgt (mit zweimaliger Anwendung der Dreiecksungleichung)

$$P(A \wedge \neg D) \leq P(A \wedge \neg B) + P(B \wedge \neg C) + P(C \wedge \neg D)$$

Da P additiv ist, kann man ableiten:

$$P(A) - P(A \wedge D) \leq P(A) - P(A \wedge B) + P(B) - P(B \wedge C) + P(C) - P(C \wedge D)$$

Eine Umformung ergibt:

$$(*) \quad P(A \wedge B) + P(B \wedge C) + P(C \wedge D) \leq P(A \wedge D) + P(B) + P(C)$$

Dies kann als eine einfache Variante der Bell'schen Ungleichung angesehen werden.

Wir gehen wiederum von der Aussage

$$\text{PROB: } P(\langle E \rangle | \langle \varphi \rangle) = |\pi_E \varphi|^2 \quad (\text{für alle } E < \mathcal{H} \text{ und } \varphi \in \mathcal{H} \text{ mit } |\varphi| = 1)$$

aus und betrachten das zu einem festen Einheitsvektor $\varphi \in \mathcal{H}$ durch

$$P_\varphi(A) := P(A | \langle \varphi \rangle) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß P_φ auf \mathcal{A} .

Für Unterräume $E, F < \mathcal{H}$, die miteinander vertauschbar sind, gilt dann die Gleichung

$$\text{PROB2: } P_\varphi(\langle E \rangle \wedge \langle F \rangle) = |\pi_{E \cap F} \varphi|^2$$

Zum Beweis dieser Beziehung betrachten wir zwei vertauschbare Unterräume $E, F < \mathcal{H}$. Wegen MON ist

$$\langle E \cap F \rangle \subset \langle E \rangle \wedge \langle F \rangle$$

und es folgt

$$\begin{aligned} P_\varphi(\langle E \rangle \wedge \langle F \rangle) &\geq P_\varphi(\langle E \cap F \rangle) \\ &= |\pi_{E \cap F} \varphi|^2 \quad (\text{mit PROB}) \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt wegen SEC

$$\langle E \rangle \wedge \langle F \rangle \subset \neg \langle (E \cap F)^\perp \rangle$$

und es ist

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(\langle E \rangle \wedge \langle F \rangle) &\leq P_\varphi(\neg \langle (E \cap F)^\perp \rangle) \\
 &= 1 - P_\varphi(\langle (E \cap F)^\perp \rangle) \\
 &= 1 - |\pi_{(E \cap F)^\perp} \varphi|^2 \quad (\text{mit PROB}) \\
 &= |\pi_{E \cap F} \varphi|^2
 \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage PROB2 bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$. Dieser Hilbertraum kann dargestellt werden als

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_1 &:= \mathbb{C}^2 \\
 \mathcal{H}_2 &:= \mathbb{C}^2
 \end{aligned}$$

Die so gebildeten Hilberträume können z.B. der Beschreibung der Spin-Eigenschaften zweier Elektronen dienen.

In \mathcal{H} betrachten wir den Einheitsvektor

$$\begin{aligned}
 \varphi &:= 1/\sqrt{2} (1, 0, 0, 1) \\
 &\in \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

Dieser "Zustandsvektor" φ kann aufgefasst werden als Beschreibung des Falles, dass die beiden Elektronen entgegengesetzten Spin aufweisen.

Wir definieren weiter die Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}
 a &:= (\cos \beta, \sin \beta) \in \mathbb{C}^2 \\
 b &:= (1, 0) \in \mathbb{C}^2 \\
 c &:= (\cos \beta, -\sin \beta) \in \mathbb{C}^2
 \end{aligned}$$

und setzen

$$\begin{aligned}
 A &:= [a] \otimes \mathcal{H}_2 < \mathcal{H} \\
 B &:= [b] \otimes \mathcal{H}_2 < \mathcal{H} \\
 B' &:= \mathcal{H}_1 \otimes [b] < \mathcal{H} \\
 C' &:= \mathcal{H}_1 \otimes [c] < \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

A und B (bzw. B' und C') können als Spin-Eigenschaften aufgefasst werden, die am ersten (bzw. am zweiten) Elektron gemessen werden können. A ist mit B' vertauschbar, ebenso A mit C', B mit B' und B mit C'.

Mit der Standard-Orthonormalbasis (e_1, e_2) von \mathbb{C}^2 ist

$$A = [a \otimes e_1] \oplus [a \otimes e_2]$$

und daher (mit PROB)

$$\begin{aligned} P_\varphi(\langle A \rangle) &= |\pi_A \varphi|^2 \\ &= |\pi_{[a \otimes e_1]} \varphi|^2 + |\pi_{[a \otimes e_2]} \varphi|^2 \\ &= |(a \otimes e_1)^* \varphi|^2 + |(a \otimes e_2)^* \varphi|^2 \\ &= 1/2 \cos^2 \beta + 1/2 \sin^2 \beta \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$P_\varphi(\langle B \rangle) = P_\varphi(\langle B' \rangle) = P_\varphi(\langle C' \rangle) = 1/2$$

Es gilt

$$a \otimes b = (\cos \beta, 0, \sin \beta, 0)$$

und folglich

$$(a \otimes b)^* \varphi = 1/\sqrt{2} \cos \beta$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} A \cap B' &= [a] \otimes \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_1 \otimes [b] \\ &= [a \otimes b] \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} P_\varphi(\langle A \rangle \wedge \langle B' \rangle) &= |\pi_{A \cap B'} \varphi|^2 \quad (\text{mit PROB2}) \\ &= |\pi_{[a \otimes b]} \varphi|^2 \\ &= |(a \otimes b)^* \varphi|^2 \\ &= 1/2 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

Ganz analog ist auch:

$$\begin{aligned} P_\varphi(\langle B \rangle \wedge \langle C' \rangle) &= |(b \otimes c)^* \varphi|^2 \\ &= 1/2 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

Wegen

$$b \otimes b = (1, 0, 0, 0)$$

und

$$(b \otimes b)^* \varphi = 1/\sqrt{2}$$

ist ebenso

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(\langle B \rangle \wedge \langle B' \rangle) &= |(b \otimes b)^* \varphi|^2 \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Wegen

$$a \otimes c = (\cos^2 \beta, -\cos \beta \sin \beta, \cos \beta \sin \beta, -\sin^2 \beta)$$

und

$$\begin{aligned} (a \otimes c)^* \varphi &= 1/\sqrt{2} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &= 1/\sqrt{2} \cos(2\beta) \end{aligned}$$

erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(\langle A \rangle \wedge \langle C' \rangle) &= |(a \otimes c)^* \varphi|^2 \\ &= 1/2 \cos^2(2\beta) \end{aligned}$$

Bemerkung: Die berechneten Wahrscheinlichkeiten legen unter anderem auch die Korrelationen für Messungen von je einer Spin-Eigenschaft des einen und des anderen Elektrons fest.

Aus der wahrscheinlichkeitstheoretischen Ungleichung (*) erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_{\varphi}(\langle A \rangle \wedge \langle B' \rangle) + P_{\varphi}(\langle B \rangle \wedge \langle B' \rangle) + P_{\varphi}(\langle B \rangle \wedge \langle C' \rangle) \\ \leq P_{\varphi}(\langle A \rangle \wedge \langle C' \rangle) + P_{\varphi}(\langle B \rangle) + P_{\varphi}(\langle B' \rangle) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der berechneten Werte folgt:

$$1/2 \cos^2 \beta + 1/2 + 1/2 \cos^2 \beta \leq 1/2 \cos^2(2\beta) + 1/2 + 1/2$$

Multipliziert mit 2 ergibt dies:

$$1 + 2 \cos^2 \beta \leq 2 + \cos^2(2\beta)$$

Das lässt sich umformen in

$$\sin^2(2\beta) \leq 2 \sin^2 \beta$$

Für $0 < \beta < 45^\circ$ ist diese Ungleichung falsch.

Ein ähnliches Beispiel kann in jedem Hilbertraum gebildet werden, dessen Dimension mindestens vier beträgt. Auch kann man zu jedem beliebigen "Zustand" φ jeweils Unterräume A, B, B' und C' festlegen, so dass sich der Widerspruch ergibt. Hierzu muss man lediglich eine passende Orthonormalbasis wählen. Außerdem lässt sich dieser Widerspruch auch dann ableiten, wenn man die Axiome MON und SEC sowie die Aussage PROB nur für ein Subsystem Q (mit $\dim \mathcal{H}_Q \geq 4$) fordert.

Wir haben damit nochmals gezeigt, dass die Aussage PROB mit den Axiomen MON und SEC nicht verträglich ist. Im Gegensatz zu dem obigen auf der Dreiecksungleichung für λ beruhenden Widerspruchsbeweis braucht P_φ hier nicht aus einem absoluten Maß λ abgeleitet worden zu sein. Es wird neben der Normierung nur die Additivität von P_φ benötigt.

Der Inkonsistenzbeweis über die Bell'sche Ungleichung ist vor allem deshalb relevant, weil er einen Zusammenhang zu der bisherigen Debatte herstellt. Der Beweis auf der Basis der Dreiecksungleichung für λ ist insofern aufschlussreicher, als er zeigt, dass der Ausdruck $\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg \langle b \rangle)$ für annähernd gleiche Einheitsvektoren a und b nicht quadratisch vom Winkel zwischen a und b abhängen darf.

16. Zusammenfassung zu den Widersprüchen bei der Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Quantentheorie

Unsere Überlegungen zum Konzept der Wahrscheinlichkeit hatten ergeben, dass die physikalische Theorie im Idealfall ein (absolutes) Wahrscheinlichkeitsmaß P auf \mathcal{A} angeben sollte, aus dem sich die experimentbezogenen bedingten Wahrscheinlichkeiten ableiten lassen. Auf die Normierung dieses Wahrscheinlichkeitsmaßes muss man allerdings in der Quantentheorie ebenso wie in der klassischen Mechanik verzichten. Dies folgt insbesondere aus der Tatsache, dass der physikalische Raum in beiden Fällen als unendlich ausgedehnt angenommen wird und die für das Wahrscheinlichkeitsmaß anzunehmende Invarianz gegenüber Verschiebungen in diesem unendlichen Raum mit der Normierung auf Eins nicht verträglich ist.

Man kann demnach nur ein Maß λ auf \mathcal{A} suchen, aus dem sich die gewünschten bedingten Wahrscheinlichkeiten mittels

$$P(A|B) := \lambda(A \cap B) / \lambda(B) \quad (\text{für } 0 < \lambda(B) < \infty)$$

bilden lassen.

Im klassischen Fall lässt sich die Menge Ω der physikalisch möglichen Weltabläufe mit dem Phasenraum Z identifizieren und das gesuchte Maß λ als das Lebesguemaß definieren. So gelingt es, die benötigten bedingten Wahrscheinlichkeiten in vernünftiger Weise anzugeben. Die klassische Mechanik ist allerdings als empirisch widerlegt zu betrachten. Die Ergebnisse der hierzu durchgeführten (Quanten-) Experimente sind – nach den auf der Basis von λ definierten bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen – extrem unwahrscheinlich, so dass es keinen vernünftigen Zweifel an der Widerlegung dieser Theorie geben kann.

Anders als im klassischen Fall führt der Versuch, in der Quantenmechanik ein Maß λ auf \mathcal{A} anzunehmen, welches der bekannten Beziehung

$$\text{PROB: } P(\langle E | \langle \varphi \rangle) = |\pi_E \varphi|^2 \quad (\text{für } E \in \mathcal{H} \text{ und } \varphi \in \mathcal{H})$$

entspricht, zu mehreren Widersprüchen. Insbesondere erweist sich die Aussage PROB als unvereinbar mit den beiden deterministischen Axiomen MON und SEC. Dies wurde in den vorangegangenen Kapiteln auf drei Wegen gezeigt:

1. Unter $P(\langle \varphi \rangle)$ gilt, wenn wir PROB voraussetzen, das physikalische "tertium non datur" mit Wahrscheinlichkeit Eins. Dies führt in ähnlicher Weise zu einem Widerspruch wie die Annahme von NEG als Axiom. Insbesondere kann aus PROB für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ die Gleichung

$$P(\Omega | \langle \varphi \rangle) = 0$$

abgeleitet werden.

2. Die für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß geltende Bell'sche Ungleichung führt, wenn man sie auf $P(\cdot|\langle\varphi\rangle)$ anwendet und die Aussage PROB voraussetzt, zu einem Widerspruch.
3. Für ein Maß λ , das monoton und subadditiv ist, gilt die Dreiecksungleichung. Sie führt, wenn man PROB voraussetzt, zu einem Widerspruch, da der Ausdruck

$$\lambda(\langle a \rangle \wedge \neg\langle b \rangle) \quad (\text{mit } a, b \in \mathcal{H})$$

dann für kleine Winkel $\beta = \angle(a, b)$ annähernd quadratisch von β abhängt.

Das Axiom SG wird hierbei in keinem Fall benötigt und man erhält dieselben Widersprüche auch dann, wenn man die Axiome MON und SEC sowie die Aussage PROB lediglich für ein Subsystem Q fordert. Zwei der drei Inkonsistenzbeweise lassen sich auch dann führen, wenn das Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\cdot|\langle\varphi\rangle)$ nicht von einem absoluten Maß λ auf \mathcal{A} abgeleitet wird.

Es gibt somit im Falle der Quantenmechanik kein Maß λ auf \mathcal{A} , welches die aus der Quantentheorie bekannten Wahrscheinlichkeitsaussagen wiedergibt.

Der Kern der Diskussion um die "Bell'sche Ungleichung" liegt in dem Nachweis, dass bestimmte Axiome der Quantentheorie (nämlich die deterministischen Axiome MON und SEC sowie die Aussage PROB) nicht vereinbar sind mit den Axiomen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Dies bedeutet allerdings nicht, dass man nun die Existenz einer objektiven Realität oder auch die Gültigkeit der klassischen Logik in Frage stellen müsste.

Das mit dem Kochen-Specker'schen No-Go-Theorem verbundene Problem der Quantentheorie besteht in der Inkonsistenz der (einschließlich des Axioms NEG) aus der klassischen Theorie übernommenen deterministischen Axiome. Um dieses Problem zu lösen, haben wir das Axiomensystem so abgeschwächt, dass die Widersprüchlichkeit beseitigt, aber der empirische Gehalt der Theorie beibehalten wurde.

Insbesondere wurde dabei die allgemeine Wertbestimmtheit der numerischen Variablen aufgegeben. Allerdings ist die Annahme einer allgemeinen Wertbestimmtheit auf der Basis unserer alltäglichen Erfahrung auch gar nicht plausibel. Wir finden dort keinerlei mechanische Größen vor, die zu jeder Zeit einen Wert aufweisen. Beispielsweise hat ein Tennisball (d.h. eine lokale Materiezusammenballung einer bestimmten Art) nur solange einen "Ort", wie er als Tennisball vorhanden ist. Man hat es hier also nicht mit einer Größe zu tun, die *stets* einen Wert hat.

Analog zu unserem Vorgehen bei der Auflösung der Widersprüche in den deterministischen Axiomen muss es nun unser Ziel sein, die Quantentheorie so zu formulieren, dass es nicht zu den mit der Aussage PROB einhergehenden Widersprüchen kommt, aber der empirische Gehalt der aus der Quantentheorie

bekanntem Wahrscheinlichkeitsgesetz erhalten bleibt. Hierzu können wir entweder die Grundaussagen der Quantentheorie (MON, SEC, SG und PROB) oder aber die Axiome des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in passender Weise abschwächen. Dabei wollen wir nur solche Aussagen zur Disposition stellen, die nicht schon aufgrund unserer alltäglichen Erfahrung plausibel sind, sondern erst im Rahmen theoretischer Annahmen eingeführt werden.

Im folgenden werden wir zunächst auf die Frage eingehen, worin der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes überhaupt besteht. Wir werden dabei auch die auf dem Kolmogoroff'schen Konzept beruhende Darstellung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch additive und normierte Maße auf der Algebra aller möglichen Fakten hinterfragen. Dies ist sinnvoll, da sich der Kolmogoroff'sche Ansatz in der Praxis nur bewährt hat in der Anwendung auf die möglichen Ergebnisse realisierbarer, "makroskopischer" Experimente, nicht aber dann, wenn er angewendet wird auf die Algebra aller möglichen Fakten im Modell der Quantentheorie.

Insbesondere werden wir dabei auch die übliche Annahme in Frage stellen, der Grad der Wahrscheinlichkeit (bzw. der Grad der Unwahrscheinlichkeit) eines möglichen Ereignisses sei von vornherein gleichzusetzen mit dem Limes der relativen Häufigkeiten bei unabhängigen "Wiederholungen" dieses Ereignisses. Diese Annahme ist implizit in der Kolmogoroff'schen Konzeption enthalten, sie ergibt sich jedoch nicht notwendigerweise aus unseren empirischen Erfahrungen.

Die hierzu angestellten Überlegungen sind von den Problemen der Quantentheorie vollkommen unabhängig. Insbesondere geht es uns nicht darum, ein speziell nur für die Quantentheorie geeignetes Konzept einer "Quantenwahrscheinlichkeit" zu formulieren.

17. Der empirische Gehalt von Wahrscheinlichkeitsgesetzen

Wir haben gesehen, dass sich im Falle der Quantentheorie auf A kein Maß λ angeben lässt, welches die probabilistischen Aussagen der Theorie wiedergibt. Es stellt sich daher die Frage, wie der empirische Gehalt der aus der Quantentheorie bekannten Wahrscheinlichkeitsaussagen bewahrt werden kann, ohne dass es zu den beschriebenen Widersprüchen kommt. Um dieses Ziel zu erreichen, diskutieren wir die Frage, worin der empirische Gehalt von Wahrscheinlichkeitsgesetzen überhaupt besteht. Dabei legen wir zunächst ein Kolmogoroff'sches Wahrscheinlichkeitsmaß P zugrunde.

Als Beispiel betrachten wir ein Würfelexperiment. Mit A bezeichnen wir das mögliche Ergebnis, dass eine "3" gewürfelt wird. Es sollte dann gelten:

$$P(A) = 1/6$$

Diese Wahrscheinlichkeitsaussage über ein Einzelereignis hat unmittelbar überhaupt keine empirische Bedeutung. Sie besagt lediglich, dass das mögliche Faktum A entweder eintritt oder auch nicht, dass also beide Möglichkeiten nicht ausgeschlossen sind. Weder das Eintreten des möglichen Faktums A noch das Eintreten von $\neg A$ spricht für oder gegen diese Aussage.

Anders sieht es aus, wenn die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Faktums sehr klein ist. Wenn A' z.B. bedeutet, dass der Würfel auf einer seiner Ecken stehen bleibt, so sollte gelten:

$$P(A') \approx 0$$

Der empirische Gehalt dieser Aussage besteht darin, dass wir das Ereignis A' zwar nicht für völlig unmöglich halten, dass wir sein Eintreten aber dennoch nicht erwarten. Wenn das Ereignis A' dann doch eintritt, beginnen wir an der Gültigkeit der Wahrscheinlichkeitsaussage zu zweifeln: Möglicherweise gibt es einen Umstand, den wir übersehen haben und der dazu führt, dass A' doch nicht so unwahrscheinlich ist – oder aber das zugrundegelegte Wahrscheinlichkeitsgesetz ist überhaupt falsch.

Allgemein erlaubt eine Aussage

$$P(A') = \varepsilon$$

mit

$$\varepsilon \approx 0$$

die Voraussage, dass A' wahrscheinlich nicht eintreten wird. Dabei gibt ε den Grad der Sicherheit an, mit dem diese Voraussage gemacht werden kann. Falls nun A' dennoch eingetreten ist, so ist die Aussage in einem gewissen, durch den Wert ε beschriebenen Grade widerlegt.

Während also eine Aussage

$$P(A') = \varepsilon$$

mit $\varepsilon \approx 0$ eine unmittelbare empirische Bedeutung hat, erschließt sich die Bedeutung einer Aussage

$$P(A) = p$$

mit einem mittelgroßen Wert p nur indirekt. Hierzu wird eine Anzahl unabhängiger "Wiederholungen" von A benötigt. Da sich der Weltablauf insgesamt nicht wiederholt, handelt es sich bei den "Wiederholungen" um verschiedene (wenn auch gleichartige) mögliche Fakten

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben:

$$P(A_j) = p \quad (\text{für } j = 1, \dots, n)$$

Die Wiederholungen sind voneinander stochastisch unabhängig, wenn für jede Teilmenge der Indexmenge

$$J \subset \{1, \dots, n\}$$

gilt:

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Sind diese Voraussetzungen gegeben, so können wir die zufällige Größe

$$k(\omega) := \# \{j \mid \omega \in A_j\}$$

betrachten. Sie bezeichnet die Anzahl der "Treffer", d.h. die Anzahl derjenigen möglichen Fakten A_j , die tatsächlich eintreten. Für große Werte von n existiert dann ein Intervall

$$I := [p - \delta, p + \delta]$$

für welches gilt:

$$P(k/n \notin I) = \varepsilon \\ \approx 0$$

Wenn man n groß genug wählt, kann man selbst bei einem kleinen Wert δ zu einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit ε gelangen.

Das mögliche Faktum

$$B := (k/n \notin I)$$

entspricht einer bestimmten logischen Kombination aus den möglichen Fakten A_j . Die Aussage

$$P(B) \approx 0$$

hat, wie oben diskutiert, einen unmittelbaren empirischen Gehalt. So erhält auch die Aussage

$$P(A) = p$$

(für beliebiges p) mittelbar eine empirische Bedeutung: Sie erlaubt es, unter Verwendung der Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P den Wert $P(B)$ für das "unwahrscheinliche" mögliche Faktum B zu berechnen.

Die empirische Bedeutung einer Aussage

$$P(A) = p$$

mit einem mittelgroßen Wert p lässt sich somit zurückführen auf eine Aussage der Form

$$P(B) = \varepsilon$$

mit $\varepsilon \approx 0$. Die empirische Bedeutung eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes liegt daher letztlich nur darin anzugeben, welche möglichen Fakten (d.h. welche logischen Kombinationen von Ereignissen) in welchem Grade unwahrscheinlich sind. Ordnet das Gesetz einem möglichen Faktum eine mittelgroße Wahrscheinlichkeit zu, so erlaubt dies lediglich, unter gewissen Zusatzbedingungen (gleiche Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit mehrerer "Wiederholungen") die "Unwahrscheinlichkeit" bestimmter anderer möglicher Fakten zu berechnen.

Die Aussage $P(A) \approx 0$ kann aufgefasst werden als Ausdruck der Tatsache, dass A "nahezu unmöglich" ist. In Analogie zu dem bekannten Möglichkeitsoperator \diamond können wir daher zu einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß P graduelle Möglichkeitsoperatoren \diamond_ε einführen durch:

$$\neg \diamond_\varepsilon(A) \quad :\Leftrightarrow \quad P(A) \leq \varepsilon$$

bzw. gleichwertig:

$$\diamond_\varepsilon(A) \quad :\Leftrightarrow \quad P(A) > \varepsilon \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Nach dem zuvor Gesagten ist der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P gegeben durch diese auf der Basis von P definierte Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren.

Formal hat die Familie der durch P definierten graduellen Möglichkeitsoperatoren \diamond_ε (für $\varepsilon, \varepsilon' \in [0,1]$ und $A, A' \in \mathcal{A}$) folgende Eigenschaften:

- (1) $\varepsilon \leq \varepsilon' \Rightarrow [\neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(A) \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon'}(A)]$ (ε -Monotonie)
 (2) $A \subset A' \Rightarrow [\neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(A') \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(A)]$ (Monotonie)
 (3) $\neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(A) \wedge \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon'}(A') \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon+\varepsilon'}(A \vee A')$ (Subadditivität)

Die ε -Monotonie folgt unmittelbar aus der Definition der $\hat{\diamond}_{\varepsilon}$. Die zweite Eigenschaft folgt aus der Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmaßes P , d.h. aus der Aussage:

$$A \subset A' \Rightarrow P(A) \leq P(A')$$

Die Subadditivität folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von P , d.h. aus:

$$P(A \vee A') \leq P(A) + P(A')$$

Bemerkenswert ist, dass man hier die volle Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P nicht braucht.

Der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P wird demnach beschrieben durch eine Familie $\hat{\diamond}_{\varepsilon}$ gradueller Möglichkeitsoperatoren, die den Bedingungen (1) bis (3) genügen.

Die volle Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P wird bei der Ableitung der Eigenschaften (1) bis (3) nicht benötigt; es genügen stattdessen die Monotonie und die Subadditivität der auf \mathcal{A} definierten Mengenfunktion P . Die Bedeutung der (vollen) Additivität von P liegt nur darin, dass sie es erlaubt, aufgrund der mittelgroßen Wahrscheinlichkeitswerte gewisser möglicher Fakten den Grad der Unwahrscheinlichkeit anderer möglicher Fakten zu berechnen. Bei der Beschreibung des unmittelbaren empirischen Gehalts des durch P gegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetzes spielt sie hingegen keine Rolle.

Eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren $\hat{\diamond}_{\varepsilon}$, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt, hat eine unmittelbare empirische Bedeutung. Für $\varepsilon \approx 0$ besagt der Ausdruck

$$\neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(\neg A)$$

dass $\neg A$ nahezu unmöglich ist. Er erlaubt also die fast sichere Vorhersage des Ereignisses A . Ebenso besagt

$$\neg \hat{\diamond}_{\varepsilon}(A)$$

dass A fast sicher nicht eintreten wird. Wenn A dann dennoch eintritt, so ist diese Aussage als (in gewissem Grade) widerlegt zu betrachten.

Ebenso, wie das Konzept des Wahrscheinlichkeitsmaßes im Kolmogoroffschen Ansatz verwendet wird, um den anschaulichen Begriff der "Wahrschein-

lichkeit" formal wiederzugeben, stellt eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren den Begriff "nahezu unmöglich" formal dar. Die empirische Bedeutung einer solchen Familie \diamond_ε existiert dabei ganz unabhängig davon, ob die \diamond_ε auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes definiert worden sind oder nicht.

Im Rahmen einer physikalischen Theorie lassen sich daher Aussagen darüber machen, welche möglichen Fakten "nahezu unmöglich" sind, ohne dass dabei der herkömmliche (d.h. der Kolmogoroff'sche) Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet werden muss. Die Theorie muss hierzu lediglich eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren angeben. Damit hat man die Möglichkeit, den empirischen Gehalt der aus der Quantenmechanik bekannten probabilistischen Aussagen wiederzugeben, ohne die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf \mathcal{A} annehmen zu müssen.

Anmerkung 1

Zu einer Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren \diamond_ε können die entsprechenden Notwendigkeitsoperatoren gebildet werden durch:

$$\square_\varepsilon(A) :\Leftrightarrow \neg \diamond_\varepsilon(\neg A) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A})$$

Anmerkung 2

Für die praktische Anwendung benötigt man (in Analogie zu bedingten Wahrscheinlichkeiten) bedingte graduelle Möglichkeits- bzw. Notwendigkeitsoperatoren. Ausgehend von bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen $P(\cdot | \cdot)$ lassen sich diese Operatoren (für $A, B \in \mathcal{A}$) definieren durch:

$$\diamond_\varepsilon(A|B) :\Leftrightarrow P(A|B) > \varepsilon \quad (\text{bedingte graduelle Möglichkeit})$$

$$\square_\varepsilon(A|B) :\Leftrightarrow \neg \diamond_\varepsilon(\neg A|B) \quad (\text{bedingte graduelle Notwendigkeit})$$

Anmerkung 3

Der empirische Gehalt der deterministischen Gesetze einer Theorie liegt darin, dass man mit ihnen – ausgehend von einem gegebenen Wissen $B \in \mathcal{A}$ – gewisse mögliche Fakten A vorhersagen kann. Eine solche Vorhersage ist genau dann möglich, wenn gilt:

$$\square(A|B)$$

Das "vorhergesagte" Faktum muss dabei nicht notwendigerweise in der Zukunft liegen. Wird nun anschließend festgestellt, dass das Faktum $\neg A$ vorliegt, so sind damit die deterministischen Gesetze widerlegt.

In ähnlicher Weise liegt der empirische Gehalt eines probabilistischen Gesetzes darin, dass es erlaubt, auf der Basis eines gegebenen Wissens $B \in \mathcal{A}$

"nahezu sichere" Vorhersagen zu machen. Falls die Aussage

$$\square_{\varepsilon}(A|B)$$

zutrifft, so kann man mit der durch ε gegebenen Sicherheit von dem vorhandenen Wissen B auf das Eintreten von A schließen. Wenn nun das Gegenteil des Vorhergesagten eintritt, so ist das Gesetz (in dem durch ε gegebenen Grade) widerlegt.

Zusammenfassung

Unser Ziel besteht darin, den empirischen Gehalt der aus der Quantenmechanik bekannten Wahrscheinlichkeitsaussagen zu bewahren, ohne dass es zu den beschriebenen Widersprüchen kommt.

Der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes liegt darin, dass es angibt, welche möglichen Fakten "nahezu unmöglich" sind.

Die Angabe, welche möglichen Fakten "nahezu unmöglich" sind, kann mittels einer Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren \diamond_{ε} erfolgen. Eine solche Familie weist neben der ε -Monotonie insbesondere die Eigenschaften der Monotonie und der Subadditivität auf.

Wenn eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P festgelegt wird, so kommt es auf die volle Additivität von P nicht an; es genügen Monotonie und Subadditivität der Mengenfunktion P .

Eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren hat einen unmittelbaren empirischen Gehalt. Dies gilt auch dann, wenn sie nicht von einem Wahrscheinlichkeitsmaß abgeleitet ist.

Grundsätzlich ist es daher möglich, den probabilistischen Gehalt einer Theorie (auch z.B. der Quantenmechanik) über eine solche Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren darzustellen, ohne dabei von einem Wahrscheinlichkeitsmaß auszugehen.

18. Exkurs: Extrem unwahrscheinliche Fakten

Ausgehend von einem Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsmaß P diskutieren wir hier die Frage, was unter einer extrem kleinen Wahrscheinlichkeit zu verstehen ist. Damit wird dann auch deutlich, in welchem Sinne Wahrscheinlichkeitsgesetze empirisch widerlegbar sind und folglich einen empirischen Gehalt haben.

Wenn das Wahrscheinlichkeitsmaß P einem möglichen Faktum $A \in \mathcal{A}$ einen "kleinen" Wert ε zuordnet, z.B. $\varepsilon = 1/20$ oder $\varepsilon = 1/100$, so reicht dies noch nicht aus, um mit einiger Sicherheit auszuschließen, dass dieses Faktum dennoch eintritt. Die Vorhersage, dass A nicht eintreten wird, ist erst dann sinnvoll, wenn die Wahrscheinlichkeit von A sehr viel kleiner ist. Zu fragen ist nun, wie klein ε sein muss, damit man vernünftigerweise davon ausgehen kann, dass A nicht eintritt.

Auf den ersten Blick scheint es wenig sinnvoll zu sein, hierfür einen bestimmten Wert angeben zu wollen. Selbst wenn eine Wahrscheinlichkeit $\varepsilon = P(A)$ noch so klein ist, kann das mögliche Faktum A logisch nicht ausgeschlossen werden. Allerdings ist die Bestimmung einer Größe in der Physik stets mit einer Ungenauigkeit behaftet. Der mathematische Unterschied zwischen zwei sehr ähnlichen Werten (z.B. auch zwischen den Wahrscheinlichkeitswerten ε und Null) sollte daher physikalisch ohne Bedeutung sein, wenn dieser Unterschied extrem klein ist.

Wir wollen die Rolle extrem kleiner Wahrscheinlichkeiten am Beispiel eines Glücksspiels diskutieren. Bei diesem Spiel führe das Eintreten eines bestimmten Ereignisses A zu einem Gewinn von einer Million Euro. Die Wahrscheinlichkeit von A sei sehr klein, sie betrage z.B. 10^{-6} . Es kann dann durchaus vernünftig sein, einen Euro bei diesem Spiel einzusetzen. Es kommt hier offenbar auf das Verhältnis des Einsatzes zum möglichen Gewinn an.

Dieses Einsatz-Gewinn-Verhältnis kann einen gewissen Wert nicht unterschreiten. Nehmen wir an, der Einsatz bestehe ebenso wie der Gewinn in einer bestimmten Menge ein und derselben Substanz. Wenn wir nun davon ausgehen, dass sich im gesamten Universum maximal 10^{100} Elementarteilchen befinden, so sollte das Verhältnis des Einsatzes zum Gewinn niemals kleiner als der Wert $\varepsilon^\circ := 10^{-100}$ sein. Dies gibt einen Anhaltspunkt dafür, wo eine untere Grenze für das Verhältnis zwischen Einsatz und Gewinn bei einem Glücksspiel oder einer Wette liegen kann.

Das Einsatz-Gewinn-Verhältnis einer Wette kann natürlich nicht allein an der Anzahl der in verschiedenen Gegenständen enthaltenen Elementarteilchen gemessen werden; vielmehr kommt es hier auch auf die subjektive Bewertung an. Die Subjekte sind selbst aber Teil des materiellen Universums. In einem (im Großen wie im Kleinen) endlichen Universum ist daher davon auszugehen, dass es auch unter Berücksichtigung der Subjektivität der Bewertungen eine

untere Grenze ε° für das mögliche Verhältnis von Einsatz und Gewinn einer Wette gibt.

Die Überlegung zur Anzahl der Elementarteilchen im Universum zeigt, wie man grundsätzlich zu einem numerischen Wert für ε° gelangen kann. Vermutlich wird der Wert von $\varepsilon^\circ = 10^{-100}$ auch dann eine geeignete untere Grenze für das Einsatz-Gewinn-Verhältnis darstellen, wenn man die Subjektivität der Bewertungen berücksichtigt. Im übrigen geht es uns hier auch gar nicht um die Festlegung eines präzisen Zahlenwertes für ε° , sondern nur darum, eine ungefähre Größenordnung für diese Grenze anzugeben.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich eine Vorstellung davon, was als "extrem unwahrscheinlich" anzusehen ist: Wenn ein mögliches Faktum A eine Wahrscheinlichkeit hat, die kleiner ist als ε° (also z.B. kleiner als 10^{-100}), so ist es nicht mehr sinnvoll, auf das Eintreten von A zu wetten. Mit anderen Worten: Am Eintreten des entgegengesetzten Faktums $\neg A$ lässt sich vernünftigerweise nicht zweifeln.

Es ist demnach sinnvoll, von der Existenz einer Größe (bzw. einer Größenordnung) ε° auszugehen, für die gilt: Hat ein mögliches Faktum A eine Wahrscheinlichkeit

$$P(A) \leq \varepsilon^\circ$$

so ist A als "extrem unwahrscheinlich" anzusehen, und mit dem Eintreten von A ist vernünftigerweise nicht zu rechnen.

Es bleibt nun die Frage, ob derart extrem kleine Wahrscheinlichkeiten in der Praxis überhaupt auftreten können. Dass dies sehr wohl der Fall ist, wollen wir an drei Beispielen zeigen. Für ε° legen wir dabei den Wert 10^{-100} zugrunde.

Beispiel 1

Nehmen wir an, wir haben zwei verschiedene Würfel, von denen der eine "echt" ist (also auf den sechs Seiten die Zahlen von 1 bis 6 zeigt) und der andere gefälscht ist in der Weise, dass er auf allen sechs Seiten eine "6" trägt. Nun würfeln wir 200mal. Wenn das Ergebnis darin besteht, dass jedesmal eine "6" herauskommt, so vermuten wir, dass es sich um den gefälschten Würfel handelt. Die Annahme, es handle sich um den echten Würfel, führt (für das beobachtete Ergebnis) zu einer Wahrscheinlichkeit von $p = 6^{-200}$. Dieser Wert ist kleiner als 10^{-100} , und es besteht folglich kein vernünftiger Zweifel daran, dass es sich um den gefälschten Würfel handelt.

Beispiel 2

Ein Gefäß enthalte (bei einer Raumtemperatur von 20°C) einen Liter Wasser von ebenfalls 20°C . Wir warten nun eine Stunde lang. Dann messen wir die Temperatur im oberen Drittel des Gefäßes. Wir interessieren uns für das mögliche Faktum, dass unsere Messung einen Wert über 21°C ergibt. Nach den

Gesetzen der statistischen Thermodynamik ist dieses Ereignis zwar sehr unwahrscheinlich, aber durchaus möglich: Das Wasser könnte sich zufällig in einen oberen wärmeren Teil und einen unteren kälteren Teil aufgeteilt haben. Die Wahrscheinlichkeit hierfür liegt in diesem Fall (nach eben diesen Gesetzen) sicherlich weit unterhalb von 10^{-100} .

Beispiel 3

Wir betrachten eine Quelle, die einen Elektronenstrahl erzeugt. Diesen Strahl lassen wir auf einen Doppelspalt fallen. Im Zentrum hinter diesem Doppelspalt stellen wir einen Elektronendetektor auf. Nach Einschalten der Quelle warten wir eine Minute und stellen dann fest, wie viele Elektronen von dem Detektor aufgefangen wurden.

Das in Frage stehende mögliche Faktum A bestehe darin, dass mindestens eine gewisse Anzahl k_0 von Elektronen aufgefangen wird. Eine sinnvolle Bemessung von k_0 muss natürlich die genauen Umstände des Experiments berücksichtigen. Dies wollen wir hier nicht im einzelnen darstellen.

Bei passender Einrichtung des Experiments könnte sich nach den Gesetzen der klassischen Mechanik ergeben:

$$P(A) \leq 10^{-100}$$

Die klassische Mechanik sagt dann mit sehr großer Sicherheit voraus, dass nur weniger als k_0 Elektronen aufgefangen werden. (Eine geringe Anzahl von Elektronen kann auch nach der klassischen Mechanik aufgefangen werden, da es aufgrund der thermischen Bewegung zu spontanen Emissionen von Elektronen aus dem Material, aus dem der Doppelspalt besteht, kommen kann.)

Da sich Elektronen bekanntlich aber nicht klassisch verhalten, stellen wir nun fest, dass entgegen der Voraussage doch mehr als k_0 Elektronen aufgefangen wurden, das unwahrscheinliche Faktum A also eingetreten ist. Das Experiment widerlegt daher (wenn es so ausgeht wie beschrieben) die klassische Mechanik.

Falls die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ allerdings nicht kleiner ist als 10^{-100} , sondern z.B. nur 10^{-4} beträgt, so haben wir die klassische Mechanik mit der Durchführung dieses Experiments noch nicht wirklich "ohne jeden vernünftigen Zweifel" widerlegt. Wenn wir jedoch 25 unabhängige Wiederholungen des Experiments durchführen und immer dasselbe Ergebnis erhalten, so erreicht die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis des Gesamtexperiments wiederum den extrem kleinen Wert von 10^{-100} . Auch in diesem Fall ist die klassische Mechanik zweifelsfrei widerlegt.

19. Möglichkeitsmaße

Wir haben gesehen, dass der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P nur abhängt von der Familie der durch P bestimmten graduellen Möglichkeitsoperatoren $\hat{\diamond}_\varepsilon$. Dabei kommt es auf die Additivität von P nicht an; um die charakteristischen Eigenschaften gradueller Möglichkeitsoperatoren abzuleiten, werden nur Monotonie und Subadditivität von P benötigt.

Dies veranlasst uns zu den folgenden Definitionen: Eine Mengenfunktion

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

heißt *äußeres Maß*, wenn für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ sowie für jede Folge $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ gelten:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$ (Nulleigenschaft)
- (2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- (3) $\mu(\exists_j A_j) \leq \sum_j \mu(A_j)$ (Sub- σ -Additivität)

Sie heißt *Möglichkeitsmaß*, wenn außerdem gilt:

- (4) $\mu(\Omega) = 1$ (Normierung)

Ähnlich wie man unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß ein normiertes Maß versteht, ist ein Möglichkeitsmaß ein normiertes äußeres Maß. Der Begriff des äußeren Maßes ist aus der Maßtheorie geläufig. Da sich die Monotonie und die Sub- σ -Additivität aus der σ -Additivität ableiten lassen, ist jedes Maß auch ein äußeres Maß. Ebenso ist jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auch ein Möglichkeitsmaß, aber nicht umgekehrt. Möglichkeitsmaße werden hier also als Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitsmaße eingeführt.

Analog zu bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen können zu jedem äußeren Maß μ bedingte Möglichkeitsmaße definiert werden durch:

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

Ebenso wie ein Wahrscheinlichkeitsmaß legt auch ein Möglichkeitsmaß μ durch

$$\hat{\diamond}_\varepsilon(A) :\Leftrightarrow \mu(A) > \varepsilon \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A} \text{ und } \varepsilon \in [0, 1])$$

eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren $\hat{\diamond}_\varepsilon$ fest. Wie wir gesehen haben, hat eine solche Familie $\hat{\diamond}_\varepsilon$ auch dann eine unmittelbare empirische Bedeutung, wenn sie nicht auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes definiert wurde. Somit hat ein Möglichkeitsmaß – ebenso wie jedes Wahrscheinlichkeitsmaß – einen empirischen Gehalt.

Die durch ein Möglichkeitsmaß μ definierte Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren $\hat{\diamond}_\varepsilon$ hat wiederum (für $\varepsilon, \varepsilon' \in [0, 1]$ und $A, A' \in \mathcal{A}$) die Eigenschaften:

- (1) $\varepsilon \leq \varepsilon' \Rightarrow [\neg \hat{\diamond}_\varepsilon(A) \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon'}(A)]$ (ε -Monotonie)
- (2) $A \subset A' \Rightarrow [\neg \hat{\diamond}_\varepsilon(A') \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_\varepsilon(A)]$ (Monotonie)
- (3) $\neg \hat{\diamond}_\varepsilon(A) \wedge \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon'}(A') \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\varepsilon+\varepsilon'}(A \vee A')$ (Subadditivität)

Das Kolmogoroff'sche Konzept des Wahrscheinlichkeitsmaßes wurde entwickelt, um den anschaulichen Begriff der Wahrscheinlichkeit formal präzise darzustellen. In ähnlicher Weise stellt das Konzept des Möglichkeitsmaßes eine Präzisierung der Vorstellung dar, dass gewisse mögliche Fakten "sehr unwahrscheinlich" bzw. "nahezu unmöglich" sind. Ein Möglichkeitsmaß μ beschreibt ein mögliches Faktum $A \in \mathcal{A}$ dann als "nahezu unmöglich", wenn $\mu(A) \approx 0$ ist. In diesem Sinne beschreibt μ den Grad der Möglichkeit der einzelnen möglichen Fakten, und man kann den Ausdruck $\mu(A)$ entweder als "graduelle Möglichkeit" von A oder als "Möglichkeitsgrad" von A bezeichnen.

Wenn das Konzept der graduellen Möglichkeit durch eine Mengenfunktion μ auf \mathcal{A} präzisiert werden soll, so ist es plausibel, für μ die Eigenschaften der Monotonie und der Subadditivität zu fordern. Darüber hinaus drückt die Null-eigenschaft $\mu(\emptyset) = 0$ aus, dass μ mit den deterministischen Gesetzen verträglich ist. Es ist hingegen nicht naheliegend, an diese Mengenfunktion die Forderung der Additivität zu stellen.

Eine probabilistische Theorie enthält neben den deterministischen Gesetzen auch Wahrscheinlichkeitsaussagen. Letztere stellen den nicht-deterministischen Teil der Theorie dar. Ihr empirischer Gehalt kann durch graduelle Möglichkeitsoperatoren ausgedrückt werden. Da sich eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren auch aus einem Möglichkeitsmaß ableiten lässt, kann man den nicht-deterministischen Teil einer Theorie auch mit Hilfe derartiger Möglichkeitsmaße darstellen. Eine Theorie, in der so vorgegangen wird, kann man als "graduell-possibilistisch" bezeichnen.

In diesem Sinne wird es unser Ziel sein, die Quantentheorie als eine graduell-possibilistische Theorie darzustellen und so die Widersprüche zu vermeiden, zu denen das oben diskutierte Wahrscheinlichkeitsgesetz der Quantenmechanik geführt hat.

Im Falle der klassischen Mechanik hatten wir ein absolutes (nicht normiertes) Maß λ zugrunde gelegt. Daraus ließen sich bedingte (normierte) Wahrscheinlichkeitsmaße ableiten. Ähnlich wollen wir im Falle der Quantenmechanik vorgehen. Zunächst definieren wir ein absolutes (nicht normiertes) äußeres Maß μ auf \mathcal{A} . Daraus lassen sich dann zu jeder experimentellen Bedingung $EB_\varepsilon \in \mathcal{A}$ bedingte (normierte) Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot | EB_\varepsilon)$ ableiten. Sie be-

schreiben den nicht-deterministischen Teil der Theorie im Falle der Quantenmechanik.

Der Sinn der Ableitung der bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot|\cdot)$ von einem absoluten äußeren Maß μ liegt – wie schon im Falle der klassischen Mechanik – darin, dass so die nötigen Beziehungen zwischen den Möglichkeitsmaßen für verschiedene Bedingungen EB_ε hergestellt werden.

Durch die bedingten Möglichkeitsmaße werden Familien bedingter gradueller Möglichkeitsoperatoren festgelegt mittels:

$$\Diamond_\varepsilon(A|B) :\Leftrightarrow \mu(A|B) > \varepsilon$$

Unter der Voraussetzung eines gegebenen Faktums $B \in \mathcal{A}$ geben sie an, welche möglichen Fakten $A \in \mathcal{A}$ "nahezu unmöglich" sind und beschreiben so den empirischen Gehalt des durch μ angegebenen graduell-possibilistischen Gesetzes.

Unser Ziel besteht somit darin, auf der Algebra \mathcal{A} der möglichen Fakten ein äußeres Maß μ anzugeben, das den empirischen Gehalt der probabilistischen Aussagen der Quantentheorie widerspruchsfrei wiedergibt.

Anmerkung 1

Anstelle von Möglichkeitsmaßen auf \mathcal{A} könnte man auch direkt die graduellen Möglichkeitsoperatoren angeben. Der Vorteil der Ableitung derartiger Operatoren von einem Möglichkeitsmaß liegt darin, dass so die Beziehung zwischen den Operatoren zu verschiedenen Werten von ε (d.h. die ε -Monotonie) korrekt hergestellt wird. Diese Beziehung ergibt sich direkt aus der Definition der Operatoren \Diamond_ε auf der Basis eines Möglichkeitsmaßes.

Anmerkung 2

Wir hatten \Diamond_{AX} als den auf den deterministischen Axiomen beruhenden Möglichkeitsoperator auf \mathcal{A}_0 eingeführt. Man kann \Diamond_{AX} stattdessen auch als eine Abbildung

$$\Diamond_{AX} : \mathcal{A}_0 \rightarrow \{0,1\}$$

auffassen, indem man definiert:

$$\Diamond_{AX}(A) := 1 \Leftrightarrow A \cap \Omega \neq \emptyset \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

Dabei spielen 1 und 0 die Rolle der Wahrheitswerte "wahr" und "falsch". Es lässt sich leicht zeigen, dass die so definierte Abbildung ein Möglichkeitsmaß ist. Ein solches Möglichkeitsmaß, welches nur die beiden Werte 0 und 1 annimmt, kann als "deterministisch" bezeichnet werden.

Dies bedeutet, dass der Begriff des Möglichkeitsmaßes nicht nur den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes verallgemeinert, sondern zugleich auch den des Möglichkeitsoperators. Deterministische und probabilistische Gesetze werden so zu einem Konzept zusammengeführt.

Anmerkung 3

Durch ein äußeres Maß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

wird mittels

$$\mu_0(A) := \mu(A \cap \Omega) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

ein äußeres Maß auf \mathcal{A}_0 definiert. Das so festgelegte äußere Maß μ_0 ist mit den deterministischen Gesetzen verträglich, d.h. es gilt

$$\neg \diamond_{AX}(A) \Rightarrow \mu_0(A) = 0 \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_0)$$

Die Aussage

$$\mu_0(A) = 0$$

ist empirisch genauso zu interpretieren, wie die Aussage

$$\neg \diamond_{AX}(A)$$

Beide Aussagen drücken aus, dass das mögliche Faktum A nicht eintreten kann und dass die Theorie empirisch widerlegt ist, wenn A dennoch eintritt. In diesem Sinne beinhaltet das auf \mathcal{A}_0 definierte äußere Maß μ_0 (neben den graduell-possibilistischen) auch alle deterministischen Aussagen der Theorie.

Während also μ die graduell-possibilistischen und \diamond_{AX} die deterministischen Gesetze der Theorie ausdrückt, stellt μ_0 beides zugleich dar. Bei gegebener Modellierung der Ereignisse \mathcal{E} ist daher eine Theorie im wesentlichen nichts anderes als ein äußeres Maß, welches definiert ist auf der Menge \mathcal{A}_0 der (aufgrund der Modellierung) möglichen Fakten.

Anmerkung 4

Die empirische Widerlegung eines graduell-possibilistischen Gesetzes erfolgt, indem man, ausgehend von einem bestimmten Wissen B , ein mögliches Faktum A betrachtet, für das der bedingte Möglichkeitsgrad $\mu(A|B)$ einen (sehr) kleinen Wert ε hat. Wird das Eintreten des möglichen Faktums A sodann empirisch beobachtet, so ist das Gesetz mit der durch ε angegebenen Sicherheit als widerlegt zu betrachten.

Zusammenfassung und Ausblick

Der empirische Gehalt probabilistischer Gesetze kann nicht nur durch Wahrscheinlichkeitsmaße, sondern allgemeiner auch durch Möglichkeitsmaße angegeben werden. Ein Möglichkeitsmaß ist ein normiertes "äußeres Maß", d.h. eine monotone und sub- σ -additive Mengenfunktion μ auf \mathcal{A} mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\Omega) = 1$. Es beschreibt ein mögliches Faktum $A \in \mathcal{A}$ als "nahezu unmöglich", wenn $\mu(A) \approx 0$ ist. Der Ausdruck $\mu(A)$ wird als "Möglichkeitsgrad" von A bezeichnet.

Mit diesem Konzept wollen wir die Quantentheorie als eine "graduall-possibilistische" Theorie formulieren. Dazu muss die Theorie (anstelle eines additiven Maßes λ) ein äußeres Maß μ auf \mathcal{A} angeben, aufgrund dessen sich mittels

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B)$$

in der üblichen Weise bedingte Möglichkeitsmaße definieren lassen.

Hierdurch werden Familien bedingter gradueller Möglichkeitsoperatoren festgelegt:

$$\Diamond_{\varepsilon}(A|B) :\Leftrightarrow \mu(A|B) > \varepsilon$$

Sie geben an, welche möglichen Fakten $A \in \mathcal{A}$ unter einer Bedingung $B \in \mathcal{A}$ "nahezu unmöglich" sind und beschreiben so den empirischen Gehalt des durch μ angegebenen Gesetzes.

Unser Ziel ist, auf der Algebra \mathcal{A} der möglichen Fakten ein äußeres Maß μ anzugeben, das den empirischen Gehalt der probabilistischen Aussagen der Quantentheorie widerspruchsfrei wiedergibt.

Im folgenden Kapitel wollen wir zeigen, in welchem Zusammenhang das hier eingeführte Konzept der graduellen Möglichkeit mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit bzw. der Unwahrscheinlichkeit steht. Es wird sich dabei ergeben, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit im allgemeinen nicht über ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne Kolmogoroffs darzustellen ist. Wir kommen so zu einer grundsätzlichen Neuformulierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Rolle der Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsmaße beschränkt sich dabei auf die Beschreibung der möglichen Ergebnisse wiederholbarer Experimente. Auch die hierzu angestellten Überlegungen sind vollkommen unabhängig von den Problemen der Quantentheorie.

20. Graduelle Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit

Wir wollen uns hier – unabhängig von der Quantentheorie – mit der Frage befassen, in welchem Verhältnis der anschauliche Begriff der Wahrscheinlichkeit einerseits zum Konzept der graduellen Möglichkeit und andererseits zur Modellierung mittels additiver Wahrscheinlichkeitsmaße steht. Um dies zu klären, gehen wir zunächst darauf ein, wie es zu der Vorstellung der Additivität von "Wahrscheinlichkeiten" überhaupt kommt.

Historisch ist der Begriff der "Wahrscheinlichkeit" erst sehr spät entwickelt worden, und erst vor einigen Jahrzehnten kam es zu seiner Präzisierung im Sinne einer axiomatisch eingeführten additiven Mengenfunktion. Zuvor hatte man versucht, "Wahrscheinlichkeit" zu definieren als einen Grenzwert relativer Häufigkeiten für unendlich viele unabhängige Wiederholungen eines Experiments:

$$P(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n$$

Bei dieser Definition geht man (zu gegebenem $A \in \mathcal{A}$) von einer unendlichen Folge A_j aus unabhängigen Wiederholungen von A aus und definiert die zufällige Größe k_n mittels

$$k_n(\omega) := \# \{ j \leq n \mid \omega \in A_j \} \quad (\text{für } \omega \in \Omega)$$

als die Anzahl der "Treffer" bei den ersten n Experimenten. Wenn "Wahrscheinlichkeiten" in dieser Weise als Limes relativer Häufigkeiten definiert werden können, so folgt die Additivität, d.h. die Aussage

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \wedge B = \emptyset)$$

unmittelbar aus der Definition.

Der Versuch, $P(A)$ in der angegebenen Weise zu definieren, scheitert allerdings zunächst an der Tatsache, dass die Folge der zufälligen Größen

$$p_n := k_n/n$$

im allgemeinen nicht konvergieren muss. Die Konvergenz findet nur "sehr wahrscheinlich" statt, und man muss bereits einen Wahrscheinlichkeitsbegriff voraussetzen, um $P(A)$ "definieren" zu können. Präzise müsste man – im Sinne des sogenannten schwachen Gesetzes der großen Zahlen – formulieren:

$$P(A) = p \iff \forall \delta > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(k_n/n \notin [p-\delta, p+\delta]) = 0$$

Diese "Definition" ist offenbar zirkulär.

Die von Kolmogoroff angegebene "Lösung" des Problems bestand nun darin, die Existenz der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ einfach vorauszusetzen und für die Mengenfunktion P gewisse Eigenschaften (neben $P(A) \in [0,1]$ die Normiertheit

und die σ -Additivität) axiomatisch zu fordern. Allerdings bezog sich diese Vorgehensweise lediglich auf konkret ausführbare Experimente, d.h. die Existenz von P wurde jeweils nur für die Algebra \mathcal{A}_e der möglichen Ergebnisse eines Experiments angenommen.

In der Praxis hat sich die Annahme additiver Wahrscheinlichkeitsmaße ebenfalls nur für den Fall konkreter Experimente bewährt. Damit ist in gar keiner Weise gewährleistet, dass sich dieses Konzept ausweiten lässt zu der Annahme eines additiven Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Menge \mathcal{A} aller möglichen Fakten, d.h. auf die Menge aller bildbaren logischen Kombinationen aus möglichen Ereignissen der Form $\langle A, t \rangle$ mit $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$.

Man steht also vor folgendem Dilemma: Wenn man "Wahrscheinlichkeit" im Sinne von Kolmogoroff axiomatisch als additive Mengenfunktion einführt, so gibt es keine Garantie für die Existenz einer solchen Funktion auf einer gegebenen Algebra möglicher Fakten. Will man jedoch "Wahrscheinlichkeit" als Limes relativer Häufigkeiten definieren, so erhält man zwar die Additivität als unmittelbare Folge der Definition, jedoch benötigt man bereits eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, um die Definition überhaupt formulieren zu können.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die obige Definition zwar zirkulär ist, dass darin jedoch P auf der rechten Seite nur in einer eingeschränkten Form auftritt, bei der es lediglich darauf ankommt, welche möglichen Fakten $B \in \mathcal{A}$ sehr unwahrscheinlich sind. Auch liefert die Definition dieselben Werte für $P(A)$, wenn sie modifiziert wird zu:

$$P(A) = p \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} f(P(k_n/n \notin [p-\delta, p+\delta])) = 0$$

mit einer beliebigen streng monotonen und stetigen Funktion f , für die gilt: $f(0) = 0$. Z.B. kann man P auf der rechten Seite ersetzen durch P^2 oder durch \sqrt{P} , ohne dass sich an dem für $P(A)$ definierten Wert p etwas ändert. Offenbar braucht auf der rechten Seite gar kein additives Wahrscheinlichkeitsmaß zu stehen.

Diese Beobachtung liefert den Schlüssel zur Lösung des genannten Dilemmas: Sinnvollerweise muss man unterscheiden zwischen $P(A)$ (der "Wahrscheinlichkeit" im Sinne eines Grenzwerts relativer Häufigkeiten) und dem Möglichkeitsgrad $\mu(A)$, der angibt, in welchem Grade A "nahezu unmöglich" bzw. "sehr unwahrscheinlich" ist. Damit ist es möglich, P auf der rechten Seite der Definition durch μ zu ersetzen.

Ausgehend von einem Möglichkeitsmaß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$$

das den Möglichkeitsgrad (und damit die Unwahrscheinlichkeit) möglicher Fakten beschreibt, kann man zu $A \in \mathcal{A}$ die "Wahrscheinlichkeit" (oder besser:

den Häufigkeitsgrad) definieren mittels:

$$P(A) = p \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(k_n/n \notin [p-\delta, p+\delta]) = 0$$

Diese Definition ist nicht mehr zirkulär.

Die Definition von $P(A)$ auf der Basis des Möglichkeitsmaßes μ garantiert nicht, dass $P(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ existiert. Falls $P(A)$ jedoch existiert, so ist es auch eindeutig definiert. Unter der Voraussetzung, dass die entsprechenden "Wahrscheinlichkeiten" existieren, gelten für P außerdem die bekannten Eigenschaften der Additivität und der Normierung. Wenn $P(A)$ existiert, so sollte ferner gelten:

$$P(A) \approx 0 \Leftrightarrow \mu(A) \approx 0$$

In diesem Fall kann also die Tatsache, dass A nahezu unmöglich ist, nicht nur durch $\mu(A) \approx 0$, sondern auch durch $P(A) \approx 0$ ausgedrückt werden.

Entscheidend ist hier: Für die Funktion μ , welche den Grad der "Unwahrscheinlichkeit" möglicher Fakten beschreibt, muss die Eigenschaft der Additivität nicht gefordert werden, und sie ist auch nicht plausibel. Definiert man $P(A)$ sodann auf der Basis von μ als Limes relativer Häufigkeiten, und gelingt diese Definition für alle Elemente A einer Teilalgebra von \mathcal{A} , so erhält man mit P ein additives und normiertes Maß auf dieser Algebra.

Nach diesen Überlegungen wollen wir zurückkommen zu der Frage nach dem Verhältnis, in dem der anschauliche Begriff der Wahrscheinlichkeit einerseits zum Konzept der graduellen Möglichkeit und andererseits zur Modellierung mittels additiver Wahrscheinlichkeitsmaße steht. Die folgenden Ausführungen laufen auf eine grundsätzliche Neuformulierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hinaus. Sie sind vollkommen unabhängig von den Problemen einer bestimmten physikalischen Theorie, etwa der Quantentheorie.

Ausgangspunkt für die formalisierte Darstellung des Konzepts der Wahrscheinlichkeit ist der Begriff "wahrscheinlich". Er ist unmittelbar verbunden mit der Vorstellung, dass ein mögliches Faktum wahrscheinlicher oder weniger wahrscheinlich als ein zweites mögliches Faktum sein kann. Formal sollte dieser Begriff daher dargestellt werden mittels einer Mengenfunktion

$$v : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$$

Hierbei drückt $v(A) \approx 1$ aus, dass A "sehr wahrscheinlich" ist. Der Ausdruck $v(A)$ kann als Grad der Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet werden.

Unmittelbar mit dem Begriff "wahrscheinlich" verbunden ist der Begriff "unwahrscheinlich". Stellt man ihn formal dar durch eine weitere Mengenfunktion

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$$

(wobei $\mu(A) \approx 0$ ausdrückt, dass A sehr unwahrscheinlich ist) so besteht zwi-

schen μ und ν die naheliegende Beziehung

$$(*) \quad \mu(A) = 1 - \nu(\neg A) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Sie drückt die offensichtliche Tatsache aus, dass A genau dann unwahrscheinlich ist, wenn $\neg A$ wahrscheinlich ist. Die Mengenfunktion μ stellt den Grad der Unwahrscheinlichkeit dar.

Es besteht eine enge Analogie zwischen den Mengenfunktionen ν und μ einerseits und den Operatoren \square und \diamond andererseits. Der Ausdruck $\nu(A) \approx 1$ besagt, dass A "sehr wahrscheinlich" bzw. "nahezu sicher" bzw. "nahezu notwendig" ist. Ebenso besagt $\mu(A) \approx 0$, dass A "sehr unwahrscheinlich" bzw. "nahezu ausgeschlossen" bzw. "nahezu unmöglich" ist. Aus diesem Grunde kann man $\nu(A)$ auch als den "Notwendigkeitsgrad" und $\mu(A)$ als den "Möglichkeitsgrad" von A bezeichnen. In diesem Sinne entspricht die Beziehung $(*)$ der bekannten Äquivalenz

$$\diamond(A) \Leftrightarrow \neg \square(\neg A)$$

Die Funktion μ dient der formalen Darstellung des anschaulich gegebenen Begriffs "unwahrscheinlich". Da sich dieser Begriff auf jedes mögliche Faktum anwenden lässt, kann man annehmen, dass μ auf der ganzen Algebra \mathcal{A} definiert ist. Diese Annahme ist unproblematisch, solange keine bestimmten Eigenschaften (Axiome) für μ gefordert werden. Entsprechendes gilt für die Funktion ν .

Es ist nicht möglich, die Funktionen μ und ν durch allgemeine formale Definitionen festzulegen. Mindestens eine von beiden muss zunächst als ein undefinierter Grundbegriff eingeführt werden; die andere lässt sich dann über die Beziehung $(*)$ definieren. Die nähere Beschreibung dieses Grundbegriffs erfolgt durch die Angabe von Axiomen. Weil die Axiome für μ eine einfachere Form haben als die hierzu äquivalenten Aussagen für ν , gehen wir im folgenden stets davon aus, dass μ als Grundbegriff angenommen und ν anschließend über die Beziehung $(*)$ definiert wird.

Die Axiome für den Möglichkeitsgrad lassen sich aus den Eigenschaften des Möglichkeitsoperators ableiten. Für diesen Operator gelten die beiden Aussagen

$$A \subset B \Rightarrow [\neg \diamond(B) \Rightarrow \neg \diamond(A)]$$

und

$$[\neg \diamond(A) \wedge \neg \diamond(B)] \Rightarrow \neg \diamond(A \vee B)$$

Die entsprechenden Eigenschaften für den Möglichkeitsgrad lauten:

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \quad (\text{Monotonie})$$

und

$$\mu(A \vee B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{Subadditivität})$$

Die Monotonie besagt für mögliche Fakten $A \subset B$: Wenn B in gewissem Grade unwahrscheinlich ist, so ist A mindestens ebenso unwahrscheinlich. Die Subadditivität drückt aus: Sind A und B unwahrscheinlich im Grade ε bzw. ε' , so ist auch $A \vee B$ unwahrscheinlich, und zwar im Grade $\varepsilon + \varepsilon'$.

Nicht plausibel ist es hingegen zu fordern, dass μ oder ν additiv sein muss oder dass es sich bei μ und ν um dieselbe Mengenfunktion handelt. Insbesondere lässt sich dies nicht aus dem Inhalt der beiden Begriffe "wahrscheinlich" und "unwahrscheinlich" ableiten.

Wenn man zusätzlich zu den genannten Forderungen verlangt, dass $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(\Omega) = 1$ sein soll, und die Subadditivität auf den abzählbar-unendlichen Fall ausdehnt, so ergibt sich die Forderung, dass es sich bei μ um ein Möglichkeitsmaß im oben definierten Sinne (d.h. um ein normiertes äußeres Maß) handeln muss.

Von der physikalischen Theorie erwartet man, dass sie dieses (auf der ganzen Algebra \mathcal{A} zu definierende) Möglichkeitsmaß

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$$

konkret angibt. Aufgrund der Beziehung

$$\nu(A) := 1 - \mu(\neg A) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A})$$

ist damit auch ν eindeutig gegeben. Dies steht in Analogie zu der Aufgabe der physikalischen Theorie, mittels deterministischer Gesetze den Möglichkeitsoperator $\hat{\diamond}$ und damit implizit auch den Notwendigkeitsoperator \square festzulegen.

Bei gegebenem Möglichkeitsgrad μ können wir mittels

$$P(A) = p \iff \forall \delta > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(k_n/n \notin [p-\delta, p+\delta]) = 0$$

die "zu erwartende relative Häufigkeit von A" (kurz: den "Häufigkeitsgrad" von A) definieren. Dabei ist wie zuvor A_j eine unendliche Folge aus unabhängigen Wiederholungen von A und die durch

$$k_n(\omega) := \# \{ j \leq n \mid \omega \in A_j \} \quad (\text{für } \omega \in \Omega)$$

definierte zufällige Größe k_n ist die Anzahl der "Treffer" bei den ersten n dieser Wiederholungen.

Der Ausdruck $P(A)$ muss nicht für jedes $A \in \mathcal{A}$ definiert sein. Falls jedoch $P(A)$ für jedes Element A einer Teilalgebra \mathcal{A}_e von \mathcal{A} definiert ist, so bildet P auf \mathcal{A}_e ein (additives) Wahrscheinlichkeitsmaß im üblichen Sinne.

Im allgemeinen wird *nicht* gelten $\nu(A) = P(A)$ oder $\mu(A) = P(A)$. Sofern $P(A)$ überhaupt definiert ist, können wir lediglich die Beziehungen

$$\mu(A) \approx 0 \iff P(A) \approx 0$$

und

$$v(A) \approx 1 \Leftrightarrow P(A) \approx 1$$

erwarten. Dass ein mögliches Faktum A sehr unwahrscheinlich ist, kann in diesem Fall nicht nur durch $\mu(A) \approx 0$, sondern auch durch $P(A) \approx 0$ ausgedrückt werden.

Der empirische Gehalt der Funktionen μ und v liegt nur darin, dass sie angeben, für welche $A \in \mathcal{A}$ die Beziehung $\mu(A) \approx 0$ bzw. $v(A) \approx 1$ gilt. Hingegen hat der Ausdruck $P(A)$ – aufgrund der Definition von $P(A)$ als Limes relativer Häufigkeiten – auch dann einen (mittelbaren) empirischen Gehalt, wenn $P(A)$ einen mittelgroßen Wert aufweist.

Anmerkung 1

Die Mengenfunktion v beschreibt die Wahrscheinlichkeit möglicher Fakten und wird als Wahrscheinlichkeitsgrad oder als Notwendigkeitsgrad bezeichnet. Die Mengenfunktion μ beschreibt die Unwahrscheinlichkeit möglicher Fakten und wird als Möglichkeitsgrad bezeichnet. Die Mengenfunktion P beschreibt die zu erwartende relative Häufigkeit möglicher Fakten und wird als Häufigkeitsgrad bezeichnet.

Obwohl es sich also bei den Funktionen v und μ um die formale Darstellung der Begriffe "wahrscheinlich" und "unwahrscheinlich" handelt, ist es problematisch, $v(A)$ als "die Wahrscheinlichkeit von A " oder $\mu(A)$ als "die Unwahrscheinlichkeit von A " zu bezeichnen, da mit dem Begriff "Wahrscheinlichkeit" traditionell der Häufigkeitsgrad $P(A)$ bezeichnet wird. Um Verwechslungen zu vermeiden, ist für $\mu(A)$ der Begriff des "Möglichkeitsgrades" und für $v(A)$ der des "Notwendigkeitsgrades" zu bevorzugen.

Anmerkung 2

Traditionell werden die drei Begriffe v , μ und P nicht voneinander unterschieden. Man geht vielmehr implizit von der Gleichung

$$v = \mu = P$$

aus und verwendet für alle drei Konzepte unterschiedslos den Begriff "Wahrscheinlichkeit". Insbesondere wird angenommen, die "Wahrscheinlichkeit" eines möglichen Faktums A sei mit dem Limes der relativen Häufigkeit bei unabhängigen Wiederholungen von A gleichzusetzen.

Die Gleichsetzung von "Wahrscheinlichkeit" mit dem Grad der Häufigkeit erhält eine gewisse Plausibilität durch die Beziehungen

$$\mu(A) \approx 0 \Leftrightarrow P(A) \approx 0$$

und

$$v(A) \approx 1 \Leftrightarrow P(A) \approx 1$$

für mögliche Fakten $A \in \mathcal{A}$. Aus diesen beiden Äquivalenzen kann natürlich nicht wirklich auf die Gleichung

$$(*) \quad \nu = \mu = P$$

geschlossen werden. Diese Gleichung würde es erlauben, die drei Begriffe Wahrscheinlichkeit, Unwahrscheinlichkeit und Häufigkeitsgrad durch ein und dieselbe Funktion P darzustellen. Da die Gleichsetzung des Wahrscheinlichkeitsgrades mit dem Grad der Häufigkeit die Grundlage der Kolmogoroff'schen Axiome des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist, kann man die Gleichung (*) auch als "Kolmogoroff'sche Hypothese" bezeichnen.

Das Problem der Bell'schen Ungleichung ist letztlich auf die im Kolmogoroff'schen Konzept implizit enthaltene, historisch allerdings schon ältere Gleichsetzung (bzw. Verwechslung) des Wahrscheinlichkeitsgrades mit dem Häufigkeitsgrad zurückzuführen. Erst wenn man hier eine präzise Unterscheidung trifft, lässt sich dieses Problem lösen.

Es besteht hier eine gewisse Analogie zu den beiden Begriffen "Energie" und "Impuls". Diese Begriffe wurden ebenfalls zunächst nicht unterschieden, und man sprach in beiden Fällen stets nur von der dem bewegten Gegenstand inwohnenden Kraft. Erst nachdem man verstanden hatte, dass Energie als "Kraft mal Weg" und Impuls als "Kraft mal Zeit" aufzufassen sind und dass es sich um voneinander verschiedene Konzepte handelt, konnte man zum Beispiel die Dynamik elastischer bzw. unelastischer Stöße mit Hilfe dieser Begriffe in sinnvoller Weise beschreiben.

Anmerkung 3

Wenn μ ein Möglichkeitsmaß ist, so gilt dies auch für die durch

$$\mu'(A) := \mu(A)^{1/2} \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

gegebene Mengenfunktion. Hierzu lässt sich in entsprechender Weise der Häufigkeitsgrad P' definieren. Man kann leicht zeigen, dass $P'(A)$ genau dann einen definierten Wert hat, wenn auch $P(A)$ definiert ist, und dass in diesem Fall stets gilt:

$$P'(A) = P(A)$$

Es kommt demnach für die Definition von P nicht darauf an, ob man von μ oder von μ' ausgeht. (Gleiches gilt für $\mu' := \mu^{1/\alpha}$ mit beliebigem $\alpha > 1$.)

Der Unterschied zwischen μ und μ' liegt darin, dass μ' schwächer ist als μ . Die Stärke eines Möglichkeitsmaßes μ drückt sich in folgendem Umstand aus: Wenn μ einem möglichen Faktum A beispielsweise den Wert $1/100$ zuordnet, so benötigt man mindestens 100 Wiederholungen von A (d.h. mögliche Fakten A_j mit $\mu(A_j) = \mu(A)$) um Ω zu "überdecken", d.h. um zu erreichen, dass die

Beziehung

$$(**) \quad \Omega \subset \exists_j A_j$$

gilt, dass also in jedem möglichen Weltablauf mindestens eines der "unwahrscheinlichen" möglichen Fakten A_j wahr ist.

Dies beruht auf der Monotonie und der Subadditivität von μ , denn für m Wiederholungen von A folgt aus der Inklusion $(**)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(\Omega) \\ &\leq \mu(\exists_{j \leq m} A_j) \\ &\leq \sum_{j \leq m} \mu(A_j) \\ &= m \mu(A) \\ &= m/100 \end{aligned}$$

Wegen $\mu'(A) = 1/10$ genügen für das schwächere Möglichkeitsmaß μ' im Idealfall bereits 10 Wiederholungen, um Ω zu überdecken.

Von zwei unterschiedlichen Theorien ist diejenige zu bevorzugen, welche den stärkeren Möglichkeitsgrad μ beinhaltet. Dies gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, dass μ nicht im Widerspruch zu den empirischen Fakten steht.

Anmerkung 4

In der Praxis sind nicht absolute, sondern bedingte "Wahrscheinlichkeiten" (genauer: bedingte Häufigkeitsgrade) relevant. Sie werden unter Verwendung der bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot | \cdot)$ definiert durch:

$$(***) \quad P(A|B) = p \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{\delta > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(k_n/n \notin [p-\delta, p+\delta] | \forall_{j \leq n} B_j) = 0$$

Dazu seien A_j Wiederholungen von A und k_n bezeichne die Anzahl der "Treffer" bei den ersten n "Versuchen". Das mögliche Faktum B_j beschreibt die Bedingung für das Stattfinden des j -ten Experiments (der j -te Wiederholung). Man muss hier voraussetzen, dass die möglichen Fakten A_1, \dots, A_n unter der Bedingung $\forall_{j \leq n} B_j$ voneinander unabhängig sind.

Anmerkung 5

Bei der Definition des Häufigkeitsgrades $P(A)$ über eine Folge von Wiederholungen A_j von A muss man voraussetzen, dass jedes A_j von den anderen A_k unabhängig ist. Üblicherweise wird Unabhängigkeit definiert durch Wahrscheinlichkeitsaussagen. Beispielsweise ist A von den möglichen Fakten C_1, \dots, C_m stochastisch unabhängig, wenn für jede Teilmenge $J \subset \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$P(A | \forall_{j \in J} C_j) = P(A)$$

Wenn wir $P(A)$ oder $P(A|B)$ erst auf der Basis von μ bzw. $\mu(\cdot | \cdot)$ definieren wollen, können wir diese Definition der Unabhängigkeit nicht verwenden.

Stattdessen muss Unabhängigkeit auf eine andere Weise definiert werden. Annähernde Unabhängigkeit zwischen den Ergebnissen zweier Experimente ist z.B. dann anzunehmen, wenn die Experimente in einem so großen räumlichen Abstand voneinander ablaufen, dass eine wechselseitige Beeinflussung ausgeschlossen ist.

Die Theorie muss demnach nicht nur die Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot|\cdot)$ festlegen, aus ihr muss sich auch ergeben, wann mögliche Fakten A_j (bei einer gegebenen Bedingung) als voneinander unabhängig anzusehen sind. Hieraus ergibt sich dann, für welche $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}$ der Ausdruck $P(A|B)$ einen definierten Wert hat.

Das Konzept der Unabhängigkeit kann dazu auch auf der Basis der bedingten Möglichkeitsmaße definiert werden. In diesem Sinne ist $A \in \mathcal{A}$ unter der gegebenen Bedingung $B \in \mathcal{A}$ unabhängig von den möglichen Fakten $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{A}$, wenn für jede Teilmenge $J \subset \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\mu(A | [\bigvee_{j \in J} C_j] \wedge B) = \mu(A | B)$$

Im realen Universum \mathcal{V} ist vollkommene Unabhängigkeit praktisch nicht möglich. Erst recht kann es in einem endlichen Universum nicht unendlich viele unabhängige Wiederholungen eines Experiments geben. Bei der Definition von $P(A|B)$ handelt es sich daher um eine Idealisierung.

Um das Problem auf elegante Weise zu lösen, kann man sich neben dem realen Universum \mathcal{V} (zu jedem $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$) ein fiktives Universum $\mathcal{V}^{\mathbf{N}}$ vorstellen, das aus \mathbf{N} unabhängigen Paralleluniversen zusammengesetzt ist, deren jedes dem realen Universum gleicht.

Wir bezeichnen $\mathcal{V}^{\mathbf{N}}$ als das \mathbf{N} -Multiversum. Es stellt lediglich ein formales Mittel dar, um den Häufigkeitsgrad $P(A|B)$ als Grenzwert einer unendlichen Folge relativer Häufigkeiten definieren zu können. Es wird nicht davon ausgegangen, dass den fiktiv angenommenen Paralleluniversen eine reale Existenz zukommt.

Für das \mathbf{N} -Multiversum werden die möglichen Fakten analog zum Vorgehen für \mathcal{V} (im Sinne der klassischen Mechanik oder im Sinne der Quantentheorie) modelliert. Ebenso werden die deterministischen Gesetze eingeführt. Dabei wird das Bewegungsgesetz so festgelegt, dass es eine unabhängige Entwicklung der Paralleluniversen beschreibt.

Anschließend wird für $\mathcal{V}^{\mathbf{N}}$ ein äußeres Maß $\mu^{\mathbf{N}}$ angegeben. (Im Falle der klassischen Mechanik kann wiederum das Lebesguemaß verwendet werden.) Damit sind auch die bedingten Möglichkeitsmaße $\mu^{\mathbf{N}}(\cdot|\cdot)$ festgelegt. Jedem möglichen Faktum A (bzw. B) im realen Universum entspricht ein mögliches Faktum A_j (bzw. B_j) im j -ten Paralleluniversum. Damit lässt sich $P(A|B)$ über die oben angegebene Beziehung (***) definieren, wobei der Ausdruck $\mu^{\mathbf{N}}(\cdot|\cdot)$ an die Stelle von $\mu(\cdot|\cdot)$ tritt. Man stellt sich gewissermaßen vor, dass in jedem der

unabhängigen Paralleluniversen ein Experiment von genau derselben Art stattfindet und zählt die dabei vorkommenden "Treffer".

Zusammenfassung

Ausgehend von den anschaulich gegebenen Begriffen "wahrscheinlich" und "unwahrscheinlich" beschreiben wir mit $v(A)$ den Grad der Wahrscheinlichkeit und mit $\mu(A)$ den Grad der Unwahrscheinlichkeit von A .

Zwischen v und μ einerseits und den Modaloperatoren \square und \diamond besteht eine enge Analogie. $v(A)$ kann auch als Notwendigkeitsgrad und $\mu(A)$ als Möglichkeitsgrad von A bezeichnet werden. $\mu(A) \approx 0$ drückt aus, dass A nahezu unmöglich ist. Ebenso drückt $v(A) \approx 1$ aus, dass A nahezu notwendig ist.

Die Funktionen μ und v sind auf ganz \mathcal{A} definiert. In Analogie zu der Relation

$$\square(A) \Leftrightarrow \neg \diamond(\neg A)$$

sind μ und v miteinander verknüpft durch die Beziehung

$$v(A) = 1 - \mu(\neg A) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Für μ gelten die formalen Eigenschaften eines Möglichkeitsmaßes. Dies ergibt sich aus den entsprechenden Eigenschaften des Möglichkeitsoperators.

Von einer physikalischen Theorie wird erwartet, dass sie μ (und damit auch v) konkret festlegt.

Unter Verwendung von μ kann $P(A)$ als Limes relativer Häufigkeiten definiert werden. Dieser "Häufigkeitsgrad" $P(A)$ beschreibt die bei unendlich vielen Wiederholungen eines Experiments zu erwartende Anzahl der "Treffer".

$P(A)$ ist nicht notwendigerweise für jedes mögliche Faktum $A \in \mathcal{A}$ definiert. Wenn jedoch $P(A)$ für jedes Element A einer Teilalgebra \mathcal{A}_e von \mathcal{A} definiert ist, so hat P auf \mathcal{A}_e die formalen Eigenschaften eines (additiven) Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Traditionell bezeichnet man den Häufigkeitsgrad $P(A)$ als "Wahrscheinlichkeit" von A , obwohl das Konzept der Wahrscheinlichkeit eigentlich durch die Funktion v modelliert wird. Um Missverständnisse zu vermeiden, ist es sinnvoll, $v(A)$ als Notwendigkeitsgrad und $\mu(A)$ als Möglichkeitsgrad von A zu bezeichnen.

Auf der Basis der bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot | \cdot)$ lassen sich auch die für die Praxis relevanten bedingten "Wahrscheinlichkeiten" (genauer: die bedingten Häufigkeitsgrade) $P(A|B)$ definieren.

21. Exkurs: Das Stetigkeitsprinzip

Vorbemerkung: Zur Darstellung des nicht-deterministischen Gehalts der Quantentheorie ist es erforderlich, ein äußeres Maß μ auf der Algebra \mathcal{A} der möglichen Fakten festzulegen. Dies werden wir in Kapitel 23 realisieren. In den beiden nun folgenden Kapiteln 21 und 22 wollen wir vorab – und zwar ganz unabhängig von der Quantentheorie – die Frage erörtern, wie man generell vorgehen kann, um ein solches äußeres Maß zu definieren. Hierzu gehen wir von einem allgemeinen Prinzip aus, dem Stetigkeitsprinzip. Die Aufgabe des äußeren Maßes μ besteht darin anzugeben, welche der möglichen Fakten sehr unwahrscheinlich sind. Naheliegend ist dabei die Annahme, dass das mögliche Faktum $\forall_j \langle A_j \rangle$ (mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$) genau dann unwahrscheinlich ist, wenn es $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}$ gibt, die den A_j sehr ähnlich sind und für die das mögliche Faktum $\forall_j \langle B_j \rangle$ physikalisch unmöglich ist. Demnach sollte μ so definiert werden, dass für beliebige $A_j \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \approx 0 \Leftrightarrow \exists_{B_1 \in \mathcal{U}} \dots \exists_{B_n \in \mathcal{U}} [\forall_j \langle A_j \approx B_j \rangle \wedge \neg \hat{\Delta}(\forall_j \langle B_j \rangle)]$$

Diesen Gedanken werden wir in den Kapiteln 21 und 22 verfolgen. Diese beiden Kapitel können beim ersten Lesen übergangen werden. Die Beweise einiger Aussagen von Kapitel 23 beruhen allerdings auf den Ausführungen von Kapitel 22.

Das dem hier verfolgten Ansatz zugrundeliegende Prinzip kann auch wie folgt formuliert werden: Der Möglichkeitsgrad für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse $(A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n) \in \mathcal{E}$ hängt in stetiger Weise ab von den Eigenschaften $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$. Formal lässt sich dies ausdrücken durch die Implikation:

$$\forall_j \langle A_j \approx B_j \rangle \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle) \approx \mu(\forall_j \langle B_j, t_j \rangle)$$

Wegen der Gültigkeit einer deterministischen und reversiblen Bewegungsgleichung (sowohl im klassischen Fall als auch im Fall der Quantentheorie) ist es ausreichend, das Stetigkeitsprinzip nur für den Zeitpunkt 0 zu betrachten und die obige Implikation zu formulieren als:

$$(1) \quad \forall_j \langle A_j \approx B_j \rangle \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \approx \mu(\forall_j \langle B_j \rangle) \\ \text{(für Eigenschaften } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Dabei steht wie zuvor $\langle A \rangle$ für $\langle A, 0 \rangle$ für jedes $A \in \mathcal{U}$.

Voraussetzung für die Anwendung des Stetigkeitsprinzips ist, dass die Menge \mathcal{U} der Eigenschaften des Universums mit einer Metrik ausgestattet ist, die die Ähnlichkeit von Eigenschaften beschreibt. Im folgenden verstehen wir unter einer Metrik auf \mathcal{U} eine Abbildung

$$d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty]$$

mit den Eigenschaften

$$d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$d(A,B) = d(B,A) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

für Elemente $A, B, C \in \mathcal{U}$.

Zur Formulierung des Stetigkeitsprinzips benötigen wir außerdem eine Metrik D auf dem Wertebereich des äußeren Maßes, d.h. auf dem Intervall $[0, \infty]$. Hierbei handelt es sich um eine Abbildung

$$D : [0, \infty] \times [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$$

mit den entsprechenden Eigenschaften.

Sind derartige Metriken d und D auf \mathcal{U} bzw. $[0, \infty]$ gegeben, so kann das Stetigkeitsprinzip (1) formuliert werden als:

$$(2) \quad \forall_j d(A_j, B_j) \approx 0 \Rightarrow D(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \approx 0 \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Diese Aussage erhält einen exakten Sinn, wenn man sie als Ungleichung formuliert:

$$\underline{\text{CONT}}^{d,D} \quad D(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \leq \sum_j d(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Die Aussage $\text{CONT}^{d,D}$ könnte man, ausgehend von Metriken d auf \mathcal{U} und D auf $[0, \infty]$, als zusätzliches (nicht-deterministisches) Axiom in die Theorie aufnehmen.

Statt dies weiter zu verfolgen, wollen wir zunächst noch einen zweiten, alternativen Weg zur Formulierung des Stetigkeitsprinzips diskutieren.

Auf \mathcal{U} gibt es (wie auf jeder Menge) zunächst die Gleichheitsrelation " $=$ ". Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}$ gilt die triviale Implikation:

$$\forall_j (A_j = B_j) \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) = \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)$$

Die Beziehung (1) stellt eine Verallgemeinerung dieser Implikation auf den Fall annähernder Gleichheit dar und drückt so das Stetigkeitsprinzip aus.

Auf \mathcal{U} ist aber, sowohl im Fall der klassischen Mechanik als auch im Fall der Quantentheorie, zusätzlich eine Ordnungsrelation " \leq " gegeben. Im klassischen Fall entspricht " \leq " der Teilmengenbeziehung " \subset ", im quantentheoretischen Fall der Unterraumbeziehung " $<$ ". Aufgrund des Axioms MON gilt (für $A_j \in \mathcal{U}$ und $B_j \in \mathcal{U}$) die Implikation

$$\forall_j (A_j \leq B_j) \Rightarrow \forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_j \langle B_j \rangle$$

und wegen der Monotonie von μ :

$$\forall_j (A_j \leq B_j) \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)$$

Auch dies lässt sich im Sinne des Stetigkeitsprinzips verallgemeinern. Man erhält:

$$(1') \quad \forall_j (A_j \lesssim B_j) \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \lesssim \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)$$

(für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}$)

Dabei besagt $A \lesssim B$, dass die Beziehung $A \leq B$ *annähernd* gilt. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn es $A', B' \in \mathcal{U}$ gibt mit

$$A \approx A' \wedge B \approx B' \wedge A' \leq B'$$

Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ besagt $x \lesssim y$, dass entweder $x < y$ oder $x \approx y$ ist.

Beispiel 1: Für zwei Borel'sche Teilmengen A, B des klassischen Phasenraums Z gilt $A \lesssim B$ beispielsweise dann, wenn die Differenzmenge $A \setminus B$ ein kleines Lebesguemaß hat, wenn also gilt:

$$\lambda(A \setminus B) \approx 0$$

Beispiel 2: Für zwei Unterräume A, B des Hilbertraums \mathcal{H} gilt $A \lesssim B$, wenn $\pi_A \pi_{B^\perp} \approx 0$ ist.

Voraussetzung für die Anwendung des Stetigkeitsprinzips in Form der Implikation (1') ist, dass die Menge \mathcal{U} der Eigenschaften des Universums mit einer "Halbmetrik" ausgestattet ist, durch die beschrieben wird, wann die Relation $A \leq B$ für $A, B \in \mathcal{U}$ annähernd gilt.

Wir verstehen unter einer Halbmetrik auf \mathcal{U} eine Abbildung

$$\delta : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty]$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \delta(A, B) = 0 &\Leftrightarrow A \leq B \\ \delta(A, C) &\leq \delta(A, B) + \delta(B, C) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \end{aligned}$$

für Elemente $A, B, C \in \mathcal{U}$. Ist δ eine Halbmetrik, so drückt $\delta(A, B) \approx 0$ aus, dass die Beziehung $A \lesssim B$ besteht.

Jede Halbmetrik δ auf \mathcal{U} ist bimonoton (monoton wachsend im ersten und monoton fallend im zweiten Argument), d.h. es gelten:

$$\begin{aligned} A \leq A' &\Rightarrow \delta(A, B) \leq \delta(A', B) \quad (\text{für } A, A', B \in \mathcal{U}) \\ B \leq B' &\Rightarrow \delta(A, B') \leq \delta(A, B) \quad (\text{für } A, B, B' \in \mathcal{U}) \end{aligned}$$

Im Vergleich zu einer Metrik fehlt einer Halbmetrik vor allem die Eigenschaft der Symmetrie. Zu jeder Halbmetrik δ auf \mathcal{U} lässt sich durch

$$\delta'(A,B) := \delta(A,B) + \delta(B,A) \quad (\text{für alle } A,B \in \mathcal{U})$$

eine Metrik δ' auf \mathcal{U} bilden. δ' kann als die Symmetrisierung von δ bezeichnet werden.

Zur Formulierung des Stetigkeitsprinzips benötigen wir neben einer Halbmetrik δ auf \mathcal{U} auch eine Halbmetrik Δ auf dem Intervall $[0,\infty]$. Unter Verwendung dieser beiden Halbmetriken können wir anstelle von (1') formulieren:

$$(2') \quad \forall_j \delta(A_j, B_j) \approx 0 \Rightarrow \Delta(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \approx 0 \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Einen präzisen Sinn erhält das Stetigkeitsprinzip wiederum, indem es als Ungleichung formuliert wird:

$$\underline{\text{MON}}^{\delta, \Delta} \quad \Delta(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \leq \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Falls d die Symmetrisierung von δ und D die Symmetrisierung von Δ ist, folgt aus $\text{MON}^{\delta, \Delta}$ unmittelbar die Aussage $\text{CONT}^{d, D}$.

Wir wollen an dieser Stelle auf spezielle Metriken bzw. Halbmetriken eingehen, die sich auf dem Intervall $[0,\infty]$ definieren lassen. Unter einer Transformation auf $[0,\infty]$ verstehen wir eine bijektive Abbildung

$$f : [0,\infty] \rightarrow [0,\infty]$$

welche streng monoton wachsend und stetig ist. Im folgenden sei eine solche Transformation f auf $[0,\infty]$ gegeben. Die hierzu inverse Abbildung $g := f^{-1}$ ist dann ebenfalls eine Transformation auf $[0,\infty]$.

Mit

$$D_f(x,y) := |g(x) - g(y)| \quad (\text{für } x,y \in [0,\infty])$$

lässt sich eine Metrik auf $[0,\infty]$ definieren. Ebenso ergibt

$$\Delta_f(x,y) := \max(0, g(x) - g(y)) \quad (\text{für } x,y \in [0,\infty])$$

eine Halbmetrik auf $[0,\infty]$. Bei diesen Definitionen muss insbesondere

$$\infty - \infty := 0$$

gesetzt werden. Offenbar ist D_f die Symmetrisierung von Δ_f .

Indem wir D durch D_f ersetzen, erhalten wir als Spezialfall von $\text{CONT}^{d, D}$ die Aussage

$$\underline{\text{CONT}}^{d, f} \quad D_f(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \leq \sum_j d(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Ebenso ergibt sich als Spezialfall von $\text{MON}^{\delta, \Delta}$ die Aussage

$$\underline{\text{MON}}^{\delta, f} \quad \Delta_f(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \leq \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Die Aussage $\text{MON}^{\delta, f}$ ist äquivalent zu der Ungleichung

$$g(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle)) \leq g(\mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) + \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Indem man als Transformation f speziell die identische Abbildung id auf $[0, \infty]$ wählt, kann man definieren:

$$\text{CONT}^d \quad :\Leftrightarrow \quad \text{CONT}^{d, \text{id}}$$

sowie

$$\text{MON}^\delta \quad :\Leftrightarrow \quad \text{MON}^{\delta, \text{id}}$$

Fassen wir zusammen: Die Aussagen $\text{CONT}^{d, D}$ und $\text{MON}^{\delta, \Delta}$ stellen formale Bedingungen an das äußere Maß μ dar, die das Stetigkeitsprinzip ausdrücken. Inhaltlich besagt dieses Prinzip, dass ähnlichen empirischen Materialien durch μ ähnliche Werte zugeordnet werden. Wählt man speziell D_f für D oder Δ_f für Δ , so hängt der Grad der Stetigkeit von der Wahl der Transformation f ab.

Ausgehend von den Metriken d auf \mathcal{U} und D auf $[0, \infty]$ (bzw. von Halbmetriken δ auf \mathcal{U} und Δ auf $[0, \infty]$) könnte man die Aussage $\text{CONT}^{d, D}$ (bzw. $\text{MON}^{\delta, \Delta}$) als ein zusätzliches, nicht-deterministisches Axiom in die Theorie aufnehmen. Die Hinzunahme eines derartigen Axioms allein reicht jedoch nicht aus, da die Bedingung $\text{CONT}^{d, D}$ (bzw. $\text{MON}^{\delta, \Delta}$) nicht ausschließt, dass es sich bei μ um das triviale äußere Maß μ_0 handeln kann, welches jedem möglichen Faktum den Wert Null zuordnet. Damit ist dann auch nicht garantiert, dass sich die erforderlichen bedingten Möglichkeitsmaße mittels

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A})$$

überhaupt definieren lassen.

Aus diesem Grunde geben wir im folgenden Kapitel ein Verfahren an, mit dem sich – unter gewissen Voraussetzungen an die gegebenen deterministischen Axiome – ein äußeres Maß μ auf \mathcal{A} so konstruieren lässt, dass neben der Stetigkeitsbedingung bestimmte weitere Eigenschaften abgeleitet werden können. Dieses konstruktive Vorgehen stellt dann auch sicher, dass die Theorie nicht widersprüchlich werden kann.

22. Exkurs: Konstruktion äußerer Maße

Unser Ziel ist die Konstruktion eines äußeren Maßes μ auf \mathcal{A} , für das neben einer Stetigkeitsbedingung bestimmte weitere Eigenschaften bewiesen werden können. Zur Formulierung der Stetigkeit von μ benötigen wir zunächst eine Metrik bzw. eine Halbmetrik auf $[0, \infty]$. Hierzu gehen wir von einer Transformation f auf $[0, \infty]$ aus (d.h. von einer bijektiven, streng monoton wachsenden und stetigen Abbildung) und verwenden auf $[0, \infty]$ die Metrik D_f bzw. die Halbmetrik Δ_f . Außerdem nehmen wir eine Halbmetrik δ auf \mathcal{U} an und definieren die Metrik d als die Symmetrisierung von δ .

Als Stetigkeitsbedingung für das äußere Maß μ legen wir nicht $\text{CONT}^{d,f}$, sondern die Aussage $\text{MON}^{\delta,f}$ zugrunde. Für dieses Vorgehen sprechen mehrere Gründe: Zum einen ist die Bedingung $\text{MON}^{\delta,f}$ stärker als $\text{CONT}^{d,f}$, da d die Symmetrisierung von δ und D_f die Symmetrisierung von Δ_f ist. Zum anderen ist $\text{MON}^{\delta,f}$ formal einfacher zu handhaben als $\text{CONT}^{d,f}$.

Außerdem dient das äußere Maß μ vor allem dazu zu beschreiben, wann ein mögliches Faktum F unwahrscheinlich ist, wann also $\mu(F) \approx 0$ gilt. Nach dem Stetigkeitsprinzip ist dies für mögliche Fakten der Form $F = \forall_j \langle A_j \rangle$ (d.h. für mögliche empirische Materialien) mindestens dann der Fall, wenn es ein weiteres mögliches Faktum $G = \forall_j \langle D_j \rangle$ gibt, welches nach den deterministischen Gesetzen unmöglich ist und für das gilt:

$$\forall_j (A_j \approx D_j)$$

Dabei ist das mögliche Faktum G genau dann unmöglich, wenn gilt:

$$(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$$

Wenn wir nun die Ordnungsstruktur auf \mathcal{U} , das deterministische Axiom MON sowie die Monotonie des äußeren Maßes in Betracht ziehen, so ist es naheliegend, $\mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \approx 0$ dann anzunehmen, wenn es $D_j \in \mathcal{U}$ gibt mit

$$\forall_j (A_j \lesssim D_j)$$

und

$$(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$$

Auch aus diesem Grunde ist es sinnvoll, bei der Konstruktion des äußeren Maßes das Stetigkeitsprinzip in Form der Aussage $\text{MON}^{\delta,f}$ zugrunde zu legen.

Im folgenden sei also eine Halbmetrik δ auf \mathcal{U} sowie eine Transformation f auf $[0, \infty]$ gegeben. Wir suchen ein (nicht triviales) äußeres Maß μ auf \mathcal{A} , welches der Bedingung $\text{MON}^{\delta,f}$ genügt und für welches sich bestimmte weitere Eigenschaften ableiten lassen.

Eine Voraussetzung für die nachstehende Konstruktion von μ ist, dass es überhaupt ein physikalisch unmögliches empirisches Material gibt, dass also gilt:

$$(V1) \quad \text{Es gibt } D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \text{ mit } (\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$$

Sowohl im Fall der Quantentheorie als auch im Fall der klassischen Mechanik ist diese Voraussetzung trivialerweise gegeben.

Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ definieren wir:

$$\rho^\delta(A_1, \dots, A_n) := \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge (\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset \}$$

Der Wert von $\rho^\delta(A_1, \dots, A_n)$ liegt stets im Intervall $[0, \infty]$.

Als zweite Voraussetzung nehmen wir an, dass ρ^δ monoton ist in dem Sinne, dass für beliebige Elemente $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{U}$ gilt:

$$(V2) \quad \forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \leq \rho^\delta(B_1, \dots, B_m)$$

Ebenso wie (V1) muss die Voraussetzung (V2) aus den deterministischen Axiomen der Theorie ableitbar sein, wenn die folgende Konstruktion des äußeren Maßes μ möglich sein soll.

Wir erinnern an die Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\wedge &:= \{ \langle A_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \} \\ &= \{ \forall_j \langle A_j \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \} \end{aligned}$$

\mathcal{A}^\wedge ist die Menge aller endlichen logischen Konjunktionen von Ereignissen der Form $\langle A \rangle$ mit $A \in \mathcal{U}$. Wegen des deterministischen und reversiblen Bewegungsgesetzes gilt auch:

$$\mathcal{A}^\wedge = \{ \langle A_1, t_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_n, t_n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge (A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n) \in \mathcal{E} \}$$

Damit entspricht \mathcal{A}^\wedge der Menge aller empirischen Materialien, wenn sie als Elemente von \mathcal{A} dargestellt werden.

Aus der Voraussetzung (V2) folgt für beliebige $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{U}$ unmittelbar:

$$\forall_j \langle A_j \rangle = \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) = \rho^\delta(B_1, \dots, B_m)$$

Daher kann man eine Abbildung

$$\rho_\delta : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

definieren mittels

$$\rho_\delta(\forall_j \langle A_j \rangle) := \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \quad (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U})$$

Wegen (V2) ist auch ρ_δ monoton, d.h. es gilt:

$$F \subset F' \Rightarrow \rho_\delta(F) \leq \rho_\delta(F') \quad (\text{für } F, F' \in \mathcal{A}^\wedge)$$

Aus der Voraussetzung (V1) und den Definitionen von ρ^δ und ρ_δ lässt sich außerdem ableiten:

$$\begin{aligned} \rho_\delta(\emptyset) &= \rho_\delta(\bigvee_j \langle D_j \rangle) \quad (\text{für } D_j \in \mathcal{U} \text{ mit } (\bigvee_j \langle D_j \rangle) = \emptyset) \\ &\leq \sum_j \delta(D_j, D_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung ρ_δ ist demnach ein monotones Maß im Sinne der nachstehenden Definition.

Eine Abbildung

$$\rho : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

heißt *monotones Maß*, wenn sie monoton ist, d.h. wenn gilt

$$F \subset F' \Rightarrow \rho(F) \leq \rho(F') \quad (\text{für alle } F, F' \in \mathcal{A}^\wedge)$$

und wenn sie außerdem die Bedingung

$$\rho(\emptyset) = 0$$

erfüllt.

Bemerkung: Ist μ ein äußeres Maß auf \mathcal{A} , so ist die Restriktion $\mu|_{\mathcal{A}^\wedge}$ von μ auf \mathcal{A}^\wedge ein monotones Maß.

Bemerkung: Ist ρ ein monotones Maß auf \mathcal{A}^\wedge und f eine Transformation auf $[0, \infty]$, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung $f \circ \rho$ ein monotones Maß.

Für das monotone Maß ρ_δ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle) &\leq \rho_\delta(\bigvee_j \langle B_j \rangle) + \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ &\quad (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}) \end{aligned}$$

Somit erfüllt ρ_δ die Stetigkeitsbedingung MON^δ .

Zum Beweis: Aufgrund der Definition von ρ^δ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U}$ mit

$$(\bigvee_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$$

und

$$\rho_\delta(\bigvee_j \langle B_j \rangle) + \varepsilon \geq \sum_j \delta(B_j, D_j)$$

Die Dreiecksungleichung für δ liefert

$$\begin{aligned}\sum_j \delta(A_j, D_j) &\leq \sum_j \delta(A_j, B_j) + \sum_j \delta(B_j, D_j) \\ &\leq \sum_j \delta(A_j, B_j) + \rho_\delta(\bigvee_j \langle B_j \rangle) + \varepsilon\end{aligned}$$

Wegen der Definition von ρ^δ ist

$$\rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq \sum_j \delta(A_j, D_j)$$

und somit

$$\rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq \sum_j \delta(A_j, B_j) + \rho_\delta(\bigvee_j \langle B_j \rangle) + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt die behauptete Ungleichung. Sie ist aufgrund der gegebenen Definitionen äquivalent zu der Aussage MON^δ .

Für jedes monotone Maß

$$\rho : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

das der Bedingung MON^δ genügt, und für alle $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U}$ mit $(\bigvee_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$ gilt:

$$\begin{aligned}\rho(\bigvee_j \langle A_j \rangle) &\leq \rho(\bigvee_j \langle D_j \rangle) + \sum_j \delta(A_j, D_j) \quad (\text{wegen } \text{MON}^\delta) \\ &= \sum_j \delta(A_j, D_j)\end{aligned}$$

Aufgrund der Definitionen von ρ^δ und ρ_δ folgt hieraus:

$$\rho(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq \rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle)$$

Demnach ist ρ_δ das *maximale* monotone Maß, welches der Bedingung MON^δ genügt. Auf dieser Grundlage wollen wir nun das gesuchte äußere Maß μ definieren.

Wenn \mathcal{M} eine beliebige nicht leere Menge von äußeren Maßen auf der Algebra \mathcal{A} ist, so definieren wir:

$$\mu(A) := \sup \{ \mu'(A) \mid \mu' \in \mathcal{M} \} \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A})$$

Man kann leicht zeigen, dass auch μ ein äußeres Maß ist. Wir nennen dieses äußere Maß das Supremum von \mathcal{M} und bezeichnen es als $\text{sup}(\mathcal{M})$.

Für jedes äußere Maß μ auf \mathcal{A} , das der Bedingung $\text{MON}^{\delta, f}$ genügt, gilt die Ungleichung:

$$(*) \quad \mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq f(\rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle)) \quad (\text{für beliebige } n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U})$$

Diese Aussage kann kurz formuliert werden als:

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq f \circ \rho_\delta$$

Zum Beweis: Für alle $F \in \mathcal{A}^\wedge$ sei

$$\rho(F) := f^{-1}(\mu(F))$$

Die Abbildung

$$\rho : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

ist ein monotoneres Maß und genügt der Bedingung MON^δ . Wegen der Maximalität von ρ_δ folgt daher (für alle $F \in \mathcal{A}^\wedge$):

$$\begin{aligned} \mu(F) &= f(\rho(F)) \\ &\leq f(\rho_\delta(F)) \end{aligned}$$

und somit die Aussage (*).

Wir setzen nun:

$$\mathcal{M} := \{ \mu \mid \mu \text{ ist äußeres Maß auf } \mathcal{A} \text{ und erfüllt } (*) \}$$

Da das triviale äußere Maß μ_0 zu \mathcal{M} gehört, ist \mathcal{M} nicht leer. Wir erhalten deshalb mit

$$\mu_{\delta, f} := \sup(\mathcal{M})$$

ein äußeres Maß auf \mathcal{A} . Es lässt sich zeigen, dass $\mu_{\delta, f}$ die Bedingung (*) ebenfalls erfüllt und somit selbst zu \mathcal{M} gehört. Zu einer gegebenen Halbmetrik δ auf \mathcal{U} sowie einer monotonen und stetigen Transformation f auf $[0, \infty]$ ist $\mu_{\delta, f}$ daher das *maximale* äußere Maß μ auf \mathcal{A} , welches der Bedingung (*), d.h. der Beziehung

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq f \circ \rho_\delta$$

genügt.

Wegen der Monotonie von f und der Definition von ρ_δ ist für feste $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ die Ungleichung

$$\mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq f(\rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle))$$

genau dann erfüllt, wenn für beliebige $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U}$ mit

$$(\bigvee_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$$

gilt:

$$\mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq f(\sum_j \delta(A_j, D_j))$$

Daher ist die Bedingung (*) äquivalent zu der Aussage:

$$(**) \quad \mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \leq f(\sum_j \delta(A_j, D_j)) \quad (\text{für beliebige } n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \\ \text{sowie } D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \text{ mit } (\bigvee_j \langle D_j \rangle) = \emptyset)$$

$\mu_{\delta, f}$ kann folglich auch (unabhängig von ρ_δ) charakterisiert werden als das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , welches die Bedingung (**) erfüllt.

Um das äußere Maß $\mu_{\delta, f}$ näher zu beschreiben, wollen wir für $\mu_{\delta, f}(A)$ einen geschlossenen Ausdruck angeben.

Lemma: Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt (vgl. T.22.1):

$$\mu_{\delta, f}(A) = \inf \{ \sum_j f(\rho_\delta(F_j)) \mid F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge \text{ und } A \subset \bigcup_j F_j \}$$

Hierbei ist F_1, F_2, \dots eine endliche oder unendliche Folge von Elementen von \mathcal{A}^\wedge .

Zum Beweis: Da $\mu_{\delta, f}$ der Bedingung (*) genügt, gilt für $F \in \mathcal{A}^\wedge$ stets

$$\mu_{\delta, f}(F) \leq f(\rho_\delta(F))$$

Für $F_j \in \mathcal{A}^\wedge$ und $A \subset \bigcup_j F_j$ folgt

$$\begin{aligned} \mu_{\delta, f}(A) &\leq \sum_j \mu_{\delta, f}(F_j) \quad (\text{Sub-}\sigma\text{-Additivität von } \mu_{\delta, f}) \\ &\leq \sum_j f(\rho_\delta(F_j)) \end{aligned}$$

und hieraus die Richtung " \leq " der Gleichung. Für die umgekehrte Richtung muss man zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung ein äußeres Maß ergibt, welches der Bedingung (*) genügt. Aus der Maximalität von $\mu_{\delta, f}$ folgt dann die Richtung " \geq " der Gleichung.

Die Aussage des Lemmas kann folgendermaßen interpretiert werden: Unter einer Überdeckung von A mit Elementen von \mathcal{A}^\wedge verstehen wir eine Folge $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge$ mit $A \subset \bigcup_j F_j$. Der Wert dieser Überdeckung ist gegeben durch die Summe

$$\sum_j f(\rho_\delta(F_j))$$

Der Wert $\mu_{\delta, f}(A)$ ergibt sich nun als Infimum der Werte aller möglichen Überdeckungen von A mit Elementen von \mathcal{A}^\wedge . Falls es eine in diesem Sinne minimale Überdeckung gibt, so ist $\mu_{\delta, f}(A)$ einfach gleich dem Wert dieser Überdeckung.

Als eine weitere Voraussetzung nehmen wir nun an, dass sich aus den deterministischen Axiomen die Aussage

$$(V3) \quad F \subset \bigcup_j F_j \Rightarrow \exists_j (F \subset F_j) \quad (\text{für jedes } F \in \mathcal{A}^\wedge \text{ und jede} \\ \text{unendliche Folge } F_j \in \mathcal{A}^\wedge)$$

ableiten lässt. Aus (V3) folgt, dass es zu $F \in \mathcal{A}^\wedge$ keine Überdeckung gibt, die einen kleineren Wert hat als die spezielle Überdeckung, welche nur aus F selbst besteht. Demnach gilt für $\mu_{\delta,f}$ nicht nur die Ungleichung (*), sondern darüber hinaus die Aussage

$$(***) \quad \mu_{\delta,f}(\bigvee_j \langle A_j \rangle) = f(\rho_\delta(\bigvee_j \langle A_j \rangle)) \quad (\text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U})$$

Sie kann kurz formuliert werden als:

$$(\mu_{\delta,f})|_{\mathcal{A}^\wedge} = f \circ \rho_\delta$$

Aus der Aussage (***) kann man ableiten, dass $\mu_{\delta,f}$ das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} ist, welches die Bedingung $\text{MON}^{\delta,f}$ erfüllt.

Zum Beweis: Da ρ_δ der Bedingung MON^δ genügt, folgt aus (***) unmittelbar, dass $\mu_{\delta,f}$ die Forderung $\text{MON}^{\delta,f}$ erfüllt. Andererseits wurde für jedes beliebige äußere Maß μ gezeigt: Wenn μ $\text{MON}^{\delta,f}$ erfüllt, so gilt für μ die Bedingung (*). Demnach ist $\mu \in \mathcal{M}$ und folglich $\mu(A) \leq \mu_{\delta,f}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Inhaltlich bedeutet dies, dass $\mu_{\delta,f}$ das *schwächste* äußere Maß ist, welches der Aussage $\text{MON}^{\delta,f}$ entspricht. Dies kann auch so interpretiert werden, dass der Gehalt von $\mu_{\delta,f}$ *nur* darin besteht, das Stetigkeitsprinzip (in Form der Aussage $\text{MON}^{\delta,f}$) wiederzugeben.

Zu einer gegebenen Halbmetrik δ auf \mathcal{U} erhält man somit für jede Transformation f auf $[0, \infty]$ ein äußeres Maß $\mu_{\delta,f}$ auf \mathcal{A} , welches dem Stetigkeitsprinzip in Form der Bedingung $\text{MON}^{\delta,f}$ genügt. Der Grad der Stetigkeit hängt dabei von der Wahl der Transformation f ab. Zugleich wird durch f auch die Stärke des so konstruierten äußeren Maßes bestimmt. Die Wahl von f muss sich daher nach dem empirischen Gehalt richten, den die Theorie haben soll.

Wählt man eine Transformation f , die ein zu kleines (und damit zu starkes) äußeres Maß $\mu_{\delta,f}$ ergibt, so kann dies zur empirischen Widerlegung der Theorie führen. Wählt man jedoch eine Transformation, die das äußere Maß zu groß (und damit zu schwach) werden lässt, so weist die hieraus resultierende Theorie möglicherweise nicht den erforderlichen empirischen Gehalt auf. Für den Fall der Quantentheorie sollte f beispielsweise so gewählt werden, dass sich für die Beschreibung eines Experiments die bekannte Aussage **PROB** ergibt.

Zusammenfassung

Ziel unseres Vorgehens ist die Konstruktion eines äußeren Maßes μ auf \mathcal{A} auf der Basis des Stetigkeitsprinzips. Dieses Prinzip besagt, dass μ ähnlichen empirischen Materialien ähnliche Werte zuordnen soll.

Formal wird diese Forderung ausgedrückt durch die Ungleichung

$$\underline{\text{MON}}^{\delta, f} \quad \Delta_f(\mu(\forall_j \langle A_j \rangle), \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)) \leq \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Dabei ist $\delta : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow [0, \infty]$ eine Halbmetrik, d.h. für Elemente $A, B, C \in \mathcal{U}$ gelten:

$$\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \leq B \\ \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Voraussetzung ist, dass auf \mathcal{U} eine Ordnungsrelation \leq besteht. Außerdem ist

$$f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$$

eine stetige, streng monoton wachsende (bijektive) Transformation auf $[0, \infty]$, und mit

$$\Delta_f(x, y) := \max(0, f^{-1}(x) - f^{-1}(y)) \quad (\text{für } x, y \in [0, \infty])$$

wird die Halbmetrik Δ_f auf $[0, \infty]$ definiert. Dabei wird insbesondere $\infty - \infty := 0$ gesetzt.

Für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ definieren wir:

$$\rho^\delta(A_1, \dots, A_n) := \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge (\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset \}$$

Mit der Definition

$$\mathcal{A}^\wedge := \{ \forall_j \langle A_j \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \}$$

entspricht $\mathcal{A}^\wedge \subset \mathcal{A}$ der Menge der empirischen Materialien.

Es wird angenommen, dass sich aus den deterministischen Axiomen die folgenden drei Voraussetzungen ableiten lassen:

(V1) Es gibt ein physikalisch unmögliches empirisches Material, d.h. es gibt $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U}$ mit $(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$

(V2) ρ^δ ist monoton, d.h. für $A_j \in \mathcal{U}$ und $B_k \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \leq \rho^\delta(B_1, \dots, B_m)$$

(V3) Für jedes empirische Material $F \in \mathcal{A}^\wedge$ und für jede unendliche Folge empirischer Materialien $F_j \in \mathcal{A}^\wedge$ gilt:

$$F \subset \bigcup_j F_j \Rightarrow \exists_j (F \subset F_j)$$

Mittels

$$\rho_\delta(\forall_j \langle A_j \rangle) := \rho^\delta(A_1, \dots, A_n)$$

wird eine Abbildung

$$\rho_\delta : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

definiert. ρ_δ ist ein monotones Maß, d.h. es gelten:

$$F \subset F' \Rightarrow \rho_\delta(F) \leq \rho_\delta(F') \quad (\text{für alle } F, F' \in \mathcal{A}^\wedge)$$

sowie

$$\rho_\delta(\emptyset) = 0$$

ρ_δ ist das *maximale* monotone Maß, das der Stetigkeitsbedingung MON^δ genügt.

$\mu_{\delta, f}$ wird definiert als das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , für welches gilt:

$$(\mu_{\delta, f})|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq f \circ \rho_\delta$$

Für dieses äußere Maß gilt dann auch:

$$(\mu_{\delta, f})|_{\mathcal{A}^\wedge} = f \circ \rho_\delta$$

$\mu_{\delta, f}$ ist das maximale (schwächste) äußere Maß auf \mathcal{A} , das der Stetigkeitsbedingung $\text{MON}^{\delta, f}$ genügt. In diesem Sinne drückt $\mu_{\delta, f}$ *nur* das Stetigkeitsprinzip aus. Die Stärke von $\mu_{\delta, f}$ wird unter anderem bestimmt durch die Wahl der Transformation f . Diese Wahl muss so erfolgen, dass $\mu_{\delta, f}$ den empirischen Gehalt der Theorie richtig wiedergibt.

23. Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie

Zur Darstellung des nicht-deterministischen Gehalts der Quantentheorie wollen wir hier ein äußeres Maß μ auf der Algebra \mathcal{A} der möglichen Fakten definieren. Durch die Definition dieses äußeren Maßes wird das probabilistische Gesetz der Quantentheorie festgelegt. Dabei folgen wir der in den beiden letzten Kapiteln entwickelten Vorgehensweise zur Konstruktion eines äußeren Maßes auf der Basis des Stetigkeitsprinzips. Insbesondere ergeben sich aus Kapitel 22 auch die Beweise zu einigen der nachstehenden Aussagen.

Es sei L der lineare Raum aller stetigen (linearen) Operatoren auf \mathcal{H} . Für den Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ kann man auf L mit

$$\langle L, M \rangle := \operatorname{tr} LM^* \quad (\text{für alle } L, M \in L)$$

das Skalarprodukt und dann mit

$$|L| := \langle L, L \rangle^{1/2} \quad (\text{für alle } L \in L)$$

die (euklidische) Norm

$$| \cdot | : L \rightarrow [0, \infty)$$

definieren.

Im allgemeinen Fall (also auch dann, wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist) lässt sich in entsprechender Weise mit

$$|L| := (\operatorname{tr} LL^*)^{1/2} \quad (\text{für alle } L \in L)$$

eine (verallgemeinerte) Norm

$$| \cdot | : L \rightarrow [0, \infty)$$

definieren. Diese Norm erfüllt die Dreiecksungleichung

$$|L + M| \leq |L| + |M| \quad (\text{für alle } L, M \in L)$$

auch dann, wenn $|L|$, $|M|$ oder $|L + M|$ den Wert ∞ hat (siehe T.23.1).

Mit

$$\delta(A, B) := |\pi_A \pi_{B^\perp}| \quad (\text{für alle } A, B \in \mathcal{H})$$

wird eine Halbmetrik auf \mathcal{U} definiert (vgl. T.23.2; zum Begriff der Halbmetrik siehe die Zusammenfassung von Kapitel 22). Wie jede Halbmetrik ist δ im ersten Argument monoton wachsend und im zweiten Argument monoton fallend. Außerdem gelten für δ die Aussagen (vgl. T.23.3, T.23.5 und T.23.6):

$$(L1) \quad \delta(A, B) = \delta(B^\perp, A^\perp)$$

$$(L2) \quad \delta(\oplus_j E_j, B) \leq \sum_j \delta(E_j, B) \quad (\text{für vertauschbare } E_j \in \mathcal{H})$$

$$(L3) \quad \delta(A, \cap_j E_j) \leq \sum_j \delta(A, E_j) \quad (\text{für vertauschbare } E_j \in \mathcal{H})$$

Aus den deterministischen Axiomen lassen sich die folgenden Aussagen ableiten (vgl. T.23.7 bis T.23.9):

- (L4) $(\forall_j \langle A_j \rangle) \neq \emptyset \wedge \forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \forall_k \exists_j (A_j < B_k)$
 (für beliebige $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{U}$)
- (L5) Zu $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ mit $(\forall_j \langle A_j \rangle) = \emptyset$ gibt es paarweise vertauschbare $D_j < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = o$ und $\forall_j (A_j < D_j)$
- (L6) $F \subset \bigcup_j F_j \Rightarrow \exists_j (F \subset F_j)$
 (für jedes $F \in \mathcal{A}^\wedge$ und jede unendliche Folge $F_j \in \mathcal{A}^\wedge$)

In der durch das Axiomensystem AX angegebenen Theorie gibt es mindestens ein physikalisch unmögliches empirisches Material. Diese Aussage ist äquivalent zu der Bedingung:

- (V1) Es gibt $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U}$ mit $(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$

Zum Beweis von (V1) genügt es, $n := 1$ und $D_1 := o$ zu setzen.

Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ definieren wir:

$$\rho^\delta(A_1, \dots, A_n) := \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge (\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset \} \\ \in [0, \infty]$$

Für ρ^δ gilt die Aussage

- (V2) $\forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \leq \rho^\delta(B_1, \dots, B_m)$
 (für beliebige $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ und $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{U}$)

Zum Beweis: Es sei $\forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle$. Falls $(\forall_j \langle A_j \rangle) = \emptyset$ ist, folgt $\rho^\delta(A_1, \dots, A_n) = 0$, und es ist nichts weiter zu beweisen. Anderenfalls gibt es nach (L4) eine Abbildung der Indexbereiche

$$\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

so dass für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$A_{\sigma(k)} < B_k$$

Zu $\varepsilon > 0$ seien $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{U}$ mit $(\forall_k \langle D_k \rangle) = \emptyset$ und

$$\rho^\delta(B_1, \dots, B_m) + \varepsilon \geq \sum_k \delta(B_k, D_k)$$

Wegen (L5) und der Monotonie von δ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die D_k paarweise vertauschbar sind mit $\bigcap_k D_k = o$.

Zu jedem j sei

$$K(j) := \sigma^{-1}(j)$$

sowie

$$G_j := \bigcap_{k \in K(j)} D_k$$

Die G_j sind ebenfalls paarweise vertauschbar und erfüllen

$$\bigcap_j G_j = 0$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) &\leq \sum_j \delta(A_j, G_j) && \text{(Definition von } \rho^\delta) \\ &\leq \sum_j \sum_{k \in K(j)} \delta(A_j, D_k) && \text{(mit (L3))} \\ &\leq \sum_j \sum_{k \in K(j)} \delta(B_k, D_k) && \text{(Monotonie von } \delta) \\ &= \sum_k \delta(B_k, D_k) \\ &\leq \rho^\delta(B_1, \dots, B_m) + \varepsilon \end{aligned}$$

Da dies für alle ε gilt, folgt

$$\rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \leq \rho^\delta(B_1, \dots, B_m)$$

und damit die zu beweisende Monotonie von ρ^δ (QED).

Neben den Bedingungen (V1) und (V2) ist auch die Voraussetzung (V3) aus Kapitel 22 erfüllt. (Sie ist mit der Aussage (L6) identisch). Die in Kapitel 22 bewiesenen Aussagen können daher im folgenden verwendet werden.

Da ρ^δ die Bedingung (V2) erfüllt, können wir die Abbildung

$$\rho : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$$

definieren durch

$$\rho(\forall_j \langle A_j \rangle) := \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \quad (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U})$$

Damit ist ρ in kanonischer Weise aus den deterministischen Gesetzen sowie der Halbmetrik δ abgeleitet.

Aufgrund von (L5) und der Definition von ρ^δ gilt für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ (vgl. T.23.10):

$$\rho(\forall_j \langle A_j \rangle) = \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge \perp_j D_j \}$$

Ferner ist ρ das maximale monotone Maß auf \mathcal{A}^\wedge , welches die Stetigkeitsbedingung MON^δ erfüllt. Diese Bedingung besagt:

$$\begin{aligned} \text{MON}^\delta \quad \rho(\forall_j \langle A_j \rangle) - \rho(\forall_j \langle B_j \rangle) &\leq \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ & \quad (\text{für beliebige } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}) \end{aligned}$$

(Zur Definition monotoner Maße siehe die Zusammenfassung von Kapitel 22.)

Wir definieren \mathcal{M} als die Menge aller äußeren Maße μ' auf \mathcal{A} , die der Bedingung

$$\mu'|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq \rho^2$$

genügen, und setzen

$$\mu := \sup(\mathcal{M})$$

Damit ist μ das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq \rho^2$$

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ kann der Wert von μ explizit angegeben werden als:

$$\mu(A) = \inf \{ \sum_j \rho(F_j)^2 \mid F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge \text{ und } A \subset \bigcup_j F_j \}$$

Hierbei ist F_1, F_2, \dots eine endliche oder unendliche Folge von Elementen von \mathcal{A}^\wedge .

μ ist auch das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} = \rho^2$$

Außerdem ist μ das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , welches mit der durch

$$f(x) := x^2 \quad (\text{für } x \in [0, \infty])$$

gegebenen Transformation die Bedingung $\text{MON}^{\delta, f}$ erfüllt. Diese Bedingung besagt:

$$\begin{aligned} \text{MON}^{\delta, f} \quad f^{-1}(\mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle)) - f^{-1}(\mu(\bigvee_j \langle B_j \rangle)) &\leq \sum_j \delta(A_j, B_j) \\ &(\text{für beliebige } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}) \end{aligned}$$

μ ist somit das schwächste äußere Maß, welches im Sinne der Aussage $\text{MON}^{\delta, f}$ stetig ist. Der Gehalt von μ besteht daher *ausschließlich* darin, das Stetigkeitsprinzip in Form der Aussage $\text{MON}^{\delta, f}$ wiederzugeben. Die Transformation f wurde dabei so gewählt, dass sich für μ die bekannte Aussage PROB ergibt (siehe unten).

Da μ der Bedingung $\text{MON}^{\delta, f}$ genügt, ist μ stetig im Sinne der Aussage

$$\begin{aligned} \bigvee_j (A_j \approx B_j) &\Rightarrow \mu(\bigvee_j \langle A_j \rangle) \approx \mu(\bigvee_j \langle B_j \rangle) \\ &(\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U}) \end{aligned}$$

Nach der Festlegung des äußeren Maßes μ können wir die bedingten Möglichkeitsmaße definieren durch:

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

Der Ausdruck $\mu(A|B)$ gibt den (bedingten) Möglichkeitsgrad an und beschreibt somit den Grad der Unwahrscheinlichkeit von A bei gegebenem B . Hierzu wird mit

$$\nu(A|B) := 1 - \mu(\neg A|B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

der (bedingte) Notwendigkeitsgrad definiert. Er beschreibt den Grad der Wahrscheinlichkeit von A bei gegebenem B .

Im folgenden wollen wir einige Gleichungen angeben, die sich für ρ bzw. μ ableiten lassen. Die dabei auftretenden Indexmengen werden jeweils als endlich vorausgesetzt.

Für paarweise vertauschbare $E_j < \mathcal{H}$ sowie $A < \mathcal{H}$ gilt:

$$\rho(\langle A \rangle \wedge \forall_j \langle E_j \rangle) = |\pi_A \pi_{\cap_j E_j}| \quad (\text{vgl. T.23.12})$$

Für paarweise vertauschbare $E_{s,j} < \mathcal{H}$ und für alle $A < \mathcal{H}$ mit $\dim A < \infty$ gilt (siehe T.23.11):

$$\begin{aligned} (\ddagger) \quad \mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{s,j} \rangle) &= |\pi_A \pi_{\oplus_s \cap_j E_{s,j}}|^2 \\ &= \text{tr}(\pi_A \pi_{\oplus_s \cap_j E_{s,j}}) \end{aligned}$$

Dabei durchläuft j zu jedem s einen Indexbereich $\{1, \dots, n(s)\}$. Die Aussage (\ddagger) stellt eine für das Folgende grundlegende Eigenschaft des äußeren Maßes μ dar.

Zu jedem $A < \mathcal{H}$ mit $0 < \dim A < \infty$ wird mittels

$$W_A := \pi_A / \text{tr} \pi_A$$

ein sogenannter "statistischer Operator" definiert, d.h. ein nicht-negativ definierter Operator mit $\text{tr} W_A = 1$. Damit folgt aus (\ddagger) für paarweise vertauschbare $E_{s,j} < \mathcal{H}$ die Aussage:

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle E_{s,j} \rangle | \langle A \rangle) = \text{tr}(\pi_{\oplus_s \cap_j E_{s,j}} W_A)$$

Speziell gelten für $A, B < \mathcal{H}$ die Gleichungen

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle) = \text{tr} \pi_A \pi_B \quad (\text{falls } \dim A < \infty)$$

und

$$\mu(\langle A \rangle) = \text{tr} \pi_A$$

Sofern $0 < \dim B < \infty$ ist, gilt außerdem:

$$\mu(\langle A \rangle | \langle B \rangle) = \text{tr} \pi_A \pi_B / \text{tr} \pi_B$$

Für $B := [\varphi]$ mit $\varphi \in \mathcal{H}$ und $|\varphi| = 1$ ergibt dies insbesondere die Aussage

$$\text{PROB: } \mu(\langle A \rangle | \langle \varphi \rangle) = |\pi_A \varphi|^2$$

Durch den konstruktiven Ansatz bei der Bildung von μ ist garantiert, dass μ auf ganz \mathcal{A} definiert ist und die angegebenen Eigenschaften aufweist, ohne dass Widersprüche – vergleichbar mit dem Problem der Bell'schen Ungleichung – auftreten können.

Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird das probabilistische Gesetz der Quantentheorie eingeführt, indem ein äußeres Maß μ auf der Algebra \mathcal{A} definiert wird.

Mit

$$\delta(A,B) := (\text{tr } \pi_A \pi_{B^\perp} \pi_A)^{1/2} \quad (\text{für } A, B < \mathcal{H})$$

wird eine Halbmetrik auf \mathcal{U} definiert.

Es wird eine Abbildung $\rho : \mathcal{A}^\wedge \rightarrow [0, \infty]$ definiert, für die gilt:

$$\rho(\forall_j \langle A_j \rangle) = \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge \perp_j D_j \}$$

für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$.

ρ ist das maximale monotone Maß, das der Stetigkeitsbedingung MON^δ genügt.

μ wird definiert als das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq \rho^2$$

μ ist zugleich das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} mit

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} = \rho^2$$

Ferner ist μ das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , das der Stetigkeitsbedingung $\text{MON}^{\delta, f}$ genügt, wobei die Transformation f durch

$$f(x) = x^2 \quad (\text{für } x \in [0, \infty])$$

gegeben ist.

μ ist somit stetig im Sinne der Implikation

$$\forall_j (A_j \approx B_j) \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \approx \mu(\forall_j \langle B_j \rangle) \\ (\text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \text{ und } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{U})$$

Für paarweise vertauschbare $E_{s,j} < \mathcal{H}$ und für alle $A < \mathcal{H}$ mit $\dim A < \infty$ gilt:

$$(\ddagger) \quad \mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{s,j} \rangle) = \text{tr}(\pi_A \pi_{\oplus_s \cap_j E_{s,j}})$$

Zu jedem s durchläuft j dabei einen Indexbereich $\{1, \dots, n(s)\}$.

Mit

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

$$\nu(A|B) := 1 - \mu(\neg A|B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

werden die bedingten Möglichkeits- bzw. Notwendigkeitsgrade definiert.

Die Transformation f wurde so gewählt, dass sich für μ die Aussage

$$\text{PROB} \quad \mu(\langle A \rangle | \langle \varphi \rangle) = |\pi_A \varphi|^2$$

ergibt.

Durch den konstruktiven Ansatz ist sichergestellt, dass keine Widersprüche – vergleichbar mit dem Problem der Bell'schen Ungleichung – auftreten können.

24. Die Initialbedingung und der Zeitpfeil

Grundsätzlich gelten die folgenden Überlegungen zur Rolle der Initialbedingung und zum Zeitpfeil in ganz ähnlicher Weise für die klassische Mechanik wie für die Quantentheorie.

Die bisher dargestellte Theorie hat, was ihre deterministischen und ihre probabilistischen Gesetze betrifft, zwei grundlegende Eigenschaften: Zum einen ist sie reversibel, d.h. invariant gegenüber einer Zeitumkehr zum Zeitpunkt 0 (bei entsprechender Umkehr der Vorzeichen der Impulse). Zum andern ist sie stationär in dem Sinne, dass eine Verschiebung der Zeitachse nichts an der Theorie ändert. Beides gilt insbesondere für das durch U_t (bzw. β_t) gegebene Bewegungsgesetz. Aus der Reversibilität zum Zeitpunkt 0 und der Stationarität folgt, dass eine Zeitumkehr auch zu jedem beliebigen Zeitpunkt t erfolgen kann. (Der Einfachheit halber setzen wir in diesem Kapitel $T = \mathbb{R}$ voraus.)

Eine derartige Theorie beschreibt zunächst ein Universum, das sich zu jedem Zeitpunkt im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, in dem es keine Entropiezunahme gibt und in dem die Zeit keine ausgezeichnete Richtung aufweist.

Im Gegensatz dazu erleben wir die Welt als ein zeitlich gerichtetes Geschehen. Gewisse Abläufe finden immer nur in einer bestimmten Richtung statt, nie in der umgekehrten. Solche Abläufe bezeichnet man als "irreversibel". Diese Irreversibilität des Geschehens kann allgemein beschrieben werden mit der Aussage, dass die Entropie des Universums stets zunimmt.

Wir nehmen aus diesem Grunde an, dass es ein allgemeines Gesetz der Entropiezunahme gibt, welches die Entwicklung des Universums bestimmt. Wir müssen dann davon ausgehen, dass die Entropie zu einem frühen Zeitpunkt t_0 im Weltablauf einen im Vergleich zu jedem späteren Zeitpunkt minimalen Wert gehabt hat. Diesen Zeitpunkt t_0 bezeichnen wir als "Anfangszeitpunkt".

Bemerkung: Es kommt hier nicht darauf an, den Zeitpunkt t_0 mit einem tatsächlichen Anfangszeitpunkt der Entwicklung des Universums – etwa mit dem Zeitpunkt des "Urknalls" – zu identifizieren. Vielmehr genügt es, als t_0 einen sehr frühen Zeitpunkt anzunehmen, der vor dem gesamten uns interessierenden Geschehen liegt (also z.B. vor der Entwicklung des Sonnensystems einschließlich der darin stattfindenden biologischen Evolution).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir formal den Anfangszeitpunkt auf $t_0 = 0$ setzen. Zu diesem Zeitpunkt 0 muss das Universum eine geringere Entropie aufgewiesen haben als zu jedem späteren Zeitpunkt. Um diese Tatsache auszudrücken, müssen wir dem Universum eine entsprechende Eigenschaft zuschreiben, die wir als Initialeigenschaft bezeichnen. In der Theorie wird diese Eigenschaft durch ein Element $UR \in \mathcal{U}$ dargestellt. Wir bezeichnen das mögliche Faktum $\langle UR \rangle$ (gleichbedeutend mit $\langle UR, 0 \rangle$) als *Initialbedingung*.

Es beschreibt die Tatsache, dass das Universum sich zur Zeit 0 in einer Situation geringer Entropie befand. Die weitere kosmische Evolution war dann durch eine beständige Zunahme der Entropie charakterisiert.

Als Beispiel betrachte man ein klassisch mechanisches Universum, das (ausgeschlossen) aus einer großen, aber endlichen Anzahl neutraler, punktförmiger Teilchen besteht, zwischen denen als einzige Kraft die Gravitation herrscht. $\langle UR \rangle$ beschreibe z.B. die Tatsache, dass sich diese Teilchen zur Zeit 0 in einem bestimmten Raumsegment R befanden und dass ihre Gesamtenergie E in einem Intervall ΔE lag. Wir haben es hier mit einem klassischen Mehrkörpersystem zu tun. Ein solches System zeigt bekanntlich ein chaotisches Verhalten. Mit hoher Wahrscheinlichkeit erhalten von Zeit zu Zeit einzelne Teilchen eine ausreichende Energie, um der Anziehungskraft der übrigen Teilchen zu entkommen. Die in dem Raumsegment R befindliche Materiemenge wird dadurch im Laufe der Zeit immer kleiner, und sie verliert Energie.

Der beschriebene Vorgang stellt einen typischen Fall von Entropiezunahme dar. Wenn es sich bei dem Raumsegment R und dem Intervall ΔE um makroskopische Bereiche handelt, kann ein ganz ähnliches Beispiel auch für den Fall der Quantentheorie konstruiert werden. Man kann einen Materiehaufen der beschriebenen Art als ein vereinfachtes Modell eines "Sterns" betrachten. Der von diesem Stern ausgehende Teilchenstrom wäre dann als "Strahlung" zu verstehen. Je größer der Wert der anfänglichen Energie E ist, desto stärker ist diese Strahlung und desto schneller erfolgt sowohl der Materie- als auch der Energieverlust des "Sterns".

Das Beispiel zeigt im übrigen, in welchem Sinne auch in einem rein mechanischen System mit deterministischem Bewegungsgesetz eine Entropiezunahme stattfinden kann. Es zeigt demnach auch, dass es keinen Widerspruch gibt zwischen dem Bestehen eines deterministischen Bewegungsgesetzes und der Existenz von Abläufen, die mit einer Zunahme der Entropie einhergehen. Grundlage hierfür ist zum einen, dass eine Initialbedingung $\langle UR \rangle$ angenommen wird, die z.B. eine räumliche Konzentration der betrachteten Materie (und somit auch eine Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht) beinhaltet. Zum anderen wird aber auch ein Wahrscheinlichkeitsgesetz zugrunde gelegt. Im Falle der klassischen Mechanik handelt es sich dabei um die Gleichverteilung auf der Teilmenge UR des Phasenraums Z . In dem betrachteten Beispiel geht nun die gegebene Konstellation mit hoher Wahrscheinlichkeit über in eine neue Konstellation, die (unter anderem) durch eine gleichmäßigere Verteilung der Teilchen im Raum charakterisiert ist. Eine Rückkehr zu der ursprünglichen durch die Initialeigenschaft beschriebenen Konstellation ist extrem unwahrscheinlich. Dieser irreversible Prozess stellt eine Zunahme der Entropie und zugleich eine Annäherung an das thermodynamische Gleichgewicht dar. Die in eine bestimmte Richtung fließende Strahlung ist Ausdruck dieser Entropiezunahme.

Wenngleich die Mechanismen in einem realen Stern andere sein mögen, handelt es sich doch prinzipiell um einen vergleichbaren Prozess.

Bemerkung: Aus der Perspektive des Laplace'schen Dämons bewegt sich das System auf einem bestimmten Pfad im Zustandsraum. Das Phänomen der Entropiezunahme ist aus dieser Perspektive nicht von Bedeutung. Aus unserer makroskopischen Perspektive hingegen gliedert sich der Zustandsraum in grobe Teilmengen, die den wahrnehmbaren makroskopischen Eigenschaften entsprechen. Für den Übergang von einem Zeitpunkt zu einem anderen ergeben sich damit Übergangswahrscheinlichkeiten von jeder dieser makroskopischen Eigenschaften zu jeder anderen. Die Initialeigenschaft legt den genauen Punkt im Zustandsraum nicht fest. Beginnend mit der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ bewegt sich das System im Laufe der Zeit mit hoher Wahrscheinlichkeit so, dass es immer mehr zu jenen makroskopischen Eigenschaften, also zu jenen Teilmengen des Zustandsraums gelangt, die einer höheren Entropie entsprechen. Diese besteht z.B. darin, dass sich die als Strahlung ausgesandte Materie immer gleichmäßiger im Raum verteilt. Die Entropiezunahme eines Systems ist somit ein Prozess, der im Übergang von bestimmten makroskopischen Eigenschaften zu anderen besteht. Man kann daher sagen, dass die Zunahme der Entropie einen makroskopischen Prozess darstellt. Der Laplace'sche Dämon, welcher alle mikroskopischen Details des Universums kennt, interessiert sich weder für die Übergangswahrscheinlichkeiten noch für das Konzept der Entropiezunahme. Das bedeutet aber nicht, dass es sich hierbei um eine Illusion handelt, dass also die Entropiezunahme "im Grunde nicht existiert". Wir können es so formulieren: Der Laplace'sche Dämon weiß, dass ein System, welches von der Initialbedingung ausgeht, mit hoher Wahrscheinlichkeit zu Eigenschaften gelangt, die einer höheren Entropie entsprechen, er interessiert sich aber nicht dafür.

Die Tatsache, dass das Universum zu dem (weit zurückliegenden) Zeitpunkt 0 die Eigenschaft UR aufgewiesen hat, drückt aus, dass es damals weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt war. Damit erklärt sie zugleich, warum die Welt sich noch heute nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, sondern in einem Prozess weiterer Entropiezunahme befindet. Hätte sich das Universum zur Zeit 0 nicht in einem starken thermodynamischen Ungleichgewicht befunden, so wäre es extrem unwahrscheinlich, dass sich spontan eine Situation erheblichen thermodynamischen Ungleichgewichts hätte entwickeln können, wie wir sie heute vorfinden.

Die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ führt hinsichtlich der Zeit zu einem Symmetriebruch. Dabei wird nicht die Reversibilität der Zeit aufgehoben, sondern lediglich die Stationarität, d.h. die Invarianz gegenüber Zeitverschiebungen. Eine Zeitspiegelung am Zeitpunkt 0 ist also nach wie vor möglich, nicht aber eine Spiegelung an jedem beliebigen Zeitpunkt.

Durch die Bedingung $\langle UR \rangle$ entsteht (ausgehend vom Zeitpunkt 0) je ein Zeitpfeil in jedem der beiden Zeitintervalle $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$. Beschränkt man sich

auf das Zeitintervall $[0, \infty)$, so hat die Zeit eine eindeutige Richtung. Damit erklärt die Initialbedingung, warum die Zeit (soweit wir sie erleben) eine ausgezeichnete Richtung aufweist.

Wir wenden uns nun der Frage zu, welchen Status die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ neben den anderen Aussagen der Theorie hat. Die Theorie bestand bisher aus drei wesentlichen Elementen:

- Durch die Definition von \mathcal{U} wurde festgelegt, wie die Eigenschaften des Universums in der Theorie modelliert werden.
- Durch das Axiomensystem AX wurden die deterministischen Gesetze der Theorie angegeben.
- Durch die Festlegung des äußeren Maßes μ (im Falle der klassischen Mechanik ist μ das Lebesguemaß auf dem Phasenraum) wurden die probabilistischen Aussagen der Theorie angegeben. Insbesondere legt μ die bedingten Möglichkeitsmaße fest (im klassischen Fall sind dies Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitsmaße).

Als weiteres Element der Theorie tritt nun die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ hinzu. Allerdings wird die Eigenschaft UR von der Theorie nicht konkret angegeben. Ebenso wenig legt die Theorie den Zeitpunkt t_0 explizit fest. Daher kann die Initialbedingung nicht als ein zusätzliches Axiom aufgefasst werden. Wie die Eigenschaft UR im einzelnen aussieht, ist eine empirische Frage. Dabei kann das Ereignis $\langle UR \rangle$ nicht unmittelbar beobachtet werden; aufgrund vorhandener empirischer Kenntnisse kann allenfalls indirekt auf UR geschlossen werden. Hierauf werden wir im folgenden noch eingehen.

Grundsätzlich handelt es sich bei der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ demnach um ein kontingentes Faktum innerhalb der gegebenen Theorie. Jedoch stellt die Aussage, *dass* es eine solche Initialbedingung gibt und dass sie die einfache Form eines Ereignisses $\langle UR, t_0 \rangle$ hat, ein zusätzliches Element und somit eine Erweiterung der Theorie dar. Mit dieser Aussage trägt die Theorie der Tatsache Rechnung, dass das Weltgeschehen insgesamt den Charakter eines zeitgerichteten Prozesses fortschreitender Entropiezunahme hat.

Im Falle der Quantenmechanik liegt hier eine gewisse Analogie vor zu der Vorgehensweise im Rahmen der Kopenhagener Deutung. Wir schreiben dem Universum zur Zeit 0 die Eigenschaft $UR \in \mathcal{U}$ zu. Analog dazu könnte dem Universum im Sinne des Kopenhagener Quantenformalismus zur Zeit 0 ein "Zustand" φ zugeschrieben werden. In beiden Fällen erlaubt die Theorie eine solche Zuschreibung, ohne im einzelnen anzugeben, wie UR bzw. φ konkret aussieht. Dabei entspricht UR im allgemeinen nur einem sogenannten "statistischen Operator"

$$W_{UR} := \pi_{UR} / \dim UR$$

und keinem "Zustandsvektor" φ . Es ist allerdings fraglich, ob im Rahmen des Quantenformalismus dem Universum als ganzem überhaupt ein Zustand zugeschrieben werden soll.

Anders als bei diesem Formalismus wird in unserem Ansatz die Zuschreibung der Initialeigenschaft UR inhaltlich begründet, und zwar mit der Tatsache, dass der Weltablauf eine zeitliche Richtung aufweist. Diese Begründung greift unabhängig davon, ob es um die Quantentheorie oder um die klassische Mechanik geht.

Wir werden später zeigen, dass die Annahme der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ ausreicht, um jedem Subsystem zu jedem Zeitpunkt und zu jeder Bedingung einen (bedingten) "Zustand" zuzuordnen. Damit wird auch klar werden, unter welchen Umständen ein bestimmter "Zustand" eines Subsystems "präpariert" werden kann. Dies lässt sich für die klassische Mechanik ebenso durchführen wie für die Quantentheorie.

Wie wir ausgeführt haben, muss die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ angenommen werden, ohne dass UR von der Theorie konkret angegeben werden kann. Es stellt sich daher die Frage, was wir über UR im einzelnen wissen können. Grundsätzlich ist es nicht möglich, das Ereignis $\langle UR \rangle$ zu beobachten oder anhand von Dokumenten auf $\langle UR \rangle$ zu schließen. Wir haben in diesem Sinne keine unmittelbare Kenntnis von UR. Dennoch können wir gewisse Aussagen über UR machen.

Zum einen muss das Ereignis $\langle UR \rangle$ beschreiben, dass das Universum zur Zeit 0 eine geringere Entropie aufgewiesen hat, als dies heute der Fall ist oder dem thermodynamischen Gleichgewicht entspräche.

Zum andern können wir für gewisse $UR_1 \in \mathcal{U}$ ausschließen, dass $UR = UR_1$ ist. Man betrachte hierzu zwei mögliche Initialeigenschaften UR_1 und UR_2 von vergleichbarem Umfang, d.h. mit $\mu(\langle UR_1 \rangle) \approx \mu(\langle UR_2 \rangle)$. Sowohl UR_1 als auch UR_2 soll eine geringe Entropie des Universums beschreiben. Unser empirisches Wissen werde durch das empirische Material

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n)\} \\ &\subset \mathcal{E} \end{aligned}$$

dargestellt, und es gelte:

$$\mu(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle \mid \langle UR_1 \rangle) \ll \mu(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle \mid \langle UR_2 \rangle)$$

Dabei besagt $a \ll b$, dass a sehr viel kleiner ist als b . In diesem Fall kommt UR_2 viel eher als Initialeigenschaft in Frage als UR_1 . Wir können an dieser Stelle einen statistischen Schluss durchführen: Wäre $UR = UR_1$, so wären die uns bekannten empirischen Fakten sehr unwahrscheinlich. Damit ist die Hypothese $UR = UR_1$ im statistischen Sinne als widerlegt zu betrachten.

Es ist also nicht jede beliebige Annahme über die Initialeigenschaft UR mit unseren empirischen Erfahrungen verträglich, und so können wir indirekt etwas über UR aussagen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, welchen Zusammenhang es gibt zwischen der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ und dem Entstehen von Dokumenten. In einem Universum, das sich zu jedem Zeitpunkt im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, hinterlassen Ereignisse keine Spuren. Es gibt in einem solchen Universum keine Dokumente und somit auch keine Erinnerungen oder Wahrnehmungen durch Subjekte, die ihrerseits Teil des Universums sind.

Die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ erklärt nun, weshalb Ereignisse in der Welt Spuren bzw. Dokumente hinterlassen können und warum Wahrnehmungen und Erinnerungen möglich sind bei Subjekten, die selbst Teil des Universums sind.

Als Beispiel hierzu können wir nochmals den oben beschriebenen "Stern" betrachten, von dem eine "Strahlung" ausgeht. Wir nehmen aber nun an, dass sich in dem betrachteten Universum noch eine zweite Materieanhäufung befindet, die eine so geringe Gesamtenergie aufweist, dass sie nur eine sehr schwache Strahlung emittiert. Diese Materieansammlung wollen wir als "Planeten" bezeichnen. Die insgesamt entstehende Strahlung geht in diesem Fall fast ausschließlich von dem Stern aus. Infolgedessen bildet sich hinter dem Planeten ein Schatten. Die Struktur dieses Schattens stellt ein Dokument für die Position und die Bewegung des Planeten dar. In diesem Sinn hinterlässt der Planet in der Strahlung des Sterns eine Spur.

Unter der Voraussetzung $\langle UR \rangle$ hat das Universum grundsätzlich einen dokumentenbildenden Charakter. Die Dokumente betreffen allerdings nur Ereignisse, die nach dem Zeitpunkt 0 stattfinden. Über Ereignisse, die vor diesem Zeitpunkt liegen, können Subjekte daher grundsätzlich keine empirischen, d.h. auf Dokumente gegründeten Kenntnisse haben.

Über Ereignisse, die nach dem Zeitpunkt 0 liegen, kann ein Subjekt nur dann etwas wissen, wenn ihm dafür Dokumente vorliegen. Zwischen einem solchen Ereignis und dem Dokument muss objektiv eine Dokumentbeziehung bestehen. Die Rolle der Initialbedingung besteht darin, solche Beziehungen zu ermöglichen. Ohne die Annahme dieser Bedingung wären weder Erinnerungen, noch Beobachtungen oder Messungen erklärbar. Wir müssten jede vermeintliche Wahrnehmung oder Erinnerung als rein zufällig entstanden und somit als eine bloße Täuschung betrachten.

Zusammenfassung

- Die bisher dargestellte Theorie ist in Bezug auf die Zeit reversibel und stationär. Sie beschreibt zunächst ein Universum im thermodynamischen Gleichgewicht, in dem die Zeit keine Richtung hat und Ereignisse keine Spuren hinterlassen.

- Im Gegensatz dazu erleben wir das Geschehen in der Welt als zeitlich gerichtet. Objektiv ist dies als Zunahme der Entropie zu beschreiben.
- t_0 bezeichnet einen Zeitpunkt, an dem das Universum eine minimale Entropie hatte (Anfangszeitpunkt). Hierzu muss eine Eigenschaft UR vorausgesetzt werden, die die anfänglich niedrige Entropie des Universums beschreibt. Dies gilt für die klassische Mechanik ebenso wie für die Quantentheorie.
- Die Eigenschaft UR wird, ebenso wie der Zeitpunkt t_0 , von der Theorie nicht konkret angegeben. $\langle UR, t_0 \rangle$ ist damit ein kontingentes Faktum innerhalb der gegebenen Theorie. Jedoch stellt die Aussage, *dass* es eine Initialbedingung der Form $\langle UR, t_0 \rangle$ gibt, eine Erweiterung der Theorie dar.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_0 = 0$ angenommen werden. Das Ereignis $\langle UR \rangle$ erzeugt einen Symmetriebruch bzgl. der Zeit. Es erklärt das bis heute vorhandene thermodynamische Ungleichgewicht ebenso wie die noch immer andauernde Zunahme der Entropie und den Zeitpfeil.
- Unter der Voraussetzung $\langle UR \rangle$ können Ereignisse Spuren (bzw. Dokumente) hinterlassen. Auch sind unter dieser Voraussetzung Erinnerungen und Wahrnehmungen von Subjekten möglich, die selbst Teil des Universums sind.
- Das Ereignis $\langle UR \rangle$ lässt sich nicht unmittelbar beobachten. Aufgrund empirischer Kenntnisse kann man aber (im Wege eines statistischen Schlusses) indirekt etwas über UR aussagen.
- Es gibt keinen Widerspruch zwischen dem Bestehen eines deterministischen Bewegungsgesetzes und der Tatsache der Entropiezunahme.
- Die Annahme der Bedingung $\langle UR \rangle$ erfolgt in einer gewissen Analogie dazu, wie dem Universum zum Zeitpunkt 0 im Rahmen des Kopenhagener Quantenformalismus ein Zustand ϕ zugeschrieben werden könnte.
- Im Gegensatz zu diesem Formalismus wird die Zuschreibung der Eigenschaft UR jedoch inhaltlich begründet, und zwar mit der Irreversibilität des Weltgeschehens. Diese Zuschreibung kann im klassischen Fall ebenso begründet werden wie in der Quantentheorie.

25. Endophysikalische Betrachtungen

Wir haben das Universum bis hierher auf der Basis der klassischen extensionalen Logik in einem objektiven, ontologisch realistischen Sinne beschrieben durch:

- die deterministischen Axiome SG, MON und SEC, welche sich mit $A, B < \mathcal{H}$, $t \in T$, $A_1, A_2, \dots < \mathcal{H}$ formulieren lassen als:

$$\underline{\text{SG}} \quad \langle A, 0 \rangle = \langle U_t A, t \rangle$$

$$\underline{\text{MON}} \quad A < B \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$$

$$\underline{\text{SEC}} \quad A_j \text{ vertauschbar} \Rightarrow [\bigcap_j A_j = 0 \Rightarrow (\forall_j \langle A_j \rangle) = \emptyset]$$

- das probabilistische Gesetz, dem zufolge die bedingten Möglichkeitsgrade gegeben sind durch

$$\mu(A|B) := \mu(A \wedge B) / \mu(B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(B) < \infty)$$

Hierbei ist μ das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , für welches mit beliebigen $D_1, \dots, D_n < \mathcal{H}$ und $A_1, \dots, A_n < \mathcal{H}$ gilt (s. T.25.1):

$$(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2$$

Die Halbmetrik δ auf \mathcal{U} ist dabei gegeben durch

$$\delta(A, B) := |\pi_A \pi_{B^\perp}| \quad (\text{für } A, B < \mathcal{H})$$

und die (euklidische) Norm $|| \cdot ||$ ist definiert durch

$$||L|| := (\text{tr } LL^*)^{1/2} \quad (\text{für stetige lineare Operatoren } L \text{ auf } \mathcal{H})$$

- die Initialbedingung $\langle \text{UR} \rangle$, durch die das thermodynamische Ungleichgewicht des Universums zum Anfangszeitpunkt 0 ausgedrückt wird, und die die Zunahme der Entropie, die Irreversibilität des Geschehens und den Zeitpfeil erklärt.

Wir wenden uns in den folgenden Kapiteln der Frage zu, wie ein durch diese Gesetze beschriebenes Universum einem "makroskopischen" Subjekt erscheinen muss. Unter einem "makroskopischen" Subjekt wollen wir ein Subjekt verstehen, das nur dazu in der Lage ist, makroskopische Ereignisse wahrzunehmen.

Im Gegensatz zu der bisherigen exophysikalischen Darstellung stellen wir also nun endophysikalische Betrachtungen an. Eine exophysikalische Theorie beschreibt das Universum durch die Angabe objektiver, möglichst einfacher Gesetze so, wie es tatsächlich ist. Im Gegensatz dazu befasst sich eine endophysikalische Theorie mit der Frage, wie dieses Universum einem Subjekt erscheint, das die Welt, in der es lebt, von einem beschränkten Standpunkt aus

betrachtet. Dazu wird die objektive (exophysikalische) Theorie nicht verändert oder durch neue Axiome oder Annahmen erweitert. Sie wird lediglich auf bestimmte spezielle Situationen angewendet, und hierzu werden gewisse Gesetze aus den vorhandenen Axiomen abgeleitet. Durch den endophysikalischen Blickwinkel wird begründet, warum bestimmte Aussagen, die sich aus der exophysikalischen Theorie ableiten lassen, von Interesse sind.

Beispielsweise kann das Planetensystem exophysikalisch beschrieben werden als ein System von Himmelskörpern, die auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen. Für Subjekte, die dieses Planetensystem stets nur von der Oberfläche der Erde aus betrachten, ergeben sich hieraus (endophysikalisch) bestimmte scheinbare Bewegungen der Planeten am Firmament.

Ein weiteres Beispiel: Das Universum ist exophysikalisch durch die allgemeine Relativitätstheorie zu beschreiben, der zufolge der Raum mehr oder weniger gekrümmt ist. Für Subjekte, die sich stets nur an Orten mit einem schwachen Gravitationsfeld aufhalten, scheint der Raum hingegen durch die euklidische Geometrie korrekt beschrieben zu sein.

In ähnlicher Weise fragen wir uns hier, wie das Universum einem Subjekt erscheint, wenn dessen Wahrnehmung beschränkt ist auf makroskopische Ereignisse. Diese Überlegungen dienen u.a. dazu, folgende Fragen zu klären:

- Warum kann ein makroskopisches Subjekt die Gültigkeit des physikalischen "tertium non datur" im alltäglichen Leben annehmen, ohne dabei auf Widersprüche zu stoßen?
- Warum kann ein solches Subjekt annehmen, möglichen Fakten seien (in additiver Weise) Wahrscheinlichkeiten zugeordnet, ohne dass sich im Rahmen der alltäglichen Erfahrung (etwa beim Würfelspiel) Widersprüche ergeben?
- Welche Form haben die experimentelle Bedingung EB_e und die Ergebnisalgebra A_e "makroskopischer" Experimente, d.h. solcher Experimente, die von einem makroskopischen Subjekt durchgeführt und ausgewertet werden können? Wie ergibt sich hierzu ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_e , das der empirischen Erfahrung entspricht?
- Warum kann ein makroskopisches Subjekt den Zustandskalkül der Quantentheorie erfolgreich anwenden?

Die Beantwortung dieser Fragen wird auch deutlich machen, aus welchen Gründen es entgegen den tatsächlichen Gegebenheiten plausibel erscheint

- das physikalische "tertium non datur" als ein allgemeines Gesetz anzunehmen, wie es in der klassischen Mechanik geschieht, und
- die Existenz eines (additiven) Wahrscheinlichkeitsmaßes anzunehmen, das auf der ganzen Algebra A der möglichen Fakten definiert ist und die bei

der Wiederholung von Experimenten auftretenden relativen Häufigkeiten beschreibt. Diese Annahme liegt z.B. der Anwendung der Bell'schen Ungleichung auf Spin-Korrelationen implizit zugrunde.

Diese Überlegungen führen nicht zu einer Modifikation oder Erweiterung der eigentlichen physikalischen Theorie. Subjektbezogene Begriffe wie "Beobachtung" oder "Messung" können hierbei zwar auftreten. In den grundlegenden Aussagen der Theorie kommen sie aber (anders als in dem bekannten Quantenformalismus) nicht vor. Die eigentliche physikalische Theorie ist vielmehr mit den oben genannten Gesetzen abgeschlossen.

26. Wahrnehmung durch "makroskopische" Subjekte

Uns interessiert hier die Frage, wie das durch die objektiven Gesetze der Quantentheorie beschriebene Universum einem Subjekt erscheint, wenn dessen Wahrnehmung auf makroskopische Fakten beschränkt ist. Unter einem "makroskopischen" Subjekt verstehen wir ein Subjekt, das nur dazu in der Lage ist, makroskopische Ereignisse wahrzunehmen.

Die entscheidende Beschränkung, die für die Wahrnehmung makroskopischer Subjekte (und damit insbesondere für menschliche Beobachter) gilt, liegt darin: Wenn ein solches Subjekt zum Zeitpunkt $t \in T$ die Ereignisse (A,t) und (B,t) zugleich wahrnimmt, so müssen A und B (als Unterräume von \mathcal{H}) miteinander vertauschbar sein.

Dies ist nicht etwa ein abstraktes Prinzip der Theorie. Die genannte Tatsache beruht vielmehr darauf, dass das Subjekt (wenigstens im Rahmen der Mechanik) im wesentlichen stets nur räumliche Konstellationen der Materie unmittelbar beobachten kann. Da die Ortsoperatoren sämtlicher Quanten miteinander vertauschbar sind, werden derartige räumliche Konstellationen durch Unterräume von \mathcal{H} modelliert, die alle miteinander vertauschbar sind.

Die aus der Quantentheorie bekannte Tatsache, dass sich stets nur vertauschbare Observable gleichzeitig "messen" lassen, ist letztlich eine Konsequenz aus dieser Beschränkung makroskopischer Subjekte. Sie ist keine abstrakte Forderung der Theorie und hat auch nichts damit zu tun, dass jede Messung möglicherweise eine Änderung der Eigenschaften des beobachteten Quantensystems bewirkt. Sie folgt vielmehr daraus, dass ein menschlicher Beobachter stets nur makroskopische und (im Rahmen der Mechanik) im wesentlichen räumliche Eigenschaften wahrnehmen kann.

Diese Überlegung führt zu der Annahme, dass es eine Teilmenge S von \mathcal{U} gibt, für die gilt:

- Je zwei Elemente $A, B \in S$ sind miteinander vertauschbar.
- Jedes durch ein makroskopisches Subjekt wahrnehmbare Ereignis kann modelliert werden als (A,t) mit einem $A \in S$ und $t \in T$.

Von dieser Annahme gehen wir im folgenden aus. Menschliche Beobachter können demnach ein Ereignis (A,t) nur dann unmittelbar wahrnehmen, wenn die beobachtete Eigenschaft A zu S gehört. Dabei ist S eine Menge paarweise vertauschbarer Unterräume von \mathcal{H} .

Für die folgenden Überlegungen identifizieren wir S mit der Menge der "makroskopischen Eigenschaften". Mit

$$\mathcal{E}_m := S \times T$$

definieren wir dazu die Menge der "makroskopischen Ereignisse". Letztere können auch kurz als "Makroereignisse" bezeichnet werden.

Anmerkung 1

Genau genommen handelt es sich bei den Eigenschaften, die ein Subjekt zu einem Zeitpunkt t beobachten kann, nicht um reine Ortseigenschaften. Wenn wir einen auf einem Tisch ruhenden Aschenbecher sehen, so stellen wir damit zugleich den Ort x und die Geschwindigkeit v (in diesem Fall $v \approx 0$) fest. Dennoch kann die Modellierung derartiger Eigenschaften im Rahmen eines Systems aus paarweise vertauschbaren Unterräumen von \mathcal{H} erfolgen. Dies ist möglich, weil es sich bei der Beobachtung nur um eine ungefähre Feststellung des Ortes (darzustellen als Δx) und des Impulses (darzustellen als Δp) handelt.

Um dies zu sehen, betrachten wir einen kleinen räumlichen Abstand $dx \in \mathbb{R}$. Hierzu bilden wir zu $i, j, k \in \mathbb{Z}$ die Intervalle

$$I_{i,j,k} := [i \cdot dx, (i+1) \cdot dx] \times [j \cdot dx, (j+1) \cdot dx] \times [k \cdot dx, (k+1) \cdot dx]$$

im Raum \mathbb{R}^3 . Jedem dieser Intervalle entspricht in Bezug auf die Ortsoperatoren $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ eines Quants Q ein Unterraum $A_{Q;i,j,k}$ des Hilbertraums \mathcal{H}_Q . Dieser Unterraum enthält eine Orthonormalbasis aus Vektoren, von denen jeder näherungsweise (mit einer Genauigkeit in der Größenordnung von \hbar/dx) einen bestimmten Impuls $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ beschreibt. (Falls Spin-Freiheitsgrade vorhanden sind, stellen mehrere Basisvektoren denselben Impuls dar.) Alle diese Vektoren zusammen bilden eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_Q . Da \mathcal{H} das Tensorprodukt der \mathcal{H}_Q ist, erhalten wir durch Bildung der Tensorprodukte aus diesen Basisvektoren eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von \mathcal{H} .

Es sei

$$\mathcal{U}_{dx} := \{ [\varphi_1, \varphi_2, \dots] \mid \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathcal{B} \}$$

die Menge derjenigen Unterräume von \mathcal{H} , die jeweils von einer Teilmenge der Basisvektoren aus \mathcal{B} erzeugt werden. Jede Eigenschaft des Universums, welche einer makroskopischen Aussage über Orts- und Impulsverhältnisse entspricht, kann nun durch ein Element von \mathcal{U}_{dx} modelliert werden. Außerdem sind alle Elemente von \mathcal{U}_{dx} miteinander vertauschbar.

Ausgehend von einem kleinen räumlichen Abstand $dx \in \mathbb{R}$ können wir somit (in einem als rein mechanisch angenommenen Universum) S als eine Teilmenge von \mathcal{U}_{dx} festlegen. Damit können wir von der Existenz einer Menge S paarweise vertauschbarer Unterräume von \mathcal{H} ausgehen, für die gilt: Alle von einem menschlichen Beobachter unmittelbar wahrnehmbaren Ereignisse haben die Form (A, t) mit $A \in S$ und $t \in T$.

Diese Aussage gilt zunächst nur unter der Voraussetzung, dass unmittelbar wahrnehmbare Ereignisse sich stets auf makroskopische Orts- und Impulsverhältnisse beziehen. Eine entsprechende Überlegung ist aber auch dann möglich, wenn wir weitere makroskopische Eigenschaften einbeziehen, die unmittelbar wahrnehmbar sind, zum Beispiel thermodynamische Größen wie Druck oder Temperatur. Wichtig ist dabei nur die Modellierbarkeit aller in diesem Sinne makroskopischen Eigenschaften durch vertauschbare Unterräume des Hilbert-raumes. Das Beispiel der Orts- und Impulseigenschaften zeigt, dass solche makroskopischen Eigenschaften auch dann vertauschbar modelliert werden können, wenn die zugrundeliegenden Operatoren (wie hier z.B. X und P) auf der mikroskopischen Ebene nicht vertauschbar sind.

Anmerkung 2

Das hier durch die Menge S eingeführte Konzept des Makroskopischen schließt die unmittelbare Wahrnehmung aller möglichen Subjekte ein. Die Menge S entspricht insofern einem objektiven Konzept, als es nicht an ein bestimmtes Subjekt gebunden ist. Der Begriff des makroskopischen Subjekts kann dabei weit gefasst werden; so kann z.B. auch eine Katze oder ein Roboter als ein makroskopisches Subjekt angesehen werden.

Der Begriff der unmittelbaren Wahrnehmung kann ebenfalls weit gefasst werden. An den bisherigen Überlegungen ändert sich zum Beispiel nichts, wenn wir auch solche Eigenschaften als "unmittelbar wahrnehmbar" ansehen, die mit einfachen (klassisch-makroskopisch beschreibbaren) Hilfsmitteln wie einer Brille, einer Lupe, einem einfachen Lichtmikroskop oder einem Fernglas beobachtet werden können.

Anmerkung 3

Es kommt hier nicht darauf an, dass die betrachteten Eigenschaften $A, B \in \mathcal{H}$ präzise miteinander vertauschbar sind. Die diesbezüglichen Aussagen lassen sich verallgemeinern auf den Fall, dass nur eine annähernde Vertauschbarkeit besteht. Hierzu ist es erforderlich, das äußere Maß μ so festzulegen, dass es für empirische Materialien der Stetigkeitsbedingung

$$\forall_j (A_j \approx B_j) \Rightarrow \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \approx \mu(\forall_j \langle B_j \rangle)$$

genügt. Eine derartige Stetigkeit muss allerdings von jeder sinnvollen physikalischen Theorie verlangt werden. Sie ist insbesondere gegeben bei dem von uns für die Quantentheorie definierten äußeren Maß μ .

Anmerkung 4

Für die in Anmerkung 1 diskutierte Menge S makroskopischer Eigenschaften gilt: Da jedem $\varphi \in \mathcal{B}$ annähernd ein Ausdruck der Form

$$\Delta x \wedge \Delta p$$

entspricht (mit $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$), entspricht jedem Element $S \in \mathcal{S}$ in kanonischer Weise (annähernd) eine Teilmenge \underline{S} des klassischen Phasenraums Z . Dabei ist \underline{S} ein Element von \mathcal{U}_Z , der Borelalgebra auf Z . Jede von einem menschlichen Beobachter wahrnehmbare Eigenschaft (in einem rein mechanischen Universum) kann somit zugleich als ein $S \in \mathcal{S}$ und als das zugehörige $\underline{S} \in \mathcal{U}_Z$ modelliert werden.

Anmerkung 5

Die in diesem Zusammenhang auftretende besondere Rolle der Ortsoperatoren beruht darauf, dass diese Operatoren auch beim Aufbau des Hamiltonoperators H eine bestimmte Rolle spielen. Diese Rolle besteht darin, dass die Stärke der Wechselwirkung zwischen zwei Systemen wesentlich durch ihren räumlichen Abstand bestimmt wird.

27. Dokumente für vergangene Ereignisse

Wir haben festgestellt, dass sich die Wahrnehmung makroskopischer Subjekte auf Makroereignisse der Form (A,t) mit $A \in S$ und $t \in T$ beschränkt. Dabei handelt es sich um jene Ereignisse, die das Subjekt zum Zeitpunkt t unmittelbar wahrnehmen kann. Zum empirischen Wissen eines Subjekts zur Zeit t können darüber hinaus aber auch Ereignisse $(A,s) \in \mathcal{E}$ gehören, die in der Vergangenheit liegen, für die also gilt: $s < t$.

Von einem solchen vergangenen Ereignis (A,s) kann das Subjekt zum Zeitpunkt t nur dann empirische Kenntnis haben, wenn ein Dokument für (A,s) existiert. Ein solches Dokument muss für das Subjekt zur Zeit t wahrnehmbar, also ein Makroereignis der Form (D,t) mit $D \in S$ sein. Auch wenn sich das Subjekt unmittelbar an das Ereignis (A,s) erinnert, liegt ein derartiges Dokument vor. Da das Subjekt selbst Teil des Universums ist, entspricht jede Erinnerung einem physischen Engramm und somit einem Dokument für das vergangene Ereignis.

Es stellt sich somit die Frage, wann zwischen zwei Ereignissen eine Dokumentbeziehung besteht. Eine solche Beziehung besteht zwischen $(A',s) \in \mathcal{E}$ und $(D',t) \in \mathcal{E}_m$ im einfachsten Fall dann, wenn die beiden Ereignisse aufgrund der Bewegungsgleichung äquivalent sind, wenn also mit

$$A := U_{-s}A'$$

und

$$D := U_{-t}D'$$

die Gleichung

$$(*) \quad A = D$$

gilt. Wir können in diesem Fall von einer unbedingten Dokumentbeziehung sprechen: Das Ereignis $(A',s) \in \mathcal{E}$ ist durch $(D',t) \in \mathcal{E}_m$ "unbedingt dokumentiert", wenn $(*)$ gilt.

Allerdings ist diese Vorstellung von Dokumentbeziehungen im allgemeinen nicht ausreichend. Betrachten wir z.B. den Fall, dass ein Stern von einem Planeten umkreist wird. Der Stern erzeugt einen regelmäßigen Fluss von "Teilchen", die in das Weltall hinausströmen. Hinter dem Planeten bildet sich jeweils ein "Schatten", d.h. eine Zone mit geringerer Teilchendichte. Dieser Schatten dokumentiert den Ort, an dem sich der Planet aufgehalten hat. Wegen der endlichen Geschwindigkeit, mit der die "Teilchen" sich bewegen, geschieht dies zeitlich versetzt. Somit wird hier ein Ereignis zu einem späteren Zeitpunkt dokumentiert.

Wenn wir mit (A',s) das Ereignis beschreiben, dass sich der Planet an einem bestimmten Ort aufgehalten hat, und mit (D',t) das Ereignis, dass zu dem späteren Zeitpunkt t an der entsprechenden weiter von dem Stern entfernt liegenden Stelle im Raum eine geringe Teilchendichte vorlag, so besteht zwischen (A',s) und (D',t) eine Dokumentbeziehung. Diese Beziehung ist aber nur dann gegeben, wenn der Stern als Teilchenquelle zu einem früheren Zeitpunkt $r < s$ vorhanden war. Die Dokumentbeziehung besteht also nur *bedingt*. Die voraussetzende Bedingung ist im einfachsten Fall ebenfalls ein Ereignis (B',r) mit $B' < \mathcal{H}$.

In den meisten Fällen beruht die Beziehung zwischen einem Dokument und dem dokumentierten Ereignis nicht allein auf dem Bewegungsgesetz, sondern zusätzlich auf dem Vorliegen einer bestimmten Bedingung. Beispielsweise beruht die Beziehung zwischen einem Foto (als Dokument) und einem darauf abgebildeten Vogel (als dem dokumentierten Faktum) auf der Tatsache, dass zuvor eine aufnahmebereite Kamera vorhanden gewesen ist und im übrigen keine störenden Einflüsse aufgetreten sind. Ohne diese Voraussetzung wäre das Foto als Dokument des abgebildeten Faktums nicht entstanden.

Mit der zusätzlichen Definition

$$B := U_{-r}B'$$

ist das Bestehen einer auf der Bedingung (B',r) beruhenden Dokumentbeziehung zwischen (A',s) und (D',t) quantentheoretisch zu beschreiben durch die Beziehungen

$$(1) \quad \pi_{D^\perp} \pi_A \pi_B = 0$$

und

$$(2) \quad \pi_D \pi_{A^\perp} \pi_B = 0$$

Dabei drückt (1) aus, dass bei gegebenen Ereignissen (B',r) und (A',s) das Ereignis $((D')^\perp, t)$ nicht eintreten kann. Entsprechend besagt (2), dass bei gegebenen Ereignissen (B',r) und $((A')^\perp, s)$ das Ereignis (D', t) nicht eintreten kann.

Man kann zeigen, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) äquivalent sind zu der einfachen Gleichung

$$(3) \quad \pi_D \pi_B = \pi_A \pi_B$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so sagen wir, dass das Ereignis $(A',s) \in \mathcal{E}$ durch $(D',t) \in \mathcal{E}_m$ unter der Bedingung (B',r) dokumentiert ist.

Um die beiden Gleichungen (1) und (2) zu begründen, betrachten wir den Fall, dass sich die Dokumentbeziehung auch klassisch beschreiben lässt. Dies gilt zum Beispiel in dem oben diskutierten Fall eines Planeten, der in der Strahlung des Sterns einen Schatten erzeugt. Eine makroskopische Eigenschaft

lässt sich sowohl quantentheoretisch durch einen Unterraum $S < \mathcal{H}$ als auch klassisch durch eine entsprechende Teilmenge $\underline{S} \subset Z$ darstellen. Die komplementäre Eigenschaft $S^\perp < \mathcal{H}$ entspricht dann dem Mengenkomplement $Z \setminus \underline{S}$, und im Falle einer klassisch beschreibbaren Bewegung in einem Zeitintervall $[0, \tau]$ (d.h.: wenn "Quanteneffekte" keine Rolle spielen) entsprechen sich auch $U_\tau S$ und $\beta_\tau(\underline{S})$.

Im Sinne der klassischen Modellierung seien \underline{A} , \underline{D} und \underline{B} die Teilmengen von Z , welche den quantentheoretisch durch A , D und $B < \mathcal{H}$ modellierten Eigenschaften entsprechen. Unter der Bedingung $\langle \underline{B}, r \rangle$ besteht zwischen $\langle \underline{A}, s \rangle$ und $\langle \underline{D}, t \rangle$ eine Dokumentbeziehung, wenn aus $\langle \underline{B}, r \rangle$ die Äquivalenz von $\langle \underline{A}, s \rangle$ und $\langle \underline{D}, t \rangle$ folgt. Das ist dann der Fall, wenn die beiden Inklusionen

$$(a1) \quad \langle \underline{B}, r \rangle \wedge \langle \underline{A}, s \rangle \subset \langle \underline{D}, t \rangle$$

$$(a2) \quad \langle \underline{B}, r \rangle \wedge \langle \underline{D}, t \rangle \subset \langle \underline{A}, s \rangle$$

gelten. Mit den Definitionen

$$\underline{A} := \beta_{-s}(A)$$

$$\underline{D} := \beta_{-t}(D)$$

$$\underline{B} := \beta_{-r}(B)$$

ist dies äquivalent zu

$$(b1) \quad \langle \underline{B} \rangle \wedge \langle \underline{A} \rangle \subset \langle \underline{D} \rangle$$

$$(b2) \quad \langle \underline{B} \rangle \wedge \langle \underline{D} \rangle \subset \langle \underline{A} \rangle$$

Definiert man zu jeder Teilmenge $C \subset Z$ die Indikatorfunktion

$$\mathbf{1}_C : Z \rightarrow \{0,1\}$$

durch

$$\mathbf{1}_C(z) = 1 \quad :\Leftrightarrow \quad z \in C \quad (\text{für alle } z \in Z)$$

so lassen sich (b1) und (b2) äquivalent umformen in:

$$(c1) \quad \mathbf{1}_{Z \setminus \underline{D}} \mathbf{1}_{\underline{A}} \mathbf{1}_{\underline{B}} = 0$$

$$(c2) \quad \mathbf{1}_{\underline{D}} \mathbf{1}_{Z \setminus \underline{A}} \mathbf{1}_{\underline{B}} = 0$$

Die beiden Beziehungen (c1) und (c2) lassen sich zusammenfassen zu der Gleichung:

$$(c) \quad \mathbf{1}_{\underline{A}} \mathbf{1}_{\underline{B}} = \mathbf{1}_{\underline{D}} \mathbf{1}_{\underline{B}}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir hier (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass $r = 0$ ist. Sofern Quanteneffekte in dem betroffenen Zeitintervall $[0, t]$ für die betrachtete Dokumentbeziehung keine Rolle spielen, entsprechen

sich dann auch A und \underline{A} , D und \underline{D} sowie B und \underline{B} . Durch Übertragung der Gleichungen (c1) und (c2) in die quantentheoretische Modellierung erhalten wir daher unmittelbar die Aussagen

$$(1) \quad \pi_{D^\perp} \pi_A \pi_B = 0$$

$$(2) \quad \pi_D \pi_{A^\perp} \pi_B = 0$$

Eine weitere Begründung der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt sich aus dem bekannten Quantenformalismus. Wenn wir dabei die Begriffe "Zustand" und "Messung" verwenden, so bedeutet dies nicht, dass wir diese Konzepte nun doch als grundlegende Begriffe unserer Theorie akzeptieren. Die nachstehende Überlegung soll lediglich plausibel machen, warum wir das Konzept der "Dokumentbeziehung" so modellieren, wie wir es hier tun.

Wir gehen von einem beliebigen Zustand φ des Universums zur Zeit r aus und nehmen an, es werde zunächst (zum Zeitpunkt r) die Observable $\pi_{B'}$ gemessen. Sodann werden die Observablen $\pi_{A'}$ zum Zeitpunkt s und $\pi_{D'}$ zum Zeitpunkt t gemessen. Nehmen wir an, bei der ersten Messung komme B' (und nicht $(B')^\perp$) heraus. Der resultierende Zustand $\varphi' \in \mathcal{H}$ ist

$$\varphi' := \pi_{B'} \varphi / |\pi_{B'} \varphi|$$

Nach Ablauf eines Zeitintervalls der Länge $s-r$ erhalten wir den Zustand

$$U_{s-r} \varphi'$$

Nun werde die Observable $\pi_{A'}$ gemessen mit dem Ergebnis A' . Der resultierende Zustand ist:

$$\varphi'' := \pi_{A'} U_{s-r} \varphi' / |\pi_{A'} U_{s-r} \varphi'|$$

Nach Ablauf eines Zeitintervalls der Länge $t-s$ erhalten wir den Zustand

$$U_{t-s} \varphi''$$

Nun werde die Observable $\pi_{D'}$ gemessen. Wenn (D',t) Dokument für (A',s) unter der Bedingung (B',r) sein soll, so kann bei dieser Messung nicht $(D')^\perp$ herauskommen. Demnach ist

$$\pi_{(D')^\perp} U_{t-s} \varphi'' = 0$$

Zusammenfassend ergibt dies:

$$\pi_{(D')^\perp} U_{t-s} \pi_{A'} U_{s-r} \pi_{B'} \varphi = 0$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\pi_{D^\perp} \pi_A \pi_B \varphi = 0$$

Falls diese Beziehung für beliebige $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt, so folgt die Gleichung (1). Analog lässt sich die Gleichung (2) ableiten.

Wir haben somit gezeigt: Sowohl über eine Analogie zur klassischen Theorie als auch mittels des bekannten Quantenformalismus kann plausibel gemacht werden, dass das Bestehen einer (bedingten) Dokumentbeziehung sinnvollerweise mit den Gleichungen (1) und (2) zu beschreiben ist.

Das Vorhandensein eines Dokuments stellt ein objektives physikalisches Faktum dar. Dies gilt für den "Schatten", den ein Stern von einem ihn umkreisenden Planeten erzeugt, es gilt für einen Film, auf dem die Bewegung eines Vogels (oder auch der Ablauf eines Quantenexperiments) aufgezeichnet ist, aber ebenso gilt es für die Erinnerungen eines Subjekts, welches selbst Teil des Universums ist.

Es ist möglich, dass die Dokumentbeziehung zwischen (A',s) und (D',t) nicht nur von einer Bedingung (B',r) , sondern von mehreren Ereignissen $(B'_1, r_1), \dots, (B'_m, r_m) \in \mathcal{E}$ (mit $r_1 \leq \dots \leq r_m$) abhängig ist. Mit

$$B_j := U_{-r_j} B'_j$$

ist dann die Gleichung (3) zu ersetzen durch:

$$(3') \quad \pi_D \pi_{B_m} \dots \pi_{B_1} = \pi_A \pi_{B_m} \dots \pi_{B_1}$$

Dies lässt sich ebenfalls sowohl mit dem klassischen Analogon als auch mit dem Quantenformalismus begründen.

Das Bestehen der Gleichung (3) bzw. (3') stellt eine Idealisierung dar. Im allgemeinen wird diese Gleichung immer nur annähernd gelten. Wenn wir es allerdings mit wirklich makroskopischen Ereignissen zu tun haben, so können wir der exakten Gleichheit sehr nahe kommen.

Wir stellen uns nun die Frage, wann ein Subjekt – bei bestehender Dokumentbeziehung – von einem ihm bekannten Dokument (D',t) auf das dokumentierte Ereignis (A',s) schließen kann. Ein solcher Schluss ist nur möglich, wenn das Subjekt auch von den Bedingungen, unter denen die Dokumentbeziehung besteht, empirische Kenntnis hat. Von einer derartigen Bedingung (B',r) kann ein Subjekt wiederum nur Kenntnis haben aufgrund eines weiteren Dokuments (E',t) zur Zeit t . In diesem Fall muss E' makroskopisch, also ein Element von S sein. Die Dokumentbeziehung zwischen (B',r) und (E',t) besteht dann wieder nur unter (mindestens) einer weiteren Bedingung (C',q) mit $q < r$.

Dieser Gedankengang lässt sich fortsetzen. Um nicht zu einem unendlichen Regress zu gelangen, müssen wir letztlich von einer Bedingung ausgehen, für die es zur Zeit t kein Dokument gibt. Hierfür kommt nur die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ in Frage.

Anmerkung 1

Es geht hier nicht darum, was Subjekte tatsächlich wissen, sondern darum, von welchen Ereignissen sie überhaupt (empirische) Kenntnis haben können, weil diese Ereignisse objektiv von einem Zeitpunkt t aus (über entsprechende Dokumente) empirisch zugänglich sind. Die Bildung von Dokumenten ist in der Regel mit einer Zunahme der Entropie verbunden. Das hierfür erforderliche thermodynamische Ungleichgewicht ist – im Sinne einer Einheit der kosmischen Entwicklung von der Sternentstehung bis hin zur Evolution der menschlichen Subjekte – letztlich auf die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ zurückzuführen. Es ist daher plausibel, dass $\langle UR \rangle$ an dieser Stelle auftritt als die einzige Bedingung, für die es zur Zeit t kein Dokument gibt. Indem die Bedingung $\langle UR \rangle$ das thermodynamische Ungleichgewicht im Universum beschreibt, begründet sie das objektive Bestehen von Dokumentbeziehungen.

Anmerkung 2

Die vorstehenden Überlegungen gelten in ähnlicher Weise auch für die klassische Mechanik. Auch in diesem Fall beruhen Dokumentbeziehungen nicht allein auf der deterministischen Bewegungsgleichung, und man muss typischerweise von der Gültigkeit (mindestens) einer zusätzlichen Bedingung ausgehen, um das Bestehen einer Dokumentbeziehung beschreiben zu können. Sollen zu diesen als Bedingung vorauszusetzenden Ereignissen wiederum Dokumente vorhanden sein, und will man einen unendlichen Regress vermeiden, so muss man auch im klassischen Fall von einer Bedingung ausgehen, zu der es zum betrachteten Zeitpunkt t kein Dokument gibt. Auch hier kommt dafür nur die Initialbedingung in Betracht.

Zusammenfassung

Die empirische Kenntnis eines in der Vergangenheit liegenden Ereignisses $(A',s) \in \mathcal{E}$ setzt die Existenz eines Dokuments $(D',t) \in \mathcal{E}_m$ zur Zeit t voraus.

Ein solches Dokument existiert im allgemeinen nur unter einer oder mehreren (zeitlich geordneten) Voraussetzungen

$$(B'_1, r_1), \dots, (B'_m, r_m) \in \mathcal{E}.$$

Die Dokumentbeziehung besteht formal dann, wenn mit den Abkürzungen

$$A := U_{-s}A'$$

$$D := U_{-t}D'$$

$$B_j := U_{-r_j}B'_j$$

die Gleichung

$$(3') \quad \pi_D \pi_{B_m} \dots \pi_{B_1} = \pi_A \pi_{B_m} \dots \pi_{B_1}$$

gilt.

Dass es sinnvoll ist, Dokumentbeziehungen auf diese Weise zu modellieren, kann sowohl über eine Analogie zur klassischen Theorie als auch mittels des bekannten Quantenformalismus plausibel gemacht werden.

Das Vorhandensein eines Dokuments für ein gegebenes Ereignis stellt ein objektives physikalisches Faktum dar. Beispiele sind: Der von einem Stern erzeugte Schatten eines Planeten, das durch eine Kamera aufgenommene Foto eines Vogels, aber ebenso die in einem Subjekt gespeicherte Erinnerung an ein Ereignis.

Dokumentbeziehungen bestehen in der Praxis normalerweise nicht exakt. Die Gleichung (3') gilt demnach nur annäherungsweise.

Auch für die für das Bestehen einer Dokumentbeziehung benötigten Voraussetzungen muss es Dokumente geben. Wenn wir einen unendlichen Regress vermeiden wollen, müssen wir von dem Bestehen einer Bedingung ausgehen, für die es kein Dokument gibt. Dafür kommt nur die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ in Frage.

Entsprechende Überlegungen gelten auch für die klassische Mechanik.

28. Die empirische Zugänglichkeit von Ereignissen

Wir haben gesehen, dass zu einem Zeitpunkt t Dokumente vergangener Ereignisse normalerweise nur dann existieren, wenn gewisse andere Ereignisse gegeben sind, deren Eintreten Voraussetzung für das Bestehen der erforderlichen Dokumentbeziehungen ist. Sollen für diese Ereignisse wiederum Dokumente vorhanden sein, so müssen noch weitere Ereignisse gegeben sein. Um nicht zu einem unendlichen Regress zu gelangen, müssen wir von der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ ausgehen, zu der es zur Zeit t kein Dokument gibt.

Wir diskutieren nun die Frage, unter welchen Umständen eine endliche Menge von Ereignissen von einem bestimmten Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich ist. Dazu betrachten wir eine Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n) \in \mathcal{E}$$

mit der Indexmenge

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Wenn diese Ereignisse zur Zeit t empirisch zugänglich sein sollen, so muss es zu jedem $k \in J$ ein Dokument (F_k, t) geben, und zwischen (E_k, t_k) und (F_k, t) muss eine (bedingte) Dokumentbeziehung bestehen. Die dabei auftretenden Bedingungen müssen (mit Ausnahme der Initialbedingung) ihrerseits empirisch zugänglich sein. Wir verstehen den Begriff der empirischen Zugänglichkeit einer Menge von Ereignissen so, dass die für das Bestehen der Dokumentbeziehungen notwendigen Bedingungen jeweils selbst auch wieder zu dieser Menge gehören.

Wir definieren:

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für } k \in J)$$

Wenn wir das Ereignis (E_k, t_k) mit dem hierzu gehörenden möglichen Faktum $\langle E_k, t_k \rangle$ identifizieren, so können wir wegen

$$\begin{aligned} \langle E_k, t_k \rangle &= \langle A_k, 0 \rangle \\ &= \langle A_k \rangle \end{aligned}$$

auch kurz von "dem Ereignis $\langle A_k \rangle$ " sprechen. Ebenso definieren wir

$$D_k := U_{-t} F_k \quad (\text{für } k \in J)$$

und sprechen von "dem Ereignis $\langle D_k \rangle$ " oder von "dem Dokument $\langle D_k \rangle$ ".

Die Dokumentbeziehung zwischen den Ereignissen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$ besteht also nur dann, wenn (neben der Initialbedingung $\langle UR \rangle$) gewisse andere $\langle A_j \rangle$ als

Bedingungen gegeben sind. In diesem Sinne definieren wir für alle $j, k \in J$:

$j \ll k \Leftrightarrow$ die Dokumentbeziehung zwischen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$
besteht nur, wenn $\langle A_j \rangle$ gegeben ist.

Man kann sagen: Wenn $j \ll k$ gilt, so ist $\langle A_k \rangle$ von $\langle A_j \rangle$ "abhängig". Damit ist gemeint, dass die Dokumentiertheit von $\langle A_k \rangle$ vom Eintreten von $\langle A_j \rangle$ abhängig ist. Wir bezeichnen die auf der Indexmenge J definierte Relation \ll daher auch als "Abhängigkeitsrelation".

Wenn die betrachteten Ereignisse empirisch zugänglich sein sollen, so darf die Abhängigkeitsrelation \ll nicht zyklisch sein, d.h. es darf keine Indizes $j_1, \dots, j_m \in J$ geben mit

$$j_1 \ll \dots \ll j_m \quad \text{und} \quad j_1 = j_m$$

Wir können daher die Ereignisse $\langle A_j \rangle$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit so anordnen, dass gilt:

$$j \ll k \Rightarrow j < k \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

Damit ist \ll eine Teilrelation von $<$, d.h. wenn man Relationen auf J als Teilmengen des kartesischen Produktes $J \times J$ auffasst, so ist \ll eine Teilmenge von $<$.

Bemerkung: In der Regel werden die Bedingungen, unter denen eine Dokumentbeziehung besteht, zeitlich vor dem dokumentierten Ereignis liegen. Außerdem sollten alle betrachteten Ereignisse vor dem Zeitpunkt t liegen, von dem aus sie empirisch zugänglich sind. Es sollte demnach gelten:

$$t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$$

Die folgenden Überlegungen sind allerdings unabhängig von dieser Voraussetzung.

Zu jedem $k \in J$ können wir mit

$$J_k := \{ j \in J \mid j \ll k \}$$

die Menge derjenigen Ereignisse $\langle A_j \rangle$ beschreiben, von denen $\langle A_k \rangle$ abhängig ist. Die Dokumentbeziehung zwischen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$ besteht somit immer dann, wenn (neben der Initialbedingung $\langle UR \rangle$) das mögliche Faktum

$$\forall_{j \in J_k} \langle A_j \rangle$$

eingetreten ist.

Die Dokumentbeziehungen zwischen den Ereignissen $\langle A_k \rangle$ und ihren Dokumenten $\langle D_k \rangle$ müssen voneinander unabhängig sein. Dies bedeutet: Für jedes k muss die Dokumentbeziehung zwischen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$ unabhängig davon

bestehen, ob eines jener $\langle A_j \rangle$, von denen $\langle A_k \rangle$ *nicht* abhängig ist, gegeben ist oder nicht. Für alle

$$j \in J \setminus J_k \setminus \{k\}$$

darf daher die Dokumentbeziehung zwischen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$ nicht davon abhängig sein, ob $\langle A_j \rangle$ eingetreten ist. Ebenso wenig darf sie davon abhängig sein, ob das Dokument $\langle D_j \rangle$ gegeben ist.

Formal lässt sich diese Situation folgendermaßen beschreiben: Für jedes $k \in J$ muss die Dokumentbeziehung

$$\pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

gelten für jede beliebige Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, welche die drei Bedingungen

- (i) $B_j = A_j$ (für alle $j \in J_k$)
- (ii) $B_j \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\}$ (für alle $j \in J \setminus J_k \setminus \{k\}$)
- (iii) $B_k = \mathcal{H}$

erfüllt.

Die Bedingung (i) besagt, dass alle $\langle A_j \rangle$, von denen $\langle A_k \rangle$ abhängig ist, als Bedingung in der Dokumentbeziehung auftreten müssen. Sie beschreibt somit die Abhängigkeit der Dokumentbeziehungen. Die Bedingung (ii) besagt, dass man für jedes $\langle A_j \rangle$, von dem $\langle A_k \rangle$ nicht abhängig ist, nach Belieben entweder den Faktor π_{A_j} oder den Faktor π_{D_j} auf beiden Seiten der Gleichung einfügen kann. Sie beschreibt die Unabhängigkeit der Dokumentbeziehungen voneinander. (Wenn $B_j = \mathcal{H}$ ist, wird der wirkungslose Faktor $\pi_{\mathcal{H}}$ eingefügt; dies ist gleichbedeutend damit, dass weder π_{A_k} noch π_{D_k} eingefügt wird.) Die Bedingung (iii) besagt, dass der Faktor π_{A_k} bzw. π_{D_k} in keinem Fall eingefügt werden soll.

Wie zuvor lassen sich die angegebenen Dokumentbeziehungen einerseits mit dem klassischen Analogon und andererseits mit dem bekannten Quantenformalismus begründen.

Man beachte, dass sich der Begriff der empirischen Zugänglichkeit nicht auf jedes einzelne Element einer Folge von Ereignissen, sondern auf die Ereignisfolge als ganze bezieht. Insbesondere erfordert die empirische Zugänglichkeit, dass jedes der Ereignisse zur Zeit t dokumentiert ist, dass die Bedingungen, unter denen die jeweilige Dokumentbeziehung besteht, selbst wieder (mit Ausnahme der Initialbedingung) zu der betrachteten Ereignisfolge gehören, und dass die Dokumentbeziehungen ansonsten in voneinander unabhängiger Weise bestehen.

Bemerkung: Entsprechende Überlegungen lassen sich für die klassische Mechanik anstellen, indem man überall U_t durch β_t und die Projektoren π_A durch Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_A$ ersetzt.

Bemerkung: Damit ein Experiment zum Zeitpunkt t von einem Subjekt ausgewertet werden kann, müssen sowohl die experimentellen Voraussetzungen als auch die Ergebnisse des Experiments vom Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich sein.

Bemerkung: Die Dokumentbeziehungen, welche die empirische Zugänglichkeit einer Menge von Ereignissen beschreiben, bestehen – wie alle Dokumentbeziehungen – im allgemeinen nur näherungsweise.

Wir wollen die vorstehenden Überlegungen hier noch einmal in einer formalen Definition des Begriffs der "empirischen Zugänglichkeit" zusammenfassen.

Definition: Die Ereignisse $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ sind mit der Abhängigkeitsrelation \ll auf der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$ vom Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich (kurz: t -zugänglich), wenn gilt:

1) Die Abhängigkeitsrelation ist eine Teilrelation von $<$, d.h. es gilt:

$$j \ll k \Rightarrow j < k \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

Sie gibt an, welche der Ereignisse (neben der Initialbedingung) jeweils gegeben sein müssen, damit ein bestimmtes Ereignis (E_k, t_k) zur Zeit t dokumentiert ist.

2) Zu jedem $k \in J$ gibt es eine makroskopische Eigenschaft $F_k \in S$, so dass mit den Abkürzungen

$$A_k := U_{-t_k} E_k$$

$$D_k := U_{-t} F_k$$

$$J_k := \{j \in J \mid j \ll k\}$$

für jede Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen

$$(i) \quad B_j = A_j \quad (\text{für alle } j \in J_k)$$

$$(ii) \quad B_j \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{für alle } j \in J \setminus J_k \setminus \{k\})$$

$$(iii) \quad B_k = \mathcal{H}$$

erfüllt, die Dokumentbeziehung

$$\pi_{A_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

gilt. Damit ist (F_k, t) ein Dokument für das Ereignis (E_k, t_k) zum Zeitpunkt t . Die Aussage (i) beschreibt die Bedingungen, die gegeben sein müssen, da-

mit die Dokumentbeziehung zwischen (E_k, t_k) und (F_k, t) besteht. Die Aussage (ii) stellt die zwischen den Dokumentbeziehungen ansonsten bestehende Unabhängigkeit dar.

Anmerkung 1

Eine Folge von Ereignissen sei t -zugänglich bezüglich der Abhängigkeitsrelation \ll auf der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$. Ferner sei die Relation \ll' definiert als die transitive Hülle von \ll , d.h. \ll' sei der Durchschnitt aller transitiven Relationen auf der Menge J , welche die Relation \ll umfassen. Man kann leicht zeigen, dass dann die gegebene Folge von Ereignissen auch bezüglich der Relation \ll' t -zugänglich ist. Aus diesem Grunde kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets annehmen, dass die Abhängigkeitsrelation einer t -zugänglichen Folge von Ereignissen transitiv ist.

Anmerkung 2

In der formalen Definition wurde festgelegt, wann eine *Folge* von Ereignissen bei gegebener Abhängigkeitsrelation \ll von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich (kurz: t -zugänglich) ist. Alternativ kann man stattdessen auch eine (endliche) *Menge* \mathcal{E}° von Ereignissen als t -zugänglich ansehen. Hierzu muss diese Menge mit einer Abhängigkeitsrelation \ll versehen sein. Das Paar (\mathcal{E}°, \ll) stellt genau dann eine t -zugängliche Menge von Ereignissen dar, wenn sich die Elemente von \mathcal{E}° so aufzählen lassen, dass sich eine t -zugängliche Folge ergibt. Dazu muss die Aufzählung insbesondere so beschaffen sein, dass die Abhängigkeitsrelation \ll in der Relation $<$ enthalten ist.

29. Eine Schachtelungseigenschaft für t-zugängliche Ereignisse

Wir betrachten hier eine t-zugängliche Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n) \in \mathcal{E}$$

mit der Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Unser Ziel ist es, über eine "Einschachtelung" dieser Ereignisse zu zeigen, dass sich viele Aussagen, die für vertauschbare Eigenschaften gelten, auch für empirisch zugängliche Mengen von Ereignissen beweisen lassen, das heißt für Ereignisse, die zu verschiedenen Zeiten stattfinden, die aber zu einem gemeinsamen Zeitpunkt t durch vertauschbare Eigenschaften dokumentiert sind. Hierzu ist eine Vielzahl technischer Vorbereitungen notwendig. Wir skizzieren den Beweisgang relativ ausführlich, da die Schachtelungseigenschaft ein zentrales Instrument für spätere Beweisführungen darstellt.

Zu jedem $k \in J$ sei $(F_k, t) \in \mathcal{E}_m$ ein Dokument, so dass mit

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für alle } k \in J)$$

$$D_k := U_{-t} F_k \quad (\text{für alle } k \in J)$$

die für die t-Zugänglichkeit erforderlichen Dokumentbeziehungen gelten.

Für alle $k \in J$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$A_{k;1} := A_k$$

$$A_{k;0} := (A_k)^\perp$$

$$A_{k;\emptyset} := \mathcal{H}$$

Für jedes $\tau \in \{0, 1, \emptyset\}$ ist folglich

$$A_{k;\tau} < \mathcal{H}$$

Wir definieren die Menge aller "Belegungen" auf der Indexmenge durch

$$\mathcal{W} := \{ \sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\} \mid \forall_{k \in J} [\sigma(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{j \ll k} \sigma(j) = 1] \}$$

Eine Belegung $\sigma \in \mathcal{W}$ ordnet jedem Index $k \in J$ entweder den Wert 0 oder den Wert 1, oder aber "überhaupt keinen" Wert zu. Letzteres wird ausgedrückt, indem $\sigma(k) = \emptyset$ gesetzt wird. Die Zuordnung eines "echten" Wertes (also 0 oder 1) erfolgt genau dann, wenn alle Ereignisse $\langle A_j \rangle$, von denen die Dokumentbeziehung zwischen $\langle A_k \rangle$ und $\langle D_k \rangle$ abhängig ist, den Wert 1 erhalten haben.

Mit einer Belegung $\sigma \in \mathcal{W}$ wollen wir beschreiben, wie zu jedem $k \in J$ entweder A_k oder $(A_k)^\perp$ oder aber keines von beiden ausgewählt wird. Die Auswahl von A_k oder $(A_k)^\perp$ findet genau dann statt, wenn für alle j mit $j \ll k$ das Ereignis A_j ausgewählt worden ist.

Wir definieren:

$$\pi_\sigma := \pi_{A_n; \sigma(n)} \cdots \pi_{A_1; \sigma(1)} \quad (\text{für alle } \sigma \in \mathcal{W})$$

$$M_\sigma := \bigcap_{k \in J} A_{k; \sigma(k)} \quad (\text{für alle } \sigma \in \mathcal{W})$$

$$M^\wedge := \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \}$$

Für alle $k \in J$ setzen wir außerdem:

$$B_{k; \tau} := \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) = \tau \} \quad (\text{für } \tau \in \{0, 1, \emptyset\})$$

$$C_{k; \tau} := B_{k; \tau} \oplus B_{k; \emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{für } \tau \in \{0, 1\})$$

$$C_{k; \emptyset} := \mathcal{H}$$

Aufgrund der Definition sind die M_σ paarweise orthogonal (vgl. T.29.1). Infolgedessen sind alle Unterräume M^\wedge , $B_{k; \tau}$ und $C_{k; \tau}$ paarweise miteinander vertauschbar (siehe T.29.2).

Für alle $\sigma \in \mathcal{W}$ gilt nun die Gleichung:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR} \quad (\text{vgl. T.29.3})$$

Der Beweis dieser Beziehung verläuft folgendermaßen: Analog zu den Bezeichnungen $A_{k; 1}$, $A_{k; 0}$ und $A_{k; \emptyset}$ bilden wir

$$D_{k; 1} := D_k$$

$$D_{k; 0} := (D_k)^\perp$$

$$D_{k; \emptyset} := \mathcal{H}$$

Zu einem festen $\sigma \in \mathcal{W}$ seien ferner (für alle $k \in J$)

$$G_k := A_{k; \sigma(k)}$$

$$H_k := D_{k; \sigma(k)}$$

Es wird dann zunächst ein Lemma bewiesen, welches die für die t-Zugänglichkeit erforderlichen Dokumentbeziehungen verallgemeinert auf den Fall, dass man alle A_j durch G_j und alle D_j durch H_j ersetzt. In diesem Fall kann zu jedem j entweder A_j durch $(A_j)^\perp$ und D_j durch $(D_j)^\perp$, oder aber A_j und D_j durch \mathcal{H} ersetzt werden. Sodann wird die Aussage

$$(*) \quad \pi_{G_k} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{für alle } k \in J)$$

gezeigt. Der Beweis erfolgt induktiv über den Index k. Mit der Aussage (*) erhalten wir für jedes $k \in J$:

$$\begin{aligned}
 \pi_\sigma \pi_{UR} &= \pi_{G_n} \dots \pi_{G_{k+1}} \pi_{G_k} \pi_{G_{k-1}} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} && \text{(Definition von } \pi_\sigma \text{)} \\
 &= \pi_{H_n} \dots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_k} \pi_{H_{k-1}} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR} && \text{(mittels (*))} \\
 &= \pi_{H_k} \pi_{H_n} \dots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_{k-1}} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR} && \text{(Vertauschbarkeit)} \\
 &= \pi_{H_k} \pi_{H_n} \dots \pi_{H_{k+1}} \pi_{G_{k-1}} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} && \text{(mittels (*))} \\
 &= \pi_{G_k} \pi_{H_n} \dots \pi_{H_{k+1}} \pi_{G_{k-1}} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} && \text{(mit dem Lemma)}
 \end{aligned}$$

Hierbei wird die Tatsache benutzt, dass die D_j und somit auch die H_j miteinander vertauschbar sind.

Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ folgt nun:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} \varphi \in G_k$$

Da dies für alle $k \in J$ gilt, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 \pi_\sigma \pi_{UR} \varphi &\in \bigcap_k G_k \\
 &= M_\sigma
 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned}
 \pi_\sigma \pi_{UR} &= \pi_{M_\sigma} \pi_\sigma \pi_{UR} \\
 &= \pi_{M_\sigma} \pi_{G_n} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} \\
 &= \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}
 \end{aligned}$$

(da $M_\sigma < G_k$ für alle k). Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Wenn wir mit I den Einheitsoperator auf \mathcal{H} bezeichnen, so gilt:

$$I = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_\sigma \quad (\text{vgl. T.29.4})$$

Diese Aussage kann mittels vollständiger Induktion über n bewiesen werden. Es folgt nun:

$$\begin{aligned}
 \pi_{UR} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_\sigma \pi_{UR} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}
 \end{aligned}$$

Da die M_σ paarweise orthogonal sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 UR &< \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_\sigma \\
 &= M^\wedge \quad (\text{vgl. T.29.5})
 \end{aligned}$$

Für alle $k \in J$ lässt sich ferner beweisen (vgl. T.29.6):

$$B_{k;\tau} < A_{k;\tau} < C_{k;\tau} \quad (\text{für } \tau \in \{0,1,\emptyset\})$$

Außerdem gelten für jedes $\sigma \in \mathcal{W}$:

$$\bigcap_{k \in J} B_{k;\sigma(k)} = M_\sigma \quad (\text{vgl. T.29.7})$$

sowie

$$M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} C_{k;\sigma(k)} = M_\sigma \quad (\text{vgl. T.29.8})$$

Dies lässt sich insbesondere anwenden auf den Fall, dass $\sigma(k) = 1$ ist für alle $k \in J$. Damit erhalten wir die folgende *Schachtelungseigenschaft*:

Es sei

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n) \in \mathcal{E}$$

eine t-zugängliche Folge von Ereignissen, und zur Abkürzung sei

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für alle } k \in \{1, \dots, n\})$$

Dann gibt es ein $M^\wedge < \mathcal{H}$ sowie für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ Unterräume $B_k < \mathcal{H}$ und $C_k < \mathcal{H}$ mit:

- (a) alle B_k, C_k sowie M^\wedge sind miteinander vertauschbar
- (b) $B_k < A_k < C_k$ (für alle k)
- (c) $UR < M^\wedge$
- (d) $\bigcap_k B_k = \bigcap_k A_k$
- (e) $M^\wedge \cap \bigcap_k C_k = \bigcap_k A_k$

Aus (a), (d) und (e) folgt unmittelbar:

$$(f) \quad \bigcap_k C_k < \bigcap_k B_k \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{vgl. T.29.9})$$

Entsprechendes gilt auch dann, wenn man (zu beliebigem $\sigma \in \mathcal{W}$) überall A_k durch $A_{k;\sigma(k)}$ ersetzt.

Mit Hilfe der Schachtelungseigenschaft lässt sich eine Aussage, die nach den früheren Ausführungen für paarweise vertauschbare Eigenschaften gilt, auf den Fall t-zugänglicher Ereignisse verallgemeinern:

Es sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine Folge t-zugänglicher Ereignisse. Mit den Abkürzungen

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für } k \in \{1, \dots, n\})$$

und

$$A := \bigcap_k A_k$$

gilt dann (vgl. T.29.10):

$$\begin{aligned} \mu(\bigvee_k \langle A_k \rangle \wedge \langle UR \rangle) &= \text{tr}(\pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \dots \pi_{A_n}) \\ &= \text{tr} \pi_A \pi_{UR} \pi_A \end{aligned}$$

Diese Aussage gilt auch, wenn man zu beliebigem $\sigma \in \mathcal{W}$ überall A_k durch $A_{k;\sigma(k)}$ ersetzt. Falls $\dim UR < \infty$ ist, kann man anstelle von

$$\text{tr} \pi_A \pi_{UR} \pi_A$$

auch

$$\text{tr} \pi_A \pi_{UR}$$

schreiben.

Man beachte, dass die A_k nicht vertauschbar sein müssen. Es gilt daher im allgemeinen *nicht*:

$$\pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} = \pi_A$$

(bzw. allgemeiner: $\pi_\sigma = \pi_{M_\sigma}$). Stattdessen gilt hier nur die schwächere Aussage

$$\pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} = \pi_A \pi_{UR}$$

(als spezieller Fall von $\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$).

Die Bedeutung der Schachtelungseigenschaft kann folgendermaßen beschrieben werden: Makroskopische Eigenschaften des Universums, die sich zum gleichen Zeitpunkt unmittelbar beobachten lassen, sind miteinander vertauschbar. Für ungleichzeitige makroskopische Ereignisse gilt dies im allgemeinen aber schon nicht mehr. Wenn nicht vertauschbare Ereignisse jedoch über entsprechende Dokumentbeziehungen empirisch zugänglich sind, so können sie vertauschbar eingeschachtelt werden. Viele Aussagen, die für vertauschbare Eigenschaften gelten, lassen sich damit auch für empirisch zugängliche Mengen von Ereignissen beweisen. Zwei Ereignisse (A,s) und (B,t) werden hier als vertauschbar bezeichnet, wenn die beiden Unterräume $U_{-s}A$ und $U_{-t}B$ vertauschbar sind.

30. Makroskopische Kontexte und die Plausibilität des physikalischen "tertium non datur"

Wir haben gezeigt, dass das Axiom NEG, d.h. das physikalische "tertium non datur", im Falle der Quantentheorie nicht zusätzlich zu den Axiomen MON und SEC angenommen werden kann, da dies zu einem inkonsistenten Axiomensystem führen würde. Für den Fall der klassischen Mechanik hingegen gilt: Der empirische Gehalt der Theorie ändert sich nicht, wenn man (bei gegebenen Axiomen MON und SEC) das Axiom NEG hinzunimmt. Wir wollen nun zeigen, dass sich eine analoge Aussage auch für die Quantentheorie ergibt, wenn man sich auf eine in bestimmter Weise empirisch zugängliche Menge von Ereignissen beschränkt.

Das alltägliche Denken eines makroskopischen Subjekts spielt sich ab unter gewissen Voraussetzungen. Dazu gehört neben der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ eine (endliche) Anzahl von Gegebenheiten, ohne die das Subjekt weder existieren noch empirische Erfahrungen machen könnte. Im Falle menschlicher Subjekte ist beispielsweise vorauszusetzen, dass das Sonnensystem einschließlich des Planeten Erde vorhanden ist und dass auf der Erde Verhältnisse herrschen, die die Entstehung und die Existenz dieser Subjekte ermöglichen. Formal beschreiben wir diese Voraussetzungen als eine Folge

$$(E_1, t_1), \dots, (E_p, t_p)$$

von Ereignissen. Den Indexbereich definieren wir als

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

Gegenstand des alltäglichen Denkens eines derartigen Subjekts ist nun eine weitere Folge von Ereignissen

$$(E_{p+1}, t_{p+1}), \dots, (E_n, t_n)$$

Den zugehörigen Indexbereich definieren wir als

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

Auch wenn wir die Menge der Ereignisse, die Gegenstand des alltäglichen Denkens eines Subjekts sind, hier als endlich annehmen, kann es sich dabei doch um eine sehr umfangreiche Menge handeln.

Wir fassen diese beiden Folgen von Ereignissen zusammen zu einer einzigen Folge:

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

mit dem Indexbereich

$$\begin{aligned} J &:= J' \cup J'' \\ &= \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Von dieser Folge nehmen wir an, dass sie (von einem Zeitpunkt t aus) empirisch zugänglich ist mit einer Abhängigkeitsrelation \ll auf J . Der Zeitpunkt t beschreibt den Moment, an dem das Subjekt sich für die Ereignisse

$$(E_{p+1}, t_{p+1}), \dots, (E_n, t_n)$$

interessiert. Zu jedem $k \in J$ gibt es dann für das Ereignis (E_k, t_k) zur Zeit t ein Dokument (F_k, t) mit $F_k \in S$.

Wir nehmen zusätzlich an, dass zu jedem $k \in J$ die Ereignisse, von denen die Dokumentbeziehung zwischen (E_k, t_k) und (F_k, t) abhängig ist, mit Ausnahme der Initialbedingung alle zu den Voraussetzungen $(E_1, t_1), \dots, (E_p, t_p)$ gehören. Formal bedeutet dies: Für alle $k \in J$ und $j \ll k$ ist $j \in J'$.

Eine Situation, wie wir sie hier beschrieben haben, wollen wir als einen "makroskopischen Kontext" bezeichnen. Für einen solchen Kontext wollen wir zeigen, dass der empirische Gehalt der Theorie – sofern man ihn nur auf die interessierenden Ereignisse $(E_{p+1}, t_{p+1}), \dots, (E_n, t_n)$ bezieht – nicht davon abhängig ist, ob man das physikalische "tertium non datur" für diese Ereignisse annimmt oder nicht.

Der Präzision halber definieren wir formal, was unter einem makroskopischen Kontext verstanden werden soll.

Definition: Ein "makroskopischer Kontext" ist eine t -zugängliche Folge

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

von Ereignissen mit einer Abhängigkeitsrelation \ll auf der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$, wenn es eine Aufteilung von J in Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

und

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

gibt, so dass gilt:

$$\forall_{k \in J''} \forall_{j \ll k} j \in J'$$

Im folgenden gehen wir von einem bestimmten makroskopischen Kontext aus. Es ist dann

$$\mathcal{E}' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J' \}$$

die Menge der zu diesem Kontext zählenden Voraussetzungen und

$$\mathcal{E}'' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J'' \}$$

die Menge der in dem Kontext interessierenden Ereignisse.

Wir definieren:

$$G_o := \langle UR \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle E_j, t_j \rangle_o$$

Dieses mögliche Faktum $G_o \in \mathcal{A}_o$ beschreibt die Voraussetzungen, unter denen das Subjekt existiert und seine Überlegungen anstellt. Es wird als "Grundbedingung" des makroskopischen Kontextes bezeichnet.

Das physikalische "tertium non datur", bezogen auf die im gegebenen Kontext interessierenden Ereignisse, kann formuliert werden als das mögliche Faktum

$$N_o := \forall_{j \in J} [\langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o]$$

Mit diesen Definitionen lässt sich für jedes $I \subset J'$ beweisen (siehe T.30.3):

$$(*) \quad \Diamond_{AX}(\forall_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o) \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o \wedge N_o)$$

Der Beweis dieser Aussage beruht im wesentlichen auf der im letzten Abschnitt angegebenen Schachtelungseigenschaft. Es wird außerdem die Aussage

$$\Box_{AX}(G_o \wedge \exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \forall_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o \rightarrow N_o)$$

benötigt (vgl. T.30.1). Dabei ist \mathcal{W} (als die Menge der Belegungen auf der Indexmenge J) und $A_{k; \sigma(k)}$ (für alle $\sigma \in \mathcal{W}$ und $k \in J$) wie im letzten Kapitel definiert. Ferner wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass für endlich viele paarweise vertauschbare $B_j < \mathcal{H}$ stets gilt:

$$\neg \Diamond_{AX}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \Leftrightarrow \bigcap_j B_j < UR^\perp \quad (\text{vgl. T.30.2})$$

Die Aussage (*) besagt, dass ein "empirisches Material"

$$\forall_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o$$

mit $I \subset J'$ unter der Bedingung G_o (also unter der Grundbedingung des makroskopischen Kontextes) genau dann möglich ist, wenn es auch unter der zusätzlichen Bedingung N_o (also dem physikalischen "tertium non datur" für die interessierenden Ereignisse) möglich ist.

Damit ist das zentrale Resultat dieses Kapitels gezeigt: Beschränkt man sich auf die interessierenden Ereignisse eines makroskopischen Kontextes, so ändert sich – ähnlich wie in der klassischen Theorie – der empirische Gehalt der Theorie durch die Annahme des (ebenso eingeschränkten) physikalischen "tertium non datur" nicht.

Um die Analogie zu der früheren Diskussion des empirischen Gehalts deutlich zu machen, definieren wir die zusätzlichen Axiome:

$$\text{INIT} := \{ \langle UR \rangle_o \}$$

$$\text{PRE}' := \{ \langle E_j, t_j \rangle_o \mid j \in J' \}$$

$$\text{NEG}'' := \{ \langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o \mid j \in J'' \}$$

INIT stellt die Initialbedingung in Form eines Axioms dar. PRE' beschreibt die Voraussetzungen des makroskopischen Kontextes als eine Menge von Axiomen. NEG'' ist das physikalische "tertium non datur", bezogen auf die interessierenden Ereignisse des Kontextes. Damit bilden wir die Axiomensysteme

$$\text{AX}_1 := \text{AX} \cup \text{INIT} \cup \text{PRE}'$$

$$\text{AX}_2 := \text{AX} \cup \text{INIT} \cup \text{PRE}' \cup \text{NEG}''$$

In AX_1 wird neben den allgemeinen Axiomen der Quantentheorie AX und der Initialbedingung $\langle \text{UR} \rangle_o$ das Zutreffen der Voraussetzungen des makroskopischen Kontextes gefordert. In AX_2 fordern wir zusätzlich das physikalische "tertium non datur" für die im Kontext interessierenden Ereignisse.

Bemerkung: Die Axiome INIT und PRE' sind äquivalent zu $\{G_o\}$ und NEG'' entspricht $\{N_o\}$. Daher ist das Axiomensystem AX_1 äquivalent zu $\text{AX} \cup \{G_o\}$, und ebenso ist AX_2 äquivalent zu $\text{AX} \cup \{G_o, N_o\}$.

Es sei

$$\mathcal{M}'' := \{ \mathcal{B} \subset \mathcal{E}'' \mid \mathcal{B} \text{ endlich} \}$$

die Menge aller empirischen Materialien in dem gegebenen makroskopischen Kontext. Dies ist einfach die Potenzmenge von \mathcal{E}'' . Wie früher ordnen wir jedem empirischen Material

$$\mathcal{B} = \{(B_1, s_1), \dots, (B_m, s_m)\}$$

mit

$$F_{\mathcal{B}} := \langle B_1, s_1 \rangle_o \wedge \dots \wedge \langle B_m, s_m \rangle_o$$

das zugehörige mögliche Faktum zu. Der empirische Gehalt des Axiomensystems AX_1 – beschränkt auf die interessierenden Ereignisse des Kontextes – ist dann definiert als:

$$\begin{aligned} \text{EMP}_{\text{AX}_1}(\mathcal{M}'') &:= \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}'' \mid \neg \diamond_{\text{AX}_1}(F_{\mathcal{B}}) \} \\ &= \text{EMP}_{\text{AX}_1} \cap \mathcal{M}'' \end{aligned}$$

Analog erfolgt die Definition für AX_2 .

Für eine endliche Folge von möglichen Fakten

$$G_1, \dots, G_s \in \mathcal{A}_o$$

gilt stets (vgl. T.30.4):

$$\Diamond_{AX \cup \{G_1, \dots, G_s\}}(A) \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(A \wedge [G_1 \wedge \dots \wedge G_s]) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_0)$$

Damit lässt sich aus der obigen Aussage (*) ableiten (siehe T.30.5):

$$\text{EMP}_{AX_1}(\mathcal{M}'') = \text{EMP}_{AX_2}(\mathcal{M}'')$$

Demnach stimmt der empirische Gehalt der Axiomensysteme AX_1 und AX_2 (bezogen auf die interessierenden Ereignisse des Kontextes) vollständig überein.

Damit ist gezeigt: Wenn man die Voraussetzungen des makroskopischen Kontextes sowie die Initialbedingung als gegeben annimmt, so ist der (auf den Kontext bezogene) empirische Gehalt der Theorie nicht davon abhängig, ob man für die (im Kontext) interessierenden Ereignisse das physikalische "tertium non datur" annimmt oder nicht.

Ein Subjekt, das im Rahmen eines makroskopischen Kontextes (in dem hier angegebenen Sinne) von der Gültigkeit des physikalischen "tertium non datur" ausgeht, stößt daher auf keinerlei theoretische oder empirische Widersprüche. Ihm kann das physikalische "tertium non datur" als ein allgemeines Gesetz erscheinen. Hierauf beruht die Plausibilität dieser Annahme.

Aus den genannten Gründen ist es aber auch *gerecht*, von der Gültigkeit des physikalischen "tertium non datur" auszugehen, solange man sich ausschließlich auf einen beliebigen, aber festen makroskopischen Kontext bezieht. Man darf dies allerdings nicht auf alle möglichen makroskopischen Kontexte zugleich anwenden und damit das physikalische "tertium non datur" als ein allgemeines Gesetz annehmen.

In diesem Sinne ist ein "Kalkül", der von der Annahme des physikalischen "tertium non datur" ausgeht, auch in der Quantentheorie möglich, solange man sich dabei im Rahmen eines bestimmten makroskopischen Kontextes hält. Nicht sinnvoll ist es allerdings, einen solchen Kalkül als "klassisch" zu bezeichnen, da hier die Schrödingergleichung und nicht das klassische Bewegungsgesetz zugrunde zu legen ist.

Anmerkung 1

Die vorstehenden Überlegungen lassen sich anwenden auf den Fall, dass sich das Denken eines makroskopischen Subjekts im Rahmen eines makroskopischen Kontextes abspielt. Hierbei wird eine endliche Folge von Ereignissen zugrunde gelegt, welche in bestimmter Weise zu einem Zeitpunkt t dokumentiert sind.

Es kann sich hierbei um eine sehr große Anzahl von Ereignissen handeln. Insbesondere können wir als das "Subjekt" auch die Menschheit als Ganzes (als ein ideelles Gesamtsubjekt) annehmen.

Darüber hinaus ist es möglich, dass es zu den betrachteten Ereignissen Dokumente nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt t , sondern während eines ganzen Zeitintervalls (d.h. zu jedem einzelnen Zeitpunkt innerhalb dieses Intervalls) gibt. Typischerweise ist dies z.B. der Fall bei Dokumenten in Form von Aufzeichnungen in Büchern, auf Datenträgern usw.

Anmerkung 2

Ein makroskopischer Kontext beruht auf einer Folge t -zugänglicher Ereignisse, deren Indexmenge $J = \{1, \dots, n\}$ in die beiden Teilbereiche $J' = \{1, \dots, p\}$ und $J'' = \{p+1, \dots, n\}$ aufgeteilt ist. Die wesentliche Bedingung für das Vorliegen eines makroskopischen Kontextes lautet:

$$(a) \quad \forall_{k \in J''} \forall_{j \ll k} j \in J'$$

Da für alle $k \in J'$ und $j \ll k$ (wegen $j < k$) ebenfalls $j \in J'$ gilt, ist diese Bedingung äquivalent zu der Aussage:

$$(b) \quad j \ll k \Rightarrow j \in J' \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

Anmerkung 3

Für einen makroskopischen Kontext mit der Indexmenge

$$J = J' \cup J''$$

und der Abhängigkeitsrelation \ll lässt sich zusätzlich eine spezielle Abhängigkeitsrelation \ll' definieren mittels

$$j \ll' k \Leftrightarrow j < k \wedge j \in J' \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

Da \ll eine Teilrelation von $<$ ist und die Bedingung (b) aus Anmerkung 2 erfüllt, ist \ll eine Teilrelation von \ll' . Die Relation \ll' wird als "Standard-Abhängigkeitsrelation" bezeichnet.

Aufgrund der Definition der t -Zugänglichkeit entspricht der Übergang von \ll zu \ll' einer Abschwächung der Voraussetzungen über die bestehenden Dokumentbeziehungen. Man erhält daher den folgenden Zusammenhang: Wenn eine Folge (E_j, t_j) bezüglich der Abhängigkeitsrelation \ll t -zugänglich ist, so ist sie erst recht t -zugänglich bezüglich \ll' (vgl. T.30.6).

Auch wenn lediglich die t -Zugänglichkeit bezüglich der speziellen Abhängigkeitsrelation \ll' gegeben ist, handelt es sich formal um einen makroskopischen Kontext. Folglich gilt schon unter dieser schwächeren Voraussetzung die Aussage: Ausgehend von der um die Grundbedingung des Kontextes erweiterten Theorie verändert die zusätzliche Annahme des physikalischen "tertium non datur" für die interessierenden Ereignisse des Kontextes den auf diese Ereignisse bezogenen empirischen Gehalt nicht.

Bemerkung: Für den Fall eines makroskopischen Kontextes lässt sich der Beweis der Schachtelungseigenschaft vereinfachen. Man kann dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Abhängigkeitsrelation « mit «' identisch ist.

Anmerkung 4

Wir haben definiert, dass unter einem makroskopischen Kontext eine *Folge* von Ereignissen zu verstehen ist, die bestimmten Bedingungen genügen. Alternativ kann man stattdessen auch eine (endliche) *Menge* \mathcal{E}° von Ereignissen als einen makroskopischen Kontext ansehen. Hierzu muss diese Menge mit einer Abhängigkeitsrelation « versehen sein, die wir z.B. als transitiv und irreflexiv voraussetzen können. (Die Relation « ist irreflexiv, wenn für alle $E \in \mathcal{E}^\circ$ nicht gilt: $E \ll E$.) Ferner muss eine Teilmenge $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}^\circ$ als die Menge der interessierenden Ereignisse ausgezeichnet sein. Das Tripel $(\mathcal{E}^\circ, \mathcal{E}'', \ll)$ stellt genau dann einen makroskopischen Kontext dar, wenn sich die Elemente von \mathcal{E}° so aufzählen lassen, dass sich ein makroskopischer Kontext im oben definierten Sinne ergibt.

Anmerkung 5

In einem früheren Kapitel hatten wir argumentiert, dass das physikalische "tertium non datur" als ein kontingentes Faktum immer dann gegeben ist, wenn eine Situation mit ausreichender Genauigkeit beobachtbar ist. Aus der Perspektive eines Subjekts entsteht so der Eindruck, dass es sich bei dem physikalischen "tertium non datur" um ein allgemeines Gesetz handelt. Man hat daher den Wunsch, dieses Gesetz als Axiom in die Theorie aufzunehmen. In der klassischen Physik ist dies auch problemlos möglich.

In der Quantentheorie besteht zwar ebenfalls die Möglichkeit, das physikalische "tertium non datur" als eine Art "Gesetz" in die Theorie aufzunehmen, allerdings stets nur bezogen auf einen bestimmten makroskopischen Kontext. Von einem physikalischen Gesetz im eigentlichen Sinne ist aber zu erwarten, dass es allgemeingültig und nicht an subjektive Voraussetzungen gebunden ist. Aus diesem Grunde muss man auf die Annahme des physikalischen "tertium non datur" als Gesetz in der Quantentheorie verzichten.

Anmerkung 6

Es sei ein bestimmter makroskopischer Kontext gegeben. Zu jedem $s \in \{1, \dots, S\}$ sowie $j \in \{1, \dots, n(s)\}$ gehöre (E_{sj}, t_{sj}) zu der Menge der interessierenden Ereignisse dieses Kontextes. Die Grundbedingung G_0 und das auf die interessierenden Ereignisse bezogene physikalische "tertium non datur" N_0 seien wie zuvor definiert. Ferner seien

$$G := G_0 \cap \Omega$$

$$N := N_0 \cap \Omega$$

die entsprechenden Elemente von \mathcal{A} . Mit

$$A_{sj} := U_{-t_{sj}} E_{sj} \quad (\text{für } s \in \{1, \dots, S\} \text{ und } j \in \{1, \dots, n(s)\})$$

kann dann die Gleichung

$$(+) \quad \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G \wedge N)$$

und somit auch

$$(++) \quad \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle | G) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle | G \wedge N)$$

gezeigt werden (siehe dazu T.30.7 und T.30.8). Dabei entspricht der Ausdruck

$$\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle$$

einer (endlichen) Menge aus möglichen empirischen Materialien, die zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes gehören. Die Aussage (++) drückt aus, dass sich – wenn die Grundbedingung vorausgesetzt wird – auch der auf die interessierenden Ereignisse bezogene empirische Gehalt des *probabilistischen* Gesetzes nicht ändert, wenn man für alle interessierenden Ereignisse des Kontextes das physikalische "tertium non datur" zusätzlich annimmt. (Eine formale Definition des empirischen Gehalts probabilistischer Gesetze findet sich in Kapitel 54, Punkt 7.)

Anmerkung 7

Es sei wiederum ein makroskopischer Kontext gegeben. Wir betrachten eine Observable

$$L := \sum_j \lambda_j \pi_{M_j}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sowie orthogonalen $M_j < \mathcal{H}$ mit $\bigoplus_j M_j = \mathcal{H}$. Dabei sollen (zu einem Zeitpunkt $s \in T$) die Ereignisse (M_j, s) alle zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes gehören. Wie zuvor wird G als Grundbedingung und N als das physikalische "tertium non datur" für alle interessierenden Ereignisse definiert.

Zu möglichen Fakten $F, F' \in \mathcal{A}$ schreiben wir

$$F \Rightarrow F'$$

für die Aussage

$$\square(F \rightarrow F')$$

Der Ausdruck $F \Rightarrow F'$ besagt demnach, dass aufgrund der deterministischen Gesetze der Theorie von F auf F' geschlossen werden kann.

Unter den gegebenen Voraussetzungen kann man zeigen:

$$N \Rightarrow \exists_j \langle M_j, s \rangle \quad (\text{vgl. T.30.9})$$

Aus der Annahme des physikalischen "tertium non datur" für alle interessierenden Ereignisse folgt somit die Wertbestimmtheit der Observablen L zum Zeitpunkt s.

Diese Aussage kann verallgemeinert werden auf den in der Praxis relevanten Fall einer bedingten Wertbestimmtheit. In diesem Fall nehmen wir nicht an, dass $\bigoplus_j M_j = \mathcal{H}$ ist. Stattdessen setzen wir:

$$M := \bigoplus_j M_j$$

Auch in diesem Fall gehen wir davon aus, dass die Observable L zur Zeit s genau dann den Wert λ_j hat, wenn das Ereignis $\langle M_j, s \rangle$ eintritt. Tritt keines der $\langle M_j, s \rangle$ ein, so hat L gar keinen Wert.

Es seien nun (V_i, t_i) einige Ereignisse, die ebenfalls zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes gehören. Hierzu setzen wir

$$V := \bigvee_i \langle V_i, t_i \rangle$$

und diskutieren die Frage, wann unter der Bedingung V die Wertbestimmtheit der Observablen L zur Zeit s gegeben ist.

Wenn die Observable L zur Zeit s unter der Grundbedingung G sowie der Voraussetzung V einen der Werte λ_j aufweisen soll, so muss eines der Ereignisse $\langle M_j, s \rangle$ eintreten. Daher darf das Ereignis $\langle M^\perp, s \rangle$ unter der Grundbedingung G und der Voraussetzung V nicht möglich sein, da $\langle M^\perp, s \rangle$ alle $\langle M_j, s \rangle$ ausschließen würde. Die Observable L und die Voraussetzungen (V_i, t_i) müssen daher so gewählt sein, dass gilt:

$$\neg \Diamond (G \wedge V \wedge \langle M^\perp, s \rangle)$$

Dies kann umformuliert werden zu

$$G \wedge V \Rightarrow \neg \langle M^\perp, s \rangle$$

Hieraus lässt sich (unter Verwendung der Schachtelungseigenschaft) ableiten:

$$G \wedge V \Rightarrow \neg \bigvee_j \langle (M_j)^\perp, s \rangle \quad (\text{vgl. T.30.10})$$

Wegen

$$N \Rightarrow \bigvee_j [\langle M_j, s \rangle \vee \langle (M_j)^\perp, s \rangle] \quad (\text{vgl. T.30.11})$$

folgt dann

$$G \wedge N \wedge V \Rightarrow \exists_j \langle M_j, s \rangle$$

d.h. die durch V bedingte Wertbestimmtheit der Observablen L, wenn neben der Grundbedingung das physikalische "tertium non datur" für alle interessierenden Ereignisse des gegebenen makroskopischen Kontextes angenommen wird.

Dies zeigt, dass die aufgrund der Alltagserfahrung plausibel erscheinende Annahme der (bedingten) Wertbestimmtheit physikalischer Größen immer dann gerechtfertigt ist, wenn sowohl die zugehörigen Bedingungen als auch die betrachteten physikalischen Größen einem bestimmten makroskopischen Kontext angehören.

Anmerkung 8

Wir haben bisher den Fall betrachtet, dass der Bereich, für den sich ein makroskopisches Subjekt interessiert, im Rahmen eines makroskopischen Kontextes beschrieben werden kann. Hierfür haben wir gezeigt, dass man das physikalische "tertium non datur" in einem solchen Rahmen annehmen kann, ohne dass sich dadurch der empirische Gehalt der Theorie (soweit er sich auf eben diesen Kontext bezieht) ändert.

Diese Überlegung wollen wir hier verallgemeinern auf den Fall, dass auch Subjekte betrachtet werden sollen, die sich nicht nur für einen bestimmten makroskopischen Kontext interessieren, sondern für eine beliebige Folge empirisch zugänglicher Ereignisse.

Es sei also $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine t-zugängliche Folge von Ereignissen mit einer Abhängigkeitsrelation « auf dem Indexbereich

$$J := \{1, \dots, n\}$$

und die Relation « sei transitiv.

Eine Teilmenge $I \subset J$ bezeichnen wir als abgeschlossen, wenn gilt:

$$\forall i \in I \forall j \in J (j \ll i \Rightarrow j \in I)$$

Zu jedem solchen $I \subset J$ ist

$$\mathcal{B}_I := \{ (E_i, t_i) \mid i \in I \}$$

ein empirisches Material.

Damit definieren wir

$$\mathcal{M}^a := \{ \mathcal{B}_I \mid I \subset J \text{ und } I \text{ ist abgeschlossen} \}$$

als die Menge der abgeschlossenen empirischen Materialien im Rahmen der gegebenen t-zugänglichen Ereignisfolge. Solche Materialien sind es, die tatsächlich empirisch zugänglich sind: Wenn ein Subjekt von einem der Ereignisse (E_i, t_i) Kenntnis hat, so bedeutet dies, dass ihm nicht nur das zugehörige Dokument (D_i, t) vorliegen muss. Das Subjekt muss vielmehr auch Kenntnis haben

von denjenigen Ereignissen, die die Voraussetzung für das Bestehen der Dokumentbeziehung zwischen (E_i, t_i) und (D_j, t) sind.

Zu jedem $j \in J$ können wir das bedingte physikalische "tertium non datur" formulieren als:

$$N_j := (\forall_{i \ll j} \langle E_i, t_i \rangle_o) \rightarrow (\langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o)$$

Es besagt, dass für das Ereignis (E_j, t_j) das physikalische "tertium non datur" als ein kontingentes Faktum gegeben ist, sofern alle Bedingungen für das Bestehen der Dokumentbeziehung zwischen (E_j, t_j) und (D_j, t) vorhanden sind. Diese möglichen Fakten fassen wir zu einem Axiom zusammen:

$$\text{NEG}^a := \{ N_j \mid j \in J \}$$

Damit definieren wir die beiden Axiomensysteme

$$\text{AX}_1 := \text{AX} \cup \text{INIT}$$

$$\text{AX}_2 := \text{AX} \cup \text{INIT} \cup \text{NEG}^a$$

sowie den zugehörigen empirischen Gehalt im Rahmen der gegebenen t-zugänglichen Folge als:

$$\text{EMP}_{\text{AX}_1}(\mathcal{M}^a) := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}^a \mid \neg \diamond_{\text{AX}_1}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}) \}$$

$$\text{EMP}_{\text{AX}_2}(\mathcal{M}^a) := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}^a \mid \neg \diamond_{\text{AX}_2}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}) \}$$

Mit diesen Definitionen kann man nun beweisen, dass gilt (vgl. T.30.12):

$$\text{EMP}_{\text{AX}_1}(\mathcal{M}^a) = \text{EMP}_{\text{AX}_2}(\mathcal{M}^a)$$

Dies besagt, dass die Hinzunahme des bedingten physikalischen "tertium non datur" für alle Elemente der t-zugänglichen Folge nichts ändert am empirischen Gehalt der Theorie, soweit dieser sich auf abgeschlossene empirische Materialien bezieht, die im Rahmen dieser Folge gebildet werden können.

Wir wollen uns nun fragen, ob eine entsprechende Aussage auch für den empirischen Gehalt des *probabilistischen* Gesetzes der Theorie gilt. Hierzu setzen wir

$$A_j := \bigcup_{-t_j} E_j \quad (\text{für alle } j \in J)$$

und mit

$$N := \bigcap_j N_j \cap \Omega$$

fassen wir das bedingte physikalische "tertium non datur" zu einem möglichen Faktum $N \in \mathcal{A}$ zusammen.

Zu jedem $s \in \{1, \dots, S\}$ sei I_s eine Teilmenge von J , die bezüglich « abgeschlossen ist. I_s entspricht einem empirischen Material $\mathcal{B}_{I_s} \in \mathcal{M}^a$. Für alle $s \in \{1, \dots, S\}$ und $j \in I_s$ schreiben wir der Deutlichkeit halber

$$A_{sj} := A_j$$

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die Gleichung

$$(+) \quad \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge N)$$

und somit auch

$$(++) \quad \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle \wedge N)$$

beweisen (vgl. T.30.13 und T.30.14). Dabei entspricht der Ausdruck

$$\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle$$

einer (endlichen) Menge abgeschlossener empirischer Materialien, die im Rahmen der t -zugänglichen Folge gebildet werden können.

Die Gleichung (++) besagt, dass sich – wenn die Initialbedingung vorausgesetzt wird – auch der auf die t -zugänglichen Ereignisse bezogene empirische Gehalt des *probabilistischen* Gesetzes nicht ändert, wenn man für alle Elemente der t -zugänglichen Folge das bedingte physikalische "tertium non datur" zusätzlich annimmt.

Zusammenfassung

Es sei

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n) \in \mathcal{E}$$

eine t -zugängliche Folge von Ereignissen mit einer Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$. Es sei

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

und

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

eine Aufteilung von J in zwei Teilbereiche. Damit werden die Ereignisse (E_j, t_j) aufgeteilt in die "Voraussetzungen"

$$\mathcal{E}' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J' \}$$

und die "interessierenden Ereignisse"

$$\mathcal{E}'' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J'' \}$$

Für alle $k \in J''$ und $j \ll k$ sei $j \in J'$, d.h. abgesehen von der Initialbedingung gehören alle Ereignisse, von denen die Dokumentation der interessierenden Ereignisse zum Zeitpunkt t abhängig ist, zu \mathcal{E}' . Man spricht in diesem Fall von einem "makroskopischen Kontext".

Unter diesen Prämissen gilt: Der auf \mathcal{E}'' bezogene empirische Gehalt der um die Initialbedingung $\langle UR \rangle_0$ und die Voraussetzungen $\langle E_j, t_j \rangle_0$ (für alle $j \in J'$) erweiterten Theorie hängt nicht davon ab, ob man für alle interessierenden Ereignisse das physikalische "tertium non datur" annimmt oder nicht.

Entsprechendes gilt auch für den empirischen Gehalt des probabilistischen Gesetzes der Theorie.

Es ist daher gerechtfertigt, bei der Anwendung der Quantentheorie von der Gültigkeit des physikalischen "tertium non datur" auszugehen, solange man sich ausschließlich auf einen beliebigen, aber festen makroskopischen Kontext bezieht.

Aus diesem Grunde kann das physikalische "tertium non datur" einem (makroskopischen) Subjekt auch als ein allgemeines Gesetz erscheinen, und dies erklärt die Plausibilität dieser Annahme.

In einem makroskopischen Kontext kann aus dem physikalischen "tertium non datur" unter bestimmten Voraussetzungen auf die (bedingte) Wertbestimmtheit von Observablen geschlossen werden, die auf der Basis der interessierenden Ereignisse dieses Kontextes gebildet sind. Daher ist es gerechtfertigt, bei der Anwendung der Quantentheorie von der Wertbestimmtheit von Observablen auszugehen, solange diese Observablen einem beliebigen, aber festen makroskopischen Kontext angehören.

Auch ohne die spezielle Voraussetzung, dass es sich um einen makroskopischen Kontext handelt, gilt für eine beliebige t -zugängliche Folge von Ereignissen: Unter der Voraussetzung der Initialbedingung ändert die Hinzunahme des bedingten physikalischen "tertium non datur" für alle Elemente der Folge nichts am empirischen Gehalt der Theorie, soweit dieser sich auf abgeschlossene empirische Materialien bezieht, die im Rahmen dieser Folge gebildet werden können.

Entsprechendes gilt auch für den empirischen Gehalt des probabilistischen Gesetzes der Theorie.

31. Erweiterte makroskopische Kontexte

Wir haben angenommen, dass die Menge S der makroskopischen Eigenschaften insbesondere diejenigen Eigenschaften umfasst, die ein makroskopisches Subjekt unmittelbar wahrnehmen kann. Zu den unmittelbar wahrnehmbaren Eigenschaften haben wir dabei auch solche Eigenschaften gerechnet, die mit einfachen, klassisch beschreibbaren Hilfsmitteln wie z.B. einer Lupe beobachtet werden können. Für je zwei Elemente $A, B \in S$ haben wir angenommen, dass A mit B vertauschbar ist. Auf dieser Basis haben wir definiert, was unter einer t -zugänglichen Folge von Ereignissen und unter einem makroskopischen Kontext zu verstehen ist.

Die Menge S kann hier grundsätzlich erweitert werden zu einer beliebigen Menge S' mit

$$S \subset S' \subset \mathcal{U}$$

sofern auch für S' die Bedingung gilt, dass je zwei ihrer Elemente miteinander vertauschbar sind. Auch in Bezug auf S' kann definiert werden, was unter einem makroskopischen Kontext zu verstehen ist. Wir sprechen in diesem Fall von einem "erweiterten makroskopischen Kontext". Auch für einen solchen Kontext gilt die Aussage: Wenn man von der um die Initialbedingung und die Voraussetzungen des Kontextes erweiterten Theorie ausgeht, so verändert die Annahme des physikalischen "tertium non datur" für die interessierenden Ereignisse des Kontextes den auf diese Ereignisse bezogenen empirischen Gehalt nicht.

Diese Überlegung lässt sich beispielsweise anwenden auf den Fall, dass die Dokumente, welche zu den zum Kontext gehörenden Ereignissen jeweils vorhanden sein müssen, nicht makroskopisch sind und von einem makroskopischen Subjekt nicht unmittelbar, sondern nur unter Zuhilfenahme einer komplexen technischen Vorrichtung wahrgenommen werden können (zum Beispiel Dokumente auf einem Datenträger). Folglich ist auch in einem solchen Fall die Annahme des physikalischen "tertium non datur" möglich, allerdings unter der Voraussetzung, dass man sich auf einen bestimmten (in dieser Weise erweiterten) makroskopischen Kontext beschränkt.

Anwendbar ist diese Überlegung zum Beispiel auch im Falle einer Kristallstruktur, die sich nur mit Hilfe eines Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskops beobachten lässt. Eine solche Struktur wird man im allgemeinen eher als "mikroskopisch" bezeichnen; in dem hier diskutierten Sinn kann sie jedoch auch als "makroskopisch" aufgefasst werden. Dies gilt im übrigen unabhängig von der Tatsache, dass ein Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskop hinsichtlich der beteiligten Elektronen auf einem Quanteneffekt beruht.

Dass die mit einem solchen Mikroskop beobachteten mikroskopischen Strukturen in einem erweiterten Sinn auch als "makroskopisch" aufgefasst werden können, besagt nur, dass sich die dabei betrachteten Eigenschaften im Rahmen einer Menge S' aus paarweise vertauschbaren Elementen darstellen lassen. Das wird allerdings nur der Fall sein für die in diesem Sinne "makroskopischen" Eigenschaften der im Mikroskop beobachteten Objekte, nicht aber z.B. für die mikroskopischen Eigenschaften der beteiligten Elektronen.

Der Zweck dieser Überlegungen besteht darin zu zeigen, dass das physikalische "tertium non datur" auch angenommen werden kann unter erweiterten Voraussetzungen, die nicht mehr nur davon abhängig sind, was für uns als makroskopische Subjekte "unmittelbar wahrnehmbar" ist. Die Annahme des physikalischen "tertium non datur" ist dabei möglich für die interessierenden Ereignisse eines Kontextes, der auf Dokumenten beruht, die in dem hier diskutierten erweiterten Sinne "makroskopisch" sind.

Die Annahme des physikalischen "tertium non datur" ist in diesem Zusammenhang stets nur zulässig in Bezug auf die interessierenden Ereignisse *eines* erweiterten makroskopischen Kontextes auf der Basis *einer* Erweiterung S' der gegebenen Menge S . Nimmt man das physikalische "tertium non datur" für mehrere derartige Kontexte zugleich an, so kann dies nicht nur zu einer Änderung des empirischen Gehalts in Bezug auf die interessierenden Ereignisse, sondern auch zu einer logisch inkonsistenten Theorie führen.

32. Allgemeine kommutative und quasi-klassische Kontexte

Wir hatten angenommen, dass die Menge S der makroskopischen Eigenschaften alle jene Eigenschaften enthält, die von makroskopischen Subjekten (wie wir es sind) unmittelbar wahrgenommen werden können. Für diese Teilmenge von \mathcal{U} ergab sich, dass je zwei ihrer Elemente miteinander vertauschbar sind. Im vorigen Kapitel haben wir S zu einer Menge S' erweitert, indem wir Eigenschaften einbezogen haben, die in diesem Sinne nicht als makroskopisch angesehen werden können.

In beiden Fällen bedeutet der Begriff der t -Zugänglichkeit, dass eine Folge von Ereignissen für ein Subjekt von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich ist. Auch der Begriff des (einfachen oder erweiterten) makroskopischen Kontextes beruht auf diesem auf Subjekte bezogenen Ansatz.

Wir können allerdings dieselben Definitionen formal auch dann vornehmen, wenn wir S ersetzen durch eine beliebige Teilmenge S'' von \mathcal{U} , welche lediglich die Bedingung erfüllt, dass je zwei ihrer Elemente miteinander vertauschbar sind. Insbesondere verzichten wir dabei auf die Voraussetzung, dass S Teilmenge von S'' sein muss.

Bemerkung: Eine solche Menge S'' kann zum Beispiel gebildet werden, indem man eine Orthonormalbasis $(b_k)_{k \in K}$ des Hilbertraums \mathcal{H} zugrunde legt. Die Indexmenge K kann dabei als Konfigurationsraum aufgefasst werden. Jeder Teilmenge A von K entspricht ein Unterraum B_A von \mathcal{H} , der definiert wird als die lineare Hülle der Menge jener Basiselemente b_k , deren Index in A liegt:

$$B_A := [\{ b_k \mid k \in A \}]$$

Es sei nun \mathcal{K} eine beliebige Menge von Teilmengen des Konfigurationsraums K . Mit

$$S'' := \{ B_A \mid A \in \mathcal{K} \}$$

erhalten wir eine Menge von Eigenschaften, die paarweise miteinander vertauschbar sind. Speziell kann \mathcal{K} mit der ganzen Potenzmenge von K übereinstimmen. In diesem Fall ist

$$S'' = \{ B_A \mid A \subset K \}$$

Auf der Basis einer derartigen Menge S'' kann das Konzept des "makroskopischen Kontextes" formal ebenso eingeführt werden wie im Fall der Menge S der makroskopischen Eigenschaften oder im Fall einer Erweiterung von S zu S' . Allerdings besteht dann im allgemeinen keinerlei Zusammenhang mehr mit der Wahrnehmbarkeit von Ereignissen durch makroskopische Subjekte. Aus

diesem Grunde wollen wir in einem solchen Fall allgemein von einem "kommutativen Kontext" sprechen.

Unter einem (allgemeinen) kommutativen Kontext verstehen wir also eine Folge von Ereignissen (E_j, t_j) , deren Indexmenge J in die Bereiche $J' = \{1, \dots, p\}$ und $J'' = \{p+1, \dots, n\}$ aufgeteilt ist. Hierzu ist eine Menge $S'' \subset \mathcal{U}$ gegeben, deren Elemente paarweise miteinander vertauschbar sind. Als Abhängigkeitsrelation können wir (nach den obigen Anmerkungen) ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Standardrelation «' annehmen, welche durch

$$j \ll' k \iff j < k \wedge j \in J' \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

definiert ist. Bezüglich dieser Relation muss die Ereignisfolge von einem Zeitpunkt $t \in T$ aus t -zugänglich sein, wobei die erforderlichen Dokumente zu S'' gehören. Dies bedeutet, dass objektiv und ohne jeden Bezug auf etwaige Subjekte gewisse Dokumentbeziehungen bestehen.

Bemerkung: Ein einfacher oder erweiterter makroskopischer Kontext ist nichts anderes als ein spezieller kommutativer Kontext.

Es sei nun ein bestimmter kommutativer Kontext (E_j, t_j) mit dem Indexbereich $J = J' \cup J''$ gegeben. Die Ereignisse (E_j, t_j) mit $j \in J'$ bilden die Voraussetzungen dieses Kontextes. Sie werden zusammen mit der Initialbedingung beschrieben durch die Grundbedingung

$$G_o := \langle UR \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle E_j, t_j \rangle_o$$

Für diesen (allgemeinen) kommutativen Kontext gilt – wie auch für jeden makroskopischen Kontext – die oben abgeleitete Schachtelungseigenschaft. Auch in diesem Fall kann man das physikalische "tertium non datur" für die Menge der interessierenden Ereignisse des Kontextes (d.h. für jene (E_j, t_j) mit $j \in J''$) annehmen, ohne dass sich der auf diese Ereignisse bezogene empirische Gehalt der um die Grundbedingung erweiterten Theorie ändert.

Diese Annahme darf auch hier stets nur für *einen* kommutativen Kontext gemacht werden. Nimmt man das physikalische "tertium non datur" zugleich für mehrere derartige Kontexte an, so kann dies zu logischen Inkonsistenzen führen. Es besteht hier eine gewisse Analogie zu anderen Fällen, in denen eine Annahme nur für bestimmte eingeschränkte Bereiche getroffen werden kann, nicht aber für alle diese Bereiche zugleich.

Analogie: Für einen beschränkten Bereich auf der Erdoberfläche kann man annehmen, dass die Fall-Linien parallel zueinander verlaufen, entsprechend der Vorstellung, die Erde sei eine "Scheibe". Unter der Voraussetzung, dass man nur vergleichsweise grobe Eigenschaften betrachtet, führt diese Annahme nicht zu einem Widerspruch zu den empirischen Befunden. Allerdings darf man die Parallelität der Fall-Linien nicht für alle derartigen Bereiche *zugleich* annehmen. Eine solche Annahme stünde im Widerspruch zu der Tatsache, dass die

Erde als ganze betrachtet die Form einer Kugel hat und die Fall-Linien auf den Mittelpunkt dieser Kugel gerichtet sind.

In analoger Weise darf man (bei gegebenem S'') das physikalische "tertium non datur" nicht für mehrere kommutative Kontexte zugleich annehmen. Erst recht darf man es nicht gleichzeitig annehmen für Kontexte, die auf verschiedenen Mengen S'' beruhen, von denen jede aus paarweise vertauschbaren Eigenschaften besteht.

Allgemein kann damit das physikalische "tertium non datur" für eine Menge von Ereignissen angenommen werden, wenn diese Ereignisse zu irgendeinem Zeitpunkt t vertauschbar dokumentiert sind. Man kann sagen, dass die Ereignisse in diesem Fall eine "kommutative Spur" zur Zeit t hinterlassen. Hierbei ist es gänzlich irrelevant, ob diese Spur von Subjekten beobachtet wird oder auch nur beobachtet werden könnte, und ob sie aus makroskopischen Eigenschaften besteht.

Solche Verhältnisse können zum Beispiel vorliegen bei der "klassischen" Bewegung eines Planetensystems während eines gewissen Zeitintervalls. Als Spur kommt etwa das durch diese Bewegung erzeugte Photonenmuster in Frage, welches (wie ein Film) durch den Schattenwurf der Planeten erzeugt wird, ganz unabhängig von der Beobachtbarkeit durch etwaige Subjekte. Auch andere reversible klassisch-mechanische Systeme können in ähnlicher Weise betrachtet werden.

Um dies näher zu beschreiben, gehen wir von einer festen Menge S'' aus und betrachten einen speziellen kommutativen Kontext, in dem die interessierenden Ereignisse in einer bestimmten Weise systematisch aufgebaut sind. Hierzu wählen wir ein sehr feines Zeitraster T' , d.h. eine Menge von Zeitpunkten der Form

$$T' := \{\tau_1, \dots, \tau_M\}$$

mit

$$\tau_m := \tau_1 + (m-1) \Delta\tau \quad (\text{für } m \in \{1, \dots, M\})$$

Ferner wählen wir zu jedem der Zeitpunkte τ_m Eigenschaften

$$S_{m,r} \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\})$$

Die Folge der interessierenden Ereignisse des Kontextes (d.h. die Folge der (E_j, t_j) mit $j \in J''$) sei so gebildet, dass sie alle Ereignisse der Form $(S_{m,r}, \tau_m)$ mit $1 \leq m \leq M$ und $1 \leq r \leq R$ aufzählt.

Die Beschreibung des Planetensystems erfolgt mit Hilfe von Orts-Impuls-Eigenschaften der Form

$$\Delta x \wedge \Delta p$$

Das Symbol x soll hier zusammenfassend für alle relevanten Ortsgrößen und p für die zugehörigen Impulse stehen. Der Ausdruck

$$\Delta x \wedge \Delta p$$

ist so zu verstehen, dass – in guter Näherung – die Ortsgröße x in einem Intervall der Länge Δx und zugleich der zugehörige Impuls p in einem Intervall der Länge Δp liegt.

Damit sich derartige Orts-Impuls-Eigenschaften in einer guten Näherung als Unterräume des Hilbertraums \mathcal{H} darstellen lassen, muss das Produkt

$$\Delta x \cdot \Delta p$$

(für jede der relevanten Größen einzeln) sehr groß sein im Vergleich zur Planck'schen Konstanten \hbar , d.h. die dargestellten Eigenschaften müssen von der Heisenberg'schen Unschärferelation "weit entfernt" sein.

Aufgrund der großen Massen der betrachteten Himmelskörper lassen sich die Orts-Impuls-Eigenschaften der Form $\Delta x \wedge \Delta p$ so bilden, dass sie in etwa einem Punkt (eigentlich: einem kleinen, mehrdimensionalen Rechteck) im klassischen Phasenraum Z_Q des betrachteten Systems entsprechen und zugleich als Unterräume von \mathcal{H} miteinander vertauschbar sind. Außerdem können sie so gewählt werden, dass eine derartige Eigenschaft, welche den Punkt (x,p) im Phasenraum Z_Q repräsentiert, im Zeitintervall $\Delta\tau$ in guter Näherung übergeht in eine andere Eigenschaft dieser Form, die einem Punkt (x',p') aus Z_Q entspricht. Zur Beschreibung des Planetensystems gehen wir davon aus, dass es sich bei den $S_{m,r}$ um Eigenschaften handelt, für die dies zutrifft.

Allgemein sprechen wir von einem "quasi-klassischen" Kontext, wenn die oben eingeführten Eigenschaften $S_{m,r}$ so gewählt sind, dass jedes $S_{m,r}$ (unter der Grundbedingung G_0 des Kontextes) im Zeitintervall $\Delta\tau$ aufgrund der Schrödingergleichung in sehr guter Näherung in die Eigenschaft $S_{m+1,r}$ (und ebenso $S_{m+1,r}$ im Zeitintervall $-\Delta\tau$ in $S_{m,r}$) übergeht. Formal ist dies genau dann der Fall, wenn unter den durch G_0 gegebenen Voraussetzungen zwischen den Ereignissen $(S_{m,r}, \tau_m)$ und $(S_{m+1,r}, \tau_{m+1})$ eine Dokumentbeziehung besteht.

Bemerkung: In einem anschaulichen Sinne kann man vor allem dann von einem quasi-klassischen Kontext sprechen, wenn (für festes m) die Eigenschaften $S_{m,r}$ mit $1 \leq r \leq R$ einen bestimmten zusammenhängenden Teilbereich des klassischen Phasenraums vollständig abdecken, und wenn sich das betrachtete System unter den durch die Grundbedingung G_0 gegebenen Voraussetzungen zum Zeitpunkt τ_m mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit innerhalb dieses Teilbereichs befindet.

Bemerkung: Für festes r stellt die Ereignisfolge der $S_{m,r}$ mit $1 \leq m \leq M$ näherungsweise einen Pfad im klassischen Phasenraum des betrachteten Systems dar.

Im Falle eines quasi-klassischen Kontextes kann man, wie bei jedem kommutativen Kontext, das physikalische "tertium non datur" für alle interessierenden Ereignisse annehmen. Unter der Voraussetzung der Grundbedingung G_0 erhält man dann die Aussage, dass das mögliche Ereignis

$$(S_{m,r}, \tau_m)$$

mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit genau dann eintritt, wenn auch

$$(S_{m+1,r}, \tau_{m+1})$$

eintritt. Formal gilt hier (mit $G := G_0 \cap \Omega$) die Beziehung:

$$\nu(\langle S_{m,r}, \tau_m \rangle \leftrightarrow \langle S_{m+1,r}, \tau_{m+1} \rangle \mid G \wedge N) \approx 1$$

wobei

$$N := \forall_{j \in J} [\langle E_j, t_j \rangle \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle]$$

die Annahme des physikalischen "tertium non datur" darstellt (siehe dazu T.32.1).

Dies bedeutet, dass sich das System – unter der Grundbedingung des quasi-klassischen Kontextes – annähernd so verhält, wie es die klassische Mechanik beschreibt, d.h. als eine reversibel-deterministische Bewegung im klassischen Phasenraum.

Auf diese Weise können klassisch-mechanische Systeme im Rahmen eines quasi-klassischen Kontextes quantenmechanisch beschrieben werden. Dabei kann – ebenso wie bei der Beschreibung im klassisch-mechanischen Modelluniversum – das physikalische "tertium non datur" angenommen werden, ohne dass dies einen zusätzlichen empirischen Gehalt liefert. Damit ist die klassische Mechanik makroskopischer Systeme zu verstehen als ein Randfall der Quantentheorie.

Anders als im Fall der klassischen Mechanik, wo die Annahme des physikalischen "tertium non datur" allgemein möglich ist, muss sich diese Annahme allerdings im Falle der quantentheoretischen Beschreibung eines klassisch-mechanischen Systems auf einen bestimmten quasi-klassischen Kontext beschränken.

Das physikalische "tertium non datur" kann (sowohl im klassischen als auch im quantentheoretischen Fall) lediglich *angenommen* und nicht etwa aus empirischen Befunden abgeleitet werden. Dies stellt allerdings keinen Mangel der Theorie dar. Es entspricht vielmehr der allgemeinen Tatsache, dass Naturgesetze stets nur angenommen und empirisch niemals "bewiesen", sondern allenfalls widerlegt werden können (Induktionsproblem).

33. Die Realität dokumentierter Ereignisse

Wir wollen in diesem Kapitel davon ausgehen, dass sich das alltägliche Denken eines makroskopischen Subjekts im Rahmen eines makroskopischen Kontextes abspielt. Dabei handelt es sich um eine Folge t-zugänglicher Ereignisse

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

deren Indexbereich $\{1, \dots, n\}$ aufgeteilt ist in die Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

und

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

wobei J' den Voraussetzungen des Kontextes und J'' der Menge der interessierenden Ereignisse entspricht.

Die t-Zugänglichkeit besagt insbesondere, dass es zu jedem der interessierenden Ereignisse (E_k, t_k) zum Zeitpunkt t ein Dokument (F_k, t) gibt, für welches unter den Voraussetzungen des Kontextes eine bedingte Dokumentbeziehung besteht.

Mit den Definitionen

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für alle } j \in \{1, \dots, n\})$$

$$D_k := U_{-t} F_k \quad (\text{für alle } k \in J'')$$

sowie

$$L := \pi_{A_p} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

bedeutet dies formal, dass für alle $k \in J''$ die Gleichung

$$(*) \quad \pi_{A_k} L = \pi_{D_k} L$$

gilt.

Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass es im allgemeinen nicht möglich ist, aufgrund der Theorie von den Voraussetzungen des Kontextes und dem Vorhandensein des Dokuments auf das dokumentierte Ereignis zu schließen. Mit der Grundbedingung

$$G_0 := \langle UR \rangle_0 \wedge \forall_{j \in J'} \langle E_j, t_j \rangle_0$$

folgt aus der Gleichung (*) im allgemeinen *nicht* (vergleiche T.33.1):

$$\square_{AX} (G_0 \wedge \langle F_k, t \rangle_0 \rightarrow \langle E_k, t_k \rangle_0)$$

Es lässt sich hingegen zeigen, dass aus (*) die Aussage

$$\Box_{AX}(G_o \wedge \langle F_k, t \rangle_o \rightarrow \neg \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_o)$$

folgt (siehe T.33.2). Mit anderen Worten: Wenn die Dokumentbeziehung (*) besteht, so kann von den Voraussetzungen des Kontextes und dem Vorhandensein des Dokuments mittels der Theorie darauf geschlossen werden, dass das "physikalische Gegenteil" des dokumentierten Ereignisses *nicht* eintritt.

Wir haben nun allerdings gezeigt, dass das physikalische "tertium non datur" im Rahmen eines (fest gegebenen) makroskopischen Kontextes als gültig angenommen werden kann, ohne dass dies den empirischen Gehalt der Theorie (bezogen auf diesen Kontext) ändert.

Das physikalische "tertium non datur" erlaubt gerade den Schluss von $\neg \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_o$ auf $\langle E_k, t_k \rangle_o$. Unter den Voraussetzungen des Kontextes kann man daher, sofern das Dokument $\langle F_k, t \rangle$ gegeben ist, auch die Realität des dokumentierten Ereignisses $\langle E_k, t_k \rangle$ annehmen.

Wie zuvor lässt sich das Konzept des "Makroskopischen" hier verallgemeinern, indem man eine beliebige Teilmenge S' von \mathcal{U} aus paarweise vertauschbaren Elementen wählt, die S umfasst. Damit können Ereignisse einbezogen werden, deren Dokumente in dem gegebenen Kontext nicht makroskopisch sind.

Für einen auf einer derartigen Menge S' basierenden Kontext lässt sich ebenfalls das physikalische "tertium non datur" annehmen. Auch unter den Voraussetzungen eines solchen erweiterten Kontextes kann man daher, sofern ein Dokument $\langle F_k, t \rangle$ mit $F_k \in S'$ gegeben ist, die Realität des dokumentierten Ereignisses $\langle E_k, t_k \rangle$ annehmen.

Diese Überlegungen zeigen, dass man (unter den Voraussetzungen eines einfachen oder erweiterten makroskopischen Kontextes) im Falle des Vorhandenseins eines Dokuments stets die Realität des dokumentierten Ereignisses annehmen kann. Wurde zum Beispiel ein Geschehen mit einer Filmkamera aufgezeichnet und liegt der Film als Dokument dieses Geschehens vor, so kann die Realität des in diesem Film Dargestellten angenommen werden.

Dies betrifft auch die Aufzeichnung von Ereignissen, die nicht makroskopisch sind, wenn etwa ein Ion in einer Ionenfalle beobachtet wird oder Kristallstrukturen mit entsprechenden Apparaturen sichtbar gemacht werden.

So ist es zu verstehen, dass die Realität des mit Hilfe einer Apparatur Aufgezeichneten bzw. Gemessenen normalerweise widerspruchsfrei angenommen werden kann.

Problematisch kann diese Annahme immer erst dann werden, wenn es im Rahmen eines untersuchten Themenkomplexes nicht mehr möglich ist, alle betrachteten Ereignisse auf der Basis einer Menge S' aus paarweise vertausch-

baren Unterräumen von \mathcal{H} in einem erweiterten makroskopischen Kontext darzustellen. Erst in diesem Fall treten die quantentheoretischen Besonderheiten in Erscheinung und man kann die Realität des "Gemessenen" nicht mehr ohne weiteres annehmen.

34. Makroskopische Experimente

In diesem Kapitel wollen wir uns der Frage zuwenden, wie die Durchführung und Auswertung von Experimenten im Rahmen der Quantentheorie zu beschreiben ist. Dabei muss es sich nicht um typische "Quantenexperimente" handeln. Unter einem makroskopischen Experiment verstehen wir hier ein Experiment, das von einem makroskopischen Subjekt zu einem Zeitpunkt t ausgewertet werden kann. Das hauptsächliche Ziel dieses Kapitels besteht darin zu zeigen, wie sich auf der Algebra der möglichen Ergebnisse eines solchen Experiments ein Kolmogoroff'sches Wahrscheinlichkeitsmaß definieren lässt, das diese Ergebnisse korrekt beschreibt.

Wenn die Ergebnisse eines Experiments von einem makroskopischen Subjekt ausgewertet werden sollen, muss sich das Experiment im Rahmen eines makroskopischen Kontextes abspielen. Wir legen daher hier eine t -zugängliche Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

zugrunde sowie eine Abhängigkeitsrelation \ll auf dem Indexbereich

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Mit t ist dabei der Zeitpunkt gemeint, an dem die Auswertung des Experiments erfolgt. Die Indexmenge J sei aufgeteilt in die beiden Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

und es gelte:

$$\forall_{k \in J''} \forall_{j \ll k} j \in J'$$

Damit ist der makroskopische Kontext festgelegt.

Zu den Voraussetzungen des Experiments gehören zunächst die allgemeinen Voraussetzungen des Kontextes. Die im Rahmen des Experiments darüber hinaus interessierenden (und vom auswertenden Subjekt zu beobachtenden) Ereignisse gliedern sich nochmals in zwei Teile: die weiteren (speziellen) Voraussetzungen und die möglichen Ergebnisse des Experiments. Sie alle gehören zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes, also zu der Menge

$$\{ (E_j, t_j) \mid j \in J'' \}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Menge der interessierenden Ereignisse des betrachteten Kontextes ausschließlich aus den speziellen Voraussetzungen und den möglichen Ergebnissen des Experiments besteht, denn wenn man zu einem gegebenen makroskopischen Kontext innerhalb der interessierenden Ereignisse eine Teilfolge bildet und den

Kontext darauf beschränkt, so erhält man trivialerweise wiederum einen makroskopischen Kontext im oben definierten Sinne.

Aufgrund dieser Annahme kann die Indexmenge J nun weiter aufgeteilt werden in die Teilbereiche

$$J^v := \{p+1, \dots, q\}$$

und

$$J^e := \{q+1, \dots, n\}$$

Dabei sind

$$(E_{p+1}, t_{p+1}), \dots, (E_q, t_q)$$

die speziellen Voraussetzungen und

$$(E_{q+1}, t_{q+1}), \dots, (E_n, t_n)$$

die möglichen Ergebnisse des Experiments.

Wir setzen

$$\begin{aligned} K' &:= J' \cup J^v \\ &= \{1, \dots, q\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K'' &:= J^e \\ &= \{q+1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Da für alle $k \in K''$ und $j \ll k$ gilt:

$$\begin{aligned} j &\in J' \\ &\subset K' \end{aligned}$$

ergibt die neue Aufteilung von J in K' und K'' wiederum einen makroskopischen Kontext. Zu den Voraussetzungen dieses Kontextes gehören neben den allgemeinen Voraussetzungen des ursprünglichen Kontextes auch die speziellen Voraussetzungen des Experiments. Die interessierenden Ereignisse des neu gebildeten Kontextes sind die möglichen Ergebnisse des Experiments.

Typischerweise sind die möglichen Ergebnisse eines Experiments gegliedert in mehrere Alternativen. Dies wollen wir nun formal darstellen. Es bezeichne R die Anzahl der Alternativen und zu jedem $r \in \{1, \dots, R\}$ sei S_r die Anzahl der möglichen Ausprägungen der r -ten Alternative. Wenn das Experiment beispielsweise darin besteht, dass ein Würfel zufällig auf einen Tisch geworfen wird, dessen Oberfläche in zwei Teilbereiche unterteilt ist, so haben wir zwei Alternativen. Die erste gibt an, welche Zahl der Würfel zeigt, und die zweite beschreibt, in welchen der beiden Teilbereiche er gefallen ist. In diesem Beispiel ist folglich $R = 2$, $S_1 = 6$ und $S_2 = 2$.

Als Indexbereich für die möglichen Ergebnisse des Experiments definieren wir

$$D := \{ (r,s) \mid r \in \{1,\dots,R\} \wedge s \in \{1,\dots,S_r\} \}$$

Jedem Paar $(r,s) \in D$ entspricht genau ein Element der Folge

$$(E_{q+1}, t_{q+1}), \dots, (E_n, t_n)$$

Es sei

$$k : D \rightarrow K''$$

diejenige bijektive Abbildung, die dies beschreibt: Zu jedem $(r,s) \in D$ sei $(E_{k(r,s)}, t_{k(r,s)})$ das interessierende Ereignis des Kontextes, welches (r,s) entspricht. Zur Abkürzung setzen wir:

$$E_{rs} := E_{k(r,s)}$$

$$t_{rs} := t_{k(r,s)}$$

Mit diesen Definitionen erhalten wir die folgende Beschreibung eines Experiments: Es ist

$$\{ (E_j, t_j) \mid j \in K' \}$$

die Menge aller Voraussetzungen, unter denen das Experiment abläuft. Dazu gehören sowohl die allgemeinen Voraussetzungen des ursprünglich angenommenen makroskopischen Kontextes als auch die speziellen Voraussetzungen des Experiments. Ferner ist

$$\{ (E_{rs}, t_{rs}) \mid (r,s) \in D \}$$

die Menge der möglichen experimentellen Ergebnisse. Sie ist aufgrund der Bijektion $k : D \rightarrow K''$ identisch mit der Menge

$$\{ (E_k, t_k) \mid k \in K'' \}$$

Die gesamte Ereignisfolge

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

ist t -zugänglich unter der Abhängigkeitsrelation \ll auf der Indexmenge $J = \{1, \dots, n\}$, wobei t den Zeitpunkt der Auswertung des Experiments angibt. Die Relation \ll erfüllt die Bedingung:

$$\forall (r,s) \in D \quad \forall_j \ll_{j \ll k(r,s)} j \in K'$$

Damit stellt die Folge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ mit der Aufteilung der Indexmenge J in die beiden Teilbereiche $K' = \{1, \dots, q\}$ und $K'' = \{q+1, \dots, n\}$ einen makroskopischen Kontext dar.

Wir definieren

$$\mathcal{B} := \{ \beta : \{1, \dots, R\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_r \beta(r) \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

als die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen. Jedes $\beta \in \mathcal{B}$ ordnet jeder Alternative genau eine der möglichen Ausprägungen zu. \mathcal{B} ist das kartesische Produkt der Indexmengen $\{1, \dots, S_r\}$, d.h. es gilt:

$$\mathcal{B} = \times_r \{1, \dots, S_r\}$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Schreibweisen ein:

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in J)$$

$$A_{rs} := U_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Für alle $(r,s) \in D$ gilt dann

$$A_{rs} = A_{k(r,s)}$$

wobei k die oben eingeführte Bijektion von D nach K ist.

Wie zuvor können wir das Ereignis (E_j, t_j) mit dem möglichen Faktum

$$\langle E_j, t_j \rangle$$

identifizieren und wegen

$$\langle E_j, t_j \rangle = \langle A_j \rangle$$

kurz von "dem Ereignis" $\langle A_j \rangle$ sprechen. Ebenso steht $\langle A_{rs} \rangle$ für das Ereignis (E_{rs}, t_{rs}) .

Nachdem wir beschrieben haben, wie ein Experiment im Rahmen eines makroskopischen Kontextes dargestellt werden kann, wollen wir nun einige mögliche Fakten diskutieren, die für die weitere Betrachtung des Experiments von Bedeutung sind.

Durch die Definition

$$G := \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K} \langle A_j \rangle$$

fassen wir alle Voraussetzungen des Experiments zu einem möglichen Faktum $G \in \mathcal{A}$ zusammen. G kann als Grundbedingung des betrachteten Experiments bezeichnet werden.

Ferner definieren wir:

$$N := \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

Dieses mögliche Faktum beschreibt, dass zu jeder Alternative mindestens eine Ausprägung realisiert ist. Nur wenn das mögliche Faktum N eingetreten ist, ist das Experiment erfolgreich abgeschlossen worden.

Wir definieren weiterhin das mögliche Faktum

$$M := \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Es beschreibt, dass zu einer Alternative niemals zugleich zwei verschiedene Ausprägungen realisiert sein können.

Mit der Definition

$$Q := N \wedge M$$

erhalten wir die Gleichung:

$$Q = \forall_r \exists_s^1 \langle A_{rs} \rangle \quad (\text{vgl. T.34.1})$$

Das mögliche Faktum Q beschreibt also, dass zu jeder Alternative genau eine Ausprägung realisiert ist.

Zu jeder Ergebniskonstellation $\beta \in \mathcal{B}$ definieren wir

$$N_\beta := \forall_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle$$

Das mögliche Faktum N_β gibt an, dass zu jeder Alternative die durch β festgelegte Ausprägung realisiert ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass gilt:

$$N = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} N_\beta \quad (\text{vgl. T.34.2})$$

Wir setzen ferner

$$Q_\beta := N_\beta \wedge M \quad (\text{für } \beta \in \mathcal{B})$$

Es ist dann

$$Q_\beta = \forall_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle] \quad (\text{vgl. T.34.3})$$

Das mögliche Faktum Q_β gibt also an, dass zu jeder Alternative nur die durch β festgelegte Ausprägung realisiert ist und keine andere. Es gilt:

$$Q = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} Q_\beta$$

Die Q_β sind paarweise disjunkt (vgl. T.34.4), und somit ist Q die disjunkte Vereinigung der Q_β .

Wir wollen nun voraussetzen, dass sich (zu festem r) die verschiedenen $\langle A_{rs} \rangle$ unter der Bedingung G gegenseitig ausschließen. Hierzu machen wir die Annahme

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \hat{\Diamond} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Sie drückt aus, dass unter der Grundbedingung des Experiments die beiden Ereignisse $\langle A_{rs} \rangle$ und $\langle A_{rs'} \rangle$ (mit $s \neq s'$) nicht gemeinsam eintreten können. Die

Bedingung (EX1) ist äquivalent zu der Inklusion:

$$G \subset M \quad (\text{vgl. T.34.5})$$

Für jede experimentelle Alternative möchten wir außerdem fordern, dass unter der Voraussetzung G stets mindestens eine der Ausprägungen $\langle A_{rs} \rangle$ realisiert wird. Dies wäre zu formulieren als

$$(EX2') \quad \forall_r \neg \hat{\diamond} (G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle)$$

und diese Forderung wäre äquivalent zu:

$$G \subset N \quad (\text{vgl. T.34.6})$$

In unserer Theorie, in der das physikalische "tertium non datur" nicht vorausgesetzt wird, stellt (EX2') jedoch eine zu starke Forderung dar. Sie wäre im wesentlichen nur dann erfüllt, wenn schon G unmöglich wäre, d.h. wenn $G = \emptyset$ gelten würde (vgl. T.34.7).

Wegen $\langle (A_{rs})^\perp \rangle \subset \neg \langle A_{rs} \rangle$ impliziert (EX2') die schwächere, aber realistische Forderung

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \hat{\diamond} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Sie ist äquivalent zu:

$$G \subset \forall_r \exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle \quad (\text{vgl. T.34.8})$$

Diese Forderung besagt, dass unter der Bedingung G zu jeder Alternative (also zu jedem r) stets für mindestens eine Ausprägung (also für ein s) gilt: Zum Zeitpunkt t_{rs} ist die zu E_{rs} "physikalisch entgegengesetzte" Eigenschaft $(E_{rs})^\perp$ nicht gegeben.

Wäre (EX2) nicht erfüllt, so könnte der Fall eintreten, dass für eine der Alternativen gilt: Zu allen möglichen Ausprägungen (E_{rs}, t_{rs}) ist das "physikalische Gegenteil" $((E_{rs})^\perp, t_{rs})$ realisiert. Zu dieser Alternative könnte dann, da sich E_{rs} und $(E_{rs})^\perp$ gegenseitig ausschließen, keine der möglichen Ausprägungen mehr realisiert sein. Aus diesem Grunde ist (EX2) ebenso wie (EX1) eine selbstverständliche Forderung an ein Experiment. Wir gehen daher im folgenden von den beiden Annahmen (EX1) und (EX2) aus.

Bemerkung: In dem speziellen Fall, dass für jede der Alternativen (d.h. für jedes r) zum einen die Ereignisse (E_{rs}, t_{rs}) gleichzeitig sind, d.h. mit einem $t_r \in T$ für alle s die Gleichung $t_{rs} = t_r$ gilt, und zum andern die Eigenschaften E_{rs} mit $s \in \{1, \dots, S_r\}$ paarweise orthogonal sind, gilt die Bedingung (EX1) trivialerweise (vgl. T.34.9). Mit

$$E_r := \bigoplus_s E_{rs}$$

und

$$A_r := U_{-t_r} E_r$$

genügt in diesem Fall die Annahme

$$(EX2") \quad \forall_r \neg \hat{\diamond}(G \wedge \langle (A_r)^\perp \rangle)$$

um auf (EX2) schließen zu können (vgl. T.34.10).

Nach der Einführung abkürzender Bezeichnungen für bestimmte mögliche Fakten und der Annahme der beiden Bedingungen (EX1) und (EX2) wenden wir uns nun dem Hauptziel dieses Kapitels zu, der Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Algebra der möglichen Ergebnisse des Experiments. Als Vorbereitung hierzu benötigen wir eine Aussage, die für beliebige Teilmengen $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ den Wert des Ausdrucks

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta)$$

angibt. Zur Formulierung dieser Aussage brauchen wir einige weitere Definitionen.

Wie zuvor führen wir zunächst die Menge der "Belegungen" auf der Indexmenge J ein. Eine solche Belegung ordnet jedem Element von J entweder einen der beiden Werte 0 und 1 oder aber "gar keinen" Wert zu. Hierzu erinnern wir an die Definition:

$$\mathcal{W} := \{ \sigma : J \rightarrow \{0,1,\emptyset\} \mid \forall_{k \in J} [\sigma(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{j \ll k} \sigma(j) = 1] \}$$

Zu jeder Ergebniskonstellation $\beta \in \mathcal{B}$ sei σ_β dasjenige Element von \mathcal{W} , für welches gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta(j) &= 1 && \text{für alle } j \in K' \\ \sigma_\beta(k(r,s)) &= 1 && \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s = \beta(r) \\ \sigma_\beta(k(r,s)) &= 0 && \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s \neq \beta(r) \end{aligned}$$

Damit ist σ_β diejenige Belegung, welche alle Voraussetzungen mit 1 belegt und zu jeder Alternative diejenige Ausprägung mit 1 belegt, welche durch β vorgegeben ist, während alle anderen Ausprägungen mit 0 belegt werden.

Bemerkung: Die Abbildung, welche jedes β auf σ_β abbildet, ist offenbar injektiv.

Wie zuvor definieren wir für alle $j \in J$:

$$\begin{aligned} A_{j;1} &:= A_j \\ A_{j;0} &:= (A_j)^\perp \\ A_{j;\emptyset} &:= \mathcal{H} \end{aligned}$$

sowie

$$M_\sigma := \bigcap_{j \in J} A_{j; \sigma(j)} \quad (\text{für alle } \sigma \in \mathcal{W})$$

$$M^\wedge := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_\sigma$$

Bemerkung: Aufgrund der Konstruktion von σ_β und der Definition von M_σ gilt für alle $\beta \in \mathcal{B}$:

$$M_{\sigma_\beta} = \bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap \{ A_{rs} \mid (r,s) \in D \wedge s = \beta(r) \} \\ \cap \bigcap \{ (A_{rs})^\perp \mid (r,s) \in D \wedge s \neq \beta(r) \}$$

Unter Verwendung der oben angegebenen Definitionen kann für jedes $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gezeigt werden:

$$(*) \quad \mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} \text{tr } \pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR}$$

Wir skizzieren im folgenden den Beweis dieser Aussage.

Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}$ sei

$$\mathcal{W}_\beta := \{ \sigma \in \mathcal{W} \mid \forall_{j \in K'} \sigma(j) = 1 \wedge \forall_r \sigma(k(r, \beta(r))) = 1 \}$$

Es handelt sich um alle jene Belegungen σ , welche jeder Voraussetzung den Wert 1 zuordnen, und die darüber hinaus – zu jeder Alternative – derjenigen Ausprägung, die durch β vorgegeben wird, ebenfalls den Wert 1 zuordnen, die also zu β "passen". Es gilt dann offenbar:

$$\sigma_\beta \in \mathcal{W}_\beta.$$

Zu jeder Teilmenge $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ sei außerdem

$$\mathcal{W}_{\mathcal{B}'} := \bigcup \{ \mathcal{W}_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

die Menge der Belegungen, die zu mindestens einem der $\beta \in \mathcal{B}'$ passen.

Für jedes $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ kann dann die Aussage

$$(**) \quad \mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} \text{tr } \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$$

gezeigt werden (vgl. T.34.13).

Der Beweis der Aussage (**) macht zunächst von der Schachtelungseigenschaft Gebrauch. Es werden paarweise vertauschbare Unterräume B_j und C_j von \mathcal{H} definiert mit

$$B_j < A_j < C_j$$

bzw. (mit $B_{rs} := B_{k(r,s)}$ und $C_{rs} := C_{k(r,s)}$)

$$B_{rs} < A_{rs} < C_{rs}$$

Für diese Unterräume lässt sich unter anderem zeigen (vgl. T.34.11 und T.34.12):

$$\bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}'} (\bigcap_{j \in K'} B_j \cap \bigcap_r B_{r,\beta(r)}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_{\sigma}$$

sowie

$$\bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}'} (\bigcap_{j \in K'} C_j \cap \bigcap_r C_{r,\beta(r)}) = (\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_{\sigma}) \oplus (M^{\wedge})^{\perp}$$

Zum Beweis von (***) wird außerdem die in Kapitel 23 über die Definition des äußeren Maßes μ angegebene Aussage (§) benutzt, nach der für paarweise vertauschbare $F_{rs} < \mathcal{H}$ sowie $UR < \mathcal{H}$ gilt:

$$\mu(\langle UR \rangle \wedge \exists_r \forall_s \langle F_{rs} \rangle) = \text{tr}(\pi_{\bigoplus_r \bigcap_s F_{rs}} \pi_{UR})$$

Bemerkung: Die Bedingungen (EX1) und (EX2) werden für den Beweis der Aussage (***) nicht benötigt.

Aufgrund der Bedingung (EX1) lässt sich nun zeigen (T.34.14):

$$\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'} \wedge \sigma \notin \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \} \Rightarrow \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} = 0$$

Eine leicht zu beweisende Aussage ist außerdem (T.34.15):

$$\mathcal{W}_{\mathcal{B}'} \cap \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \} = \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

Damit kann von der Gleichung (***) auf (*) geschlossen werden, und der Beweis der Aussage (*) ist abgeschlossen (QED).

Unter Verwendung der Aussage (*) wollen wir nun ein bedingtes Möglichkeitsmaß auf der Algebra aller möglichen experimentellen Ergebnisse einführen und zeigen, dass dieses Möglichkeitsmaß die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes hat.

Mit den Definitionen

$$q_{\beta} := \text{tr} \pi_{M_{\sigma_{\beta}}} \pi_{UR} \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

und

$$\bar{q} := \sum_{\beta \in \mathcal{B}} q_{\beta}$$

lässt sich die Aussage (*) schreiben als (vgl. T.34.16):

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_{\beta}) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_{\beta} \quad (\text{für alle } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B})$$

und mit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ erhalten wir als Korollar:

$$\mu(G \wedge N) = \bar{q}$$

Wenn wir nun setzen

$$p_\beta := q_\beta / \bar{q}$$

so gilt

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} p_\beta = 1$$

und wir erhalten die Beziehung (vgl. T.34.17):

$$\mu(\exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta \mid G \wedge N) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta \quad (\text{für alle } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B})$$

Die darin enthaltene Bedingung $G \wedge N$ gibt an, dass alle Voraussetzungen des Experiments gegeben sind, und dass zu jeder Alternative mindestens ein Ergebnis herausgekommen und somit das Experiment erfolgreich abgeschlossen worden ist.

Wir definieren mit

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A}(\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \})$$

die von der Menge der möglichen Ergebnisse des Experiments erzeugte Teilalgebra von \mathcal{A} . Man kann \mathcal{A}_e als die Algebra der experimentellen Ergebnisse bezeichnen. Speziell sind die möglichen Fakten M , N und N_β Elemente von \mathcal{A}_e .

Auf \mathcal{A}_e definieren wir

$$\mu_e(A) := \mu(A \mid G \wedge N) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

Die Funktion μ_e ist die Beschränkung des bedingten Möglichkeitsmaßes $\mu(\mid G \wedge N)$ auf die Teilalgebra \mathcal{A}_e und somit selbst ein Möglichkeitsmaß, welches auf $G \wedge N$ und (wegen $G \subset M$ sowie $M \wedge N = Q$) erst recht auf Q konzentriert ist.

Q ist die disjunkte Vereinigung der $N_\beta \wedge Q$ (vgl. T.34.18). Ferner gilt:

$$\mu_e(\exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta \quad (\text{für alle } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B})$$

Aus diesem Grunde ist μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}_e (siehe T.34.19). Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist eindeutig festgelegt durch die Bedingung:

$$\mu_e(N_\beta) = p_\beta \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

Wir haben also festgestellt: Beschränkt man das durch $G \wedge N$ bedingte Möglichkeitsmaß $\mu(\mid G \wedge N)$ auf die Algebra \mathcal{A}_e der experimentellen Ergebnisse, so erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dies ist das zentrale Resultat des vorliegenden Kapitels. Hierbei ist es von entscheidender Bedeutung, dass es

sich bei den möglichen experimentellen Ergebnissen ($E_{r_s, t_{r_s}}$) um t-zugängliche Ereignisse handelt.

Bemerkung: Wir können auf \mathcal{A}_e neben dem Möglichkeitsgrad μ_e auch den Notwendigkeitsgrad ν_e definieren durch:

$$\nu_e(A) := 1 - \mu_e(\neg A) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

Da μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt in diesem speziellen Fall:

$$\nu_e = \mu_e$$

Der Wert der Größen p_β , durch die das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_e festgelegt ist, kann folgendermaßen angegeben werden: Es sei

$$\begin{aligned} W_1 &:= \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \cdots \pi_{A_q} \\ W &:= W_1 / \text{tr } W_1 \end{aligned}$$

Der Operator W fasst die experimentellen Voraussetzungen zusammen. Er hat die Eigenschaften eines sogenannten "statistischen Operators". Wir erhalten (vgl. T.34.26 (a)):

$$p_\beta = \text{tr } \pi_{A_1, \beta(1)} \cdots \pi_{A_R, \beta(R)} W \pi_{A_R, \beta(R)} \cdots \pi_{A_1, \beta(1)}$$

Die Reihenfolge der Faktoren $\pi_{A_r, \beta(r)}$ ist dabei beliebig wählbar. Es gilt außerdem:

$$p_\beta = \text{tr } \pi_{\cap_r A_r, \beta(r)} W \quad (\text{vgl. T.34.26 (b)})$$

Der Beweis dieser Aussagen über den Wert von p_β stützt sich auf die folgenden Tatsachen:

1) Die Gleichung

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = \pi_\sigma \pi_{UR}$$

gilt nicht nur für $\sigma \in \mathcal{W}$, sondern auch für alle

$$\begin{aligned} \sigma &\in \mathcal{W}' \\ &:= \{ \sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\} \mid \forall_k [\sigma(k) \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{j \ll k} \sigma(j) = 1] \} \end{aligned}$$

(vergleiche T.34.20).

2) Aufgrund von (EX1) kann man aus dem Produkt

$$\pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR} = \pi_{A_n, \sigma_\beta(n)} \cdots \pi_{A_1, \sigma_\beta(1)} \pi_{UR}$$

alle Faktoren $\pi_{A_k, \sigma_\beta(k)}$ mit $k \in K$ und $\sigma_\beta(k) = 0$ herausstreichen (vgl. T.34.22).

- 3) Wenn B_1, \dots, B_m eine beliebige Teilfolge von A_{q+1}, \dots, A_n ist, so kann man in dem Ausdruck

$$\pi_{B_1} \dots \pi_{B_m} \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

die Reihenfolge der B_i beliebig ändern (vgl. T.34.21).

- 4) Für $W_1 := \{ \sigma \in \mathcal{W} \mid \forall_{j \in K} \sigma(j) = 1 \}$ gilt

$$\sum_{\sigma \in W_1} \pi_\sigma = \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \quad (\text{vgl. T.34.23})$$

- 5) Es ist

$$\pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} = \pi_{\bigcap_{j \in K} A_j} \pi_{UR} \quad (\text{vgl. T.34.24})$$

- 6) Es gilt

$$\bar{q} = \text{tr } W_1 \quad (\text{vgl. T.34.25})$$

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang herstellen zu dem Wahrscheinlichkeitsmodell im Sinne von Kolmogoroff. Das Standardmodell für den Fall des betrachteten Experiments ist gegeben durch:

$$\Omega_k := \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A}_k := \emptyset(\mathcal{B})$$

Ω_k ist die Menge der möglichen Ergebniskonstellationen und \mathcal{A}_k die Potenzmenge von Ω_k . Unser Ziel ist die Angabe des passenden Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$.

Um dies zu erreichen setzen wir

$$\Omega_1 := Q$$

und definieren mit

$$\mathcal{A}_1 := \{ A \cap \Omega_1 \mid A \in \mathcal{A}_e \}$$

die Spuralgebra von \mathcal{A}_e auf Ω_1 . Auf \mathcal{A}_1 definieren wir das entsprechende Möglichkeitsmaß durch

$$\mu_1(A \cap \Omega_1) := \mu_e(A) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

Da μ_e auf $\Omega_1 = Q$ konzentriert ist, ist auch μ_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und es gilt:

$$\mu_1(Q_\beta) = p_\beta \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

Da Ω_1 die disjunkte Vereinigung der Q_β ist, können wir

$$F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_k$$

definieren als die (eindeutig bestimmte) Abbildung, die (für alle $\beta \in \mathcal{B}$) jedem $\omega \in Q_\beta$ den Wert β zuordnet. Dies ist eine messbare Abbildung von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$.

Durch

$$\mu_k(A) := \mu_1(F^{-1}(A)) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_k)$$

wird in der üblichen Weise ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_k auf $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ induziert. Hierfür gilt:

$$\mu_k(\{\beta\}) = p_\beta \quad (\text{für } \beta \in \mathcal{B})$$

Damit ist auf dem (Kolmogoroff'schen) Standardmodell für das betrachtete Experiment ein Wahrscheinlichkeitsmaß festgelegt.

Anmerkung

Die Beweise zu den Theoremen T.34.13, T.34.16 und T.34.25 werden in Kapitel B34 nur für den Fall geführt, dass $\dim \text{UR} < \infty$ ist. Sie lassen sich jedoch leicht so abändern, dass sie auch für den Fall $\dim \text{UR} = \infty$ gelten. Dazu muss man im wesentlichen nur alle Terme der Form

$$\text{tr } X \pi_{\text{UR}}$$

durch die entsprechenden Terme

$$|X \pi_{\text{UR}}|^2$$

ersetzen. In analoger Weise sind im vorliegenden Kapitel die Aussagen über das äußere Maß μ sowie die Definition der q_β umzuformulieren, damit sie auch für den Fall $\dim \text{UR} = \infty$ gelten. Im folgenden Kapitel werden wir allerdings begründen, warum es sinnvoll ist, generell von der Annahme $\dim \text{UR} < \infty$ auszugehen.

Bemerkung: Auch die Beweise zu den Theoremen T.30.7 und T.30.13 müssen in dieser Weise umformuliert werden, wenn sie auch für den Fall $\dim \text{UR} = \infty$ gelten sollen.

Zusammenfassung

Wir haben ein Experiment, das von einem makroskopischen Subjekt auswertbar sein soll, beschrieben durch eine t-zugängliche Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

mit einer Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Die Indexmenge wird unterteilt in K' und K'' , so dass

$$\{ (E_j, t_j) \mid j \in K' \}$$

alle Voraussetzungen des Experiments und

$$\{ (E_j, t_j) \mid j \in K'' \}$$

die möglichen experimentellen Ergebnisse beschreibt. Es wird angenommen, dass gilt:

$$\forall_{k \in K''} \forall_{j \ll k} j \in K'$$

Die experimentellen Ergebnisse lassen sich gliedern in R Alternativen mit jeweils S_r Ausprägungen. Hierzu wird die Menge

$$D := \{ (r, s) \mid r \in \{1, \dots, R\} \wedge s \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

eingeführt und mittels einer Bijektion

$$k : D \rightarrow K''$$

mit K'' identifiziert. Es werden für $j \in J$ bzw. $(r, s) \in D$ die Bezeichnungen

$$E_{rs} := E_{k(r,s)}$$

$$t_{rs} := t_{k(r,s)}$$

$$A_j := \bigcup_{-t_j} E_j$$

$$A_{rs} := \bigcup_{-t_{rs}} E_{rs}$$

eingeführt. Außerdem wird mit

$$\mathcal{B} := \{ \beta : \{1, \dots, R\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_r \beta(r) \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen definiert.

Ferner werden die speziellen möglichen Fakten

$$G := \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

$$N := \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

$$N_\beta := \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle \quad (\text{zu jedem } \beta \in \mathcal{B})$$

definiert. G stellt alle Voraussetzungen des Experiments dar. N beschreibt, dass zu jeder Alternative mindestens eine der Ausprägungen realisiert ist. N_β drückt aus, dass zu jeder Alternative die durch die Belegung β vorgegebene Ausprägung realisiert ist.

Wir setzen voraus, dass sich (zu festem r) die verschiedenen $\langle A_{rs} \rangle$ unter der Bedingung G gegenseitig ausschließen:

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \hat{\Delta} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Ferner setzen wir zu jeder Alternative voraus, dass unter der Bedingung G nicht für jede Ausprägung das "physikalische Gegenteil" gegeben ist:

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \hat{\Delta} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Auf der durch

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A} (\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \})$$

definierten Algebra der möglichen Ergebnisse des Experiments wird mit

$$\mu_e(A) := \mu (A \mid G \wedge N) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

ein bedingtes Möglichkeitsmaß festgelegt.

Es zeigt sich, dass μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Mit

$$W_1 := \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \cdots \pi_{A_q}$$

und

$$W := W_1 / \text{tr } W_1$$

gilt für alle $\beta \in \mathcal{B}$:

$$\mu_e(N_\beta) = \text{tr } \pi_{A_1, \beta(1)} \cdots \pi_{A_R, \beta(R)} W \pi_{A_R, \beta(R)} \cdots \pi_{A_1, \beta(1)}$$

Durch diese Beziehung ist μ_e bereits eindeutig festgelegt. Die Reihenfolge der Faktoren $\pi_{A_r, \beta(r)}$ ist dabei beliebig wählbar. Der Operator W fasst die experimentellen Voraussetzungen zusammen und hat die Eigenschaften eines statistischen Operators.

Im Sinne von Kolmogoroff ist das Wahrscheinlichkeitsmodell des Experiments standardmäßig zu bilden als

$$(\Omega_k, \mathcal{A}_k) := (\mathcal{B}, \wp(\mathcal{B}))$$

Von μ_e lässt sich ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf diesem Modell ableiten.

35. Zur Endlichkeit der Initialeigenschaft

Im letzten Kapitel haben wir den statistischen Operator

$$W := W_1 / \text{tr } W_1$$

mit

$$(*) \quad W_1 := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \dots \pi_{A_q}$$

definiert, wobei $\langle A_1 \rangle, \dots, \langle A_q \rangle$ die Voraussetzungen eines Experiments darstellen.

Diese Definition ist allerdings nur dann möglich, wenn der Ausdruck $\text{tr } W_1$ einen endlichen und positiven Wert hat. Der Fall $\text{tr } W_1 = 0$ kann hier ausgeschlossen werden, denn aus dieser Gleichung folgt mit Hilfe der Schachtelungseigenschaft sowie der Axiome MON und SEC die Aussage

$$\neg \hat{\diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_j \langle A_j \rangle) \quad (\text{vgl. T.35.1})$$

Sie besagt, dass unter der Bedingung $\langle UR \rangle$ die Voraussetzungen $\langle A_j \rangle$ nicht alle zugleich eintreten können. Für realisierbare Experimente hängt daher die Definierbarkeit des statistischen Operators W allein davon ab, ob $\text{tr } W_1$ endlich ist.

Die Bedingung $\text{tr } W_1 < \infty$ ist nur dann für beliebige A_j und UR erfüllt, wenn der zugrundeliegende Hilbertraum \mathcal{H} endlich-dimensional ist. Ist hingegen $\dim \mathcal{H} = \infty$, so hängt es von der Initialeigenschaft UR und den jeweiligen Voraussetzungen $\langle A_j \rangle$ ab, ob sich der statistische Operator W in sinnvoller Weise definieren lässt.

Es ist in der Tat möglich anzunehmen, dass \mathcal{H} endliche Dimension hat. Dem liegt die allgemeine Tatsache zugrunde, dass man bei der physikalischen Modellierung der Realität grundsätzlich auch ohne unendliche Strukturen auskommen kann. Dies betrifft sowohl das unendlich Große als auch das unendlich Kleine.

Immer wenn sich das Universum darstellen lässt mit einem unendlich ausgedehnten, kontinuierlichen Modell, so kann man es stattdessen auch modellieren mit einer endlichen und diskreten Struktur. Wählt man diese Struktur ausreichend groß und zugleich extrem fein, so wird das unendliche Modell hierdurch in einer solchen Weise approximiert, dass der Unterschied zwischen den beiden Modellierungen empirisch ohne Bedeutung ist. Dies gilt völlig unabhängig davon, ob man die klassische Mechanik oder die Quantentheorie betrachtet.

Ob z.B. der Raum tatsächlich unendlich ausgedehnt ist oder ob er nur sehr groß, aber endlich ist, kann grundsätzlich nicht mit empirischen Mitteln entschieden werden. Allenfalls lässt sich feststellen, dass der Raum mindestens

eine bestimmte Ausdehnung haben muss, d.h. es lässt sich eine untere Grenze für seine Größe angeben.

Entsprechendes gilt für das unendlich Kleine: Es lässt sich empirisch nicht entscheiden, ob der Raum tatsächlich kontinuierlich aufgebaut ist oder ob es sich um eine sehr feine Gitterstruktur handelt.

Unendlichkeit, sei es im Großen oder im Kleinen, ist somit grundsätzlich kein feststellbares Attribut des realen Universums (d.h. der "Welt an sich"), sondern lediglich eine mögliche Eigenschaft unseres Modells.

Um zu zeigen, wie sich dies auf die Quantentheorie anwenden lässt, betrachten wir zunächst ein einfaches System aus einem einzelnen (spinfreien) "Teilchen", das sich nur in einer Richtung bewegen kann. Die Modellierung erfolgt hier mittels des separablen Hilbertraums

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi(x)|^2 dx < \infty \}$$

Man kann den "Raum", in dem sich das "Teilchen" bewegt, hier also die Menge \mathbb{R} , beschränken auf ein Normierungsvolumen

$$V := [-C, C]$$

mit einem sehr großen Wert C (man denke z.B. an $C = 10^{1000}$ Lichtjahre). Dies führt zu dem Unterraum

$$\mathcal{H}_C := \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \forall_{x \notin V} \varphi(x) = 0 \}$$

Er besteht aus denjenigen Funktionen aus \mathcal{H} , die außerhalb des Normierungsvolumens den Wert Null haben. In diesem Unterraum gibt es mit

$$\varphi_k(x) := e^{2\pi i \cdot kx/2C} / \sqrt{2C} \quad (\text{für } x \in V \text{ und } k \in \mathbb{Z})$$

eine Orthonormalbasis $(\varphi_k)_k$ aus Vektoren, die mit großer Genauigkeit den Impuls $p_k = k \cdot 2\pi\hbar/2C$ darstellen (vgl. T.35.2). Die Beschränkung des Raumes führt hier also zu einer Diskretisierung des Impulses. Je größer das Normierungsvolumen gewählt wird, desto feiner kann der Impuls dargestellt werden.

Beschränkt man nun auch den Impuls auf ein sehr großes Intervall $[-D, D]$, indem man den Index k auf das Intervall $[-K, K]$ mit $K := 2CD/2\pi\hbar$ einschränkt, so erhält man mit

$$\mathcal{H}_{CD} := [\varphi_{-K}, \dots, \varphi_K]$$

einen endlich-dimensionalen Unterraum von \mathcal{H} . (D sollte hier so gewählt werden, dass K ganzzahlig wird.) Da hierdurch die in Abhängigkeit von x besonders schnell variierenden Funktionen φ_k ausgeschlossen werden, führt die Beschränkung des Impulses praktisch zu einer Diskretisierung des Raumes. Genau genommen wird durch eine Modellierung mittels \mathcal{H}_{CD} aber nicht der Raum

selbst beschränkt und diskretisiert, sondern nur die Menge der modellierbaren Eigenschaften des Universums eingeschränkt.

In \mathcal{H}_{CD} lässt sich das Verhalten des "Teilchens" mit großer Genauigkeit darstellen. Hierzu kann der Hamiltonoperator H_{CD} auf \mathcal{H}_{CD} in Analogie zu dem auf \mathcal{H} definierten Operator H gebildet werden. Wenn C und D ausreichend groß gewählt werden, lässt sich die Dynamik des Systems über einen großen Zeitraum, z.B. für $t \in [0, T]$ mit $T = 10^{12}$ Jahren, so genau beschreiben, dass sich empirisch kein Unterschied zu der Beschreibung mittels \mathcal{H} und H feststellen lässt.

In analoger Weise kann man auch vorgehen im Fall mehrerer "Teilchen", die sich im dreidimensionalen Raum bewegen. In der Quantenmechanik kann somit die physikalische Realität immer auch im Rahmen eines endlich-dimensionalen Hilbertraums modelliert werden. In diesem Fall hat der Ausdruck $\text{tr } W_1$ für Operatoren der Form (*) stets einen endlichen Wert.

Das beschriebene Vorgehen hat allerdings mehrere Nachteile. Zum einen ist die endliche, diskrete Modellierung wenig elegant. Die Wahl der Parameter C und D erfolgt in einer willkürlichen Weise, da man stets auch noch viel größere Werte für C und D annehmen könnte. Zum andern fehlen der Theorie gewisse Symmetrien, z.B. die Translationsinvarianz gegenüber Verschiebungen des räumlichen Koordinatensystems.

Im Vergleich zu einem endlichen und diskreten Modell führt ein unendliches Modell zu einer mathematischen Abrundung der Theorie (besser gesagt: zu einer "Aufrundung"). Der Vorteil der Verwendung des Unendlichen (insbesondere des unendlich Kleinen) liegt vor allem darin, dass die mathematische Behandlung in diesem Grenzfall oftmals einfacher wird. Es werden "analytische" Lösungswege eröffnet, die bei einer diskreten Modellierung nicht gangbar wären. In einem endlichen und diskreten Modell wäre man hingegen auf numerische Rechnungen angewiesen, die aufgrund ihres Umfangs in der Praxis oft gar nicht bewältigt werden könnten.

Aus diesen Gründen bevorzugt man, wo immer es möglich ist, ein unendliches und kontinuierliches Modell, auch wenn es aus empirischer Sicht hierfür keinen Anlass gibt. Z.B. verwendet man im Fall von N (spinfreien) Teilchen im dreidimensionalen Raum sinnvollerweise den unendlich-dimensionalen (separablen) Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi(x)|^2 dx < \infty \}$$

Die Beschreibung des Universums mit einem Hilbertraum unendlicher Dimension hat dann allerdings zur Folge, dass der Ausdruck $\text{tr } W_1$ für Operatoren der Form (*) den Wert ∞ annehmen kann.

Es bietet sich hier die folgende Alternative an: Um sicherzustellen, dass der Ausdruck $\text{tr } W_1$ stets endlich ist, genügt es anzunehmen, dass UR als Unterraum

von \mathcal{H} endliche Dimension hat. Mit anderen Worten: Es genügt die Annahme der Endlichkeit der Initialeigenschaft.

Inhaltlich ist diese Annahme praktisch gleichwertig mit der Aussage, dass die Orte und Impulse aller "Teilchen" des Universums zum Zeitpunkt 0 annähernd auf einen endlichen Bereich eingeschränkt waren. (Dies beruht darauf, dass jeder Vektor im Hilbertraum \mathcal{H} sowohl in der Ortsdarstellung als auch in der Impulsdarstellung quadratisch integrabel ist.) Die Annahme der Endlichkeit der Initialbedingung entspricht im wesentlichen auch der Aussage, dass die Materie zur Zeit 0 nahezu auf einen beschränkten Raumbereich konzentriert und ihre Gesamtenergie ebenfalls beschränkt war. Wegen

$$\dim U_t \text{UR} = \dim \text{UR}$$

gilt dies auch für jeden anderen Zeitpunkt t .

Die Initialbedingung $\langle \text{UR} \rangle$ hat also nun zwei Funktionen: Zum einen drückt sie aus, dass die Entropie des Universums zur Zeit 0 niedrig war. Zum andern stellt sie sicher, dass der Ausdruck $\text{tr } W_1$ für Operatoren der Form (*) stets endlich bleibt. Damit macht sie es möglich, dass die Modellierung des Universums im Rahmen eines unendlich-dimensionalen Hilbertraums erfolgen kann, ohne dass hierbei unendliche Werte für $\text{tr } W_1$ auftreten können. Man kann also bei der Vorstellung eines unendlichen und kontinuierlichen Raumes bleiben und muss nur davon ausgehen, dass die Materie räumlich beschränkt ist und darüber hinaus eine beschränkte Gesamtenergie aufweist.

Bemerkung: Die Initialbedingung führt stets zu einem Bruch der Translationssymmetrie in Bezug auf die Zeitachse. Wenn UR endlich-dimensional ist, so führt sie außerdem zu einem Bruch der Translationssymmetrie bezüglich des Raumes.

Anmerkung

Ganz entsprechende Überlegungen sind für die klassische Mechanik erforderlich, da sich hier ebenfalls Quotienten mit unendlichem Nenner ergeben können. Auch hier besteht ein möglicher Lösungsweg darin, die Orte und Impulse aller Teilchen auf endliche Intervalle zu beschränken. Man erhält auf diese Weise einen Phasenraum $Z' \subset \mathbb{R}^{6N}$ mit endlichem Lebesguemaß, d.h. mit

$$\lambda(Z') < \infty$$

Mit N wird hierbei die Anzahl aller Teilchen im Universum bezeichnet.

Das Bewegungsgesetz muss dazu entsprechend angepasst werden, so dass seine Anwendung nicht aus diesem eingeschränkten Phasenraum hinausführt. Wenn die Beschränkungen ausreichend groß gewählt werden, könnte man (sofern die klassische Mechanik überhaupt eine korrekte Theorie wäre) alle interessierenden Vorgänge so genau darstellen, dass ein Unterschied zur unendlichen Modellierung (mit dem Phasenraum $Z = \mathbb{R}^{6N}$) empirisch nicht feststellbar

ist. Mit diesem Vorgehen wäre sichergestellt, dass keine unendlichen Werte in dem zu $\text{tr } W_1$ analogen Ausdruck

$$(**) \quad \int (\mathbf{1}_{A_q} \cdots \mathbf{1}_{A_1} \mathbf{1}_{UR} \mathbf{1}_{A_1} \cdots \mathbf{1}_{A_q}) d\lambda$$

auftreten können. Zu jeder Menge $A \subset Z$ wird hier mit $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion bezeichnet, und der Ausdruck (**) lässt sich vereinfachen zu

$$\lambda(\bigcap_j A_j \cap UR)$$

Besser ist es aber auch im Falle der klassischen Mechanik, die Modellierung mit dem unendlichen Phasenraum Z beizubehalten und stattdessen die Endlichkeit der Initialeigenschaft, d.h. $\lambda(UR) < \infty$ anzunehmen. Die Initialbedingung hat dann auch in diesem Fall eine doppelte Funktion: Einerseits stellt sie die geringe Entropie zum Zeitpunkt 0 dar, und andererseits sorgt sie dafür, dass das Auftreten unendlicher Werte für Ausdrücke der Form (**) ausgeschlossen ist. Die Forderung $\lambda(UR) < \infty$ lässt sich hier wiederum begründen mit der Annahme, dass die Materie zur Zeit 0 auf einen endlichen Raumbereich konzentriert war und eine beschränkte Gesamtenergie hatte. Wegen

$$\lambda(\beta_t(UR)) = \lambda(UR) \quad (\text{Liouville'scher Satz})$$

kommt es nicht darauf an, für welchen Zeitpunkt wir dies annehmen.

Zusammenfassung

Um sicherzustellen, dass sich die bei der Beschreibung von Experimenten benötigten Ausdrücke (beispielsweise der statistische Operator W) sinnvoll definieren lassen, können wir zur Modellierung des Universums einen Hilbertraum \mathcal{H} verwenden, der endliche Dimension hat. Hierzu kann man z.B. den Raum als eine endliche und diskrete Struktur auffassen.

Es gibt keine empirischen Gründe, die gegen diese Annahme sprechen. Allerdings ergeben sich hieraus verschiedene Nachteile (geringe Eleganz der Theorie, Willkür bei der Wahl des Modells, Fehlen von Symmetrien, Nichtverfügbarkeit bestimmter analytischer Rechenverfahren).

Besser ist es daher, das Universum im Sinne einer mathematischen Abrundung mit einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum zu modellieren und lediglich die Endlichkeit der Initialeigenschaft, d.h. $\dim UR < \infty$ anzunehmen. Dies reicht aus, um die Definierbarkeit der benötigten Ausdrücke sicherzustellen. Der Raum bleibt in diesem Fall unendlich und kontinuierlich. Es wird lediglich angenommen, dass die Materie (zu jedem Zeitpunkt) im wesentlichen auf einen endlichen Raumbereich konzentriert ist und außerdem eine beschränkte Gesamtenergie aufweist.

Entsprechende Überlegungen gelten für den Fall der klassischen Mechanik.

36. Das additive Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem Experiment

Im vorletzten Kapitel haben wir beschrieben, wie Experimente formal darzustellen sind, die sich im Rahmen eines makroskopischen Kontextes abspielen. Dabei bezeichnete G das mögliche Faktum, das sämtliche Voraussetzungen des Experiments gegeben sind, und N drückte aus, dass zu jeder experimentellen Alternative mindestens eine Ausprägung realisiert ist. Dazu haben wir dann festgestellt: Die Beschränkung des bedingten Möglichkeitsmaßes $\mu(|G \wedge N)$ auf die Algebra der experimentellen Ergebnisse führt zu einem (additiven) Wahrscheinlichkeitsmaß μ_e .

In einem früheren Kapitel hatten wir hingegen ausgeführt, dass der Möglichkeitsgrad im allgemeinen nicht additiv sein muss, dass vielmehr die Additivität des üblicherweise verwendeten Konzepts der "Wahrscheinlichkeit" auf der Gleichsetzung mit dem Limes relativer Häufigkeiten beruht.

In diesem Kapitel wollen wir nun diskutieren, wie sich auf der Algebra \mathcal{A}_e der möglichen Ergebnisse eines Experiments eine (bedingte) "Wahrscheinlichkeit" im Sinne eines Limes relativer Häufigkeiten (d.h. der Häufigkeitsgrad) definieren lässt mittels

$$P(B | G \wedge N) = p \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\#B_m / N \notin [p - \delta, p + \delta] | \forall m \leq N (G_m \wedge N_m)) = 0$$

Dabei ist $B \in \mathcal{A}_e$ ein mögliches Faktum, und zu einer unendlichen Folge unabhängiger Wiederholungen des Experiments sind B_m , G_m und N_m die möglichen Fakten, welche B , G bzw. N entsprechen. Mit $\#B_m$ wird die Anzahl derjenigen Fälle innerhalb der ersten N Wiederholungen des Experiments bezeichnet, bei denen das fragliche Faktum B_m eingetreten ist.

Bei der Definition des Häufigkeitsgrades $P(|G \wedge N)$ auf der Basis des Möglichkeitsgrades μ geht es uns darum zu zeigen, dass sich der Häufigkeitsgrad auf der ganzen Algebra \mathcal{A}_e definieren lässt und dass er – im Kolmogoroff'schen Sinne – ein "Wahrscheinlichkeitsmaß" auf \mathcal{A}_e ist. Letzteres gilt unabhängig von der Tatsache, dass μ_e selbst schon die Eigenschaften eines additiven Wahrscheinlichkeitsmaßes hat. So würden wir z.B. denselben Häufigkeitsgrad $P(|G \wedge N)$ erhalten, wenn wir μ durch $\mu^{1/2}$ und somit μ_e durch $(\mu_e)^{1/2}$ ersetzen würden. Dabei ist $(\mu_e)^{1/2}$ im Gegensatz zu μ_e nicht additiv. Die Additivität von μ_e ist demnach für die Definierbarkeit von $P(|G \wedge N)$ nicht entscheidend.

Vorausgesetzt wird eine t-zugängliche Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

sowie eine Abhängigkeitsrelation « auf dem Indexbereich

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Die Indexmenge J sei aufgeteilt in die Teilbereiche

$$K' := \{1, \dots, q\} \quad (\text{Voraussetzungen des Experiments})$$

und

$$K'' := \{q+1, \dots, n\} \quad (\text{mögliche Ergebnisse})$$

und es gelte:

$$\forall_{k \in K''} \forall_{j \ll k} j \in K'$$

Die möglichen Ergebnisse des Experiments seien wiederum gegliedert in R Alternativen mit S_r möglichen Ausprägungen in der r-ten Alternative (zu jedem $r \in \{1, \dots, R\}$). Es sei:

$$D := \{ (r,s) \mid r \in \{1, \dots, R\} \wedge s \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

und

$$k : D \rightarrow K''$$

die bijektive Abbildung, welche die beiden Indexbereiche D und K'' miteinander identifiziert. Zur Abkürzung seien:

$$E_{rs} := E_{k(r,s)} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

$$t_{rs} := t_{k(r,s)} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

$$A_j := \bigcup_{t_j} E_j \quad (\text{für } j \in J)$$

$$A_{rs} := \bigcup_{t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Wir definieren die Grundbedingung

$$G := \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

und gehen wie zuvor von den Annahmen

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \Diamond (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

und

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \Diamond (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

aus. Ferner definieren wir

$$N := \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

sowie die Algebra der möglichen Ergebnisse

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A}(\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \})$$

und hierauf das bedingte Möglichkeitsmaß

$$\mu_e(A) := \mu(A \mid G \wedge N) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

Wie schon früher diskutiert, wollen wir die Wiederholungen des Experiments nicht innerhalb des realen Universums, sondern in vorgestellten Paralleluniversen modellieren. Dies stellt eine Idealisierung dar, mit der wir die völlige Unabhängigkeit der Experimente erreichen. Außerdem können auf diese Weise unendlich viele Wiederholungen genau desselben Experiments dargestellt werden. Wir denken uns dazu (zu jedem $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$) das \mathbf{N} -Multiversum als eine \mathbf{N} -fache Kopie des realen Universums.

Der Hilbertraum dieses \mathbf{N} -Multiversums ist das \mathbf{N} -fache Tensorprodukt von \mathcal{H} mit sich selbst:

$$\mathcal{H}^{\mathbf{N}} := \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$$

Zur Beschreibung physikalisch unabhängiger Bewegungen definieren wir den unitären Operator

$$U_t^{\mathbf{N}} := U_t \otimes \dots \otimes U_t \quad (\text{mit } \mathbf{N} \text{ Faktoren})$$

Dabei ist allgemein das Tensorprodukt von Operatoren L_m gegeben durch:

$$(L_1 \otimes \dots \otimes L_{\mathbf{N}})(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{\mathbf{N}}) := L_1 \varphi_1 \otimes \dots \otimes L_{\mathbf{N}} \varphi_{\mathbf{N}}$$

Bemerkung: Für alle $m \leq \mathbf{N}$ können wir setzen:

$$H_m := I \otimes \dots \otimes I \otimes H \otimes I \otimes \dots \otimes I$$

wobei der Faktor H an der m -ten Stelle steht und I den Einheitsoperator auf \mathcal{H} bezeichnet. Mit

$$H^{\mathbf{N}} := \sum_m H_m$$

können wir dann den Operator der Gesamtenergie des \mathbf{N} -Multiversums definieren. In $H^{\mathbf{N}}$ sind keine Wechselwirkungsterme enthalten. Es gilt die Gleichung:

$$U_t^{\mathbf{N}} = e^{-itH^{\mathbf{N}}/\hbar} \quad (\text{vgl. T.36.1})$$

Demnach ist $U_t^{\mathbf{N}}$ der zu $H^{\mathbf{N}}$ in der üblichen Weise gebildete unitäre Operator.

Als Initialeigenschaft im \mathbf{N} -Multiversum verwenden wir naheliegenderweise:

$$\begin{aligned} UR^{\mathbf{N}} &:= UR \otimes \dots \otimes UR \\ &< \mathcal{H}^{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

Zu jedem $A < \mathcal{H}$ und $m \leq \mathbf{N}$ definieren wir:

$$\alpha_m(A) := \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes A \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$$

wobei der Faktor A an der m -ten Stelle des Produkts steht. Damit wird jede Eigenschaft A des m -ten Paralleluniversums dargestellt als eine Eigenschaft des \mathbf{N} -Multiversums.

Bemerkung: Wir konstruieren das \mathbf{N} -Multiversum, um die völlige Unabhängigkeit der Experimente modellieren und den Limes für $\mathbf{N} \rightarrow \infty$ problemlos bilden zu können. Beides wäre innerhalb des realen Universums in einem präzisen Sinne nicht möglich. Da wir uns aber eigentlich für den Fall einer sehr großen Anzahl (nahezu) unabhängiger Wiederholungen des Experiments im realen Universum interessieren, und da wir es darin mit *einer* Initialbedingung UR zu tun haben, müssen wir auch im \mathbf{N} -Multiversum von einer einzigen Initialbedingung $UR^{\mathbf{N}}$ ausgehen. Wir können also z.B. nicht setzen:

$$UR_m := \alpha_m(UR)$$

und dann die Bedingung

$$\langle UR_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle UR_{\mathbf{N}} \rangle$$

verwenden. Dies liefe darauf hinaus, getrennte Initialbedingungen in jedem der Paralleluniversen anzunehmen. Ein solches Vorgehen würde der Konzeption unserer Theorie nicht entsprechen.

Bemerkung: Die angegebene Definition von $UR^{\mathbf{N}}$ ist naheliegend, da sie zu einem Unterraum von $\mathcal{H}^{\mathbf{N}}$ führt, der symmetrisch ist bzgl. jeder beliebigen Permutation der Paralleluniversen.

Wir definieren:

$$\begin{aligned} E_{m,j} &:= \alpha_m(E_j) && (\text{für } j \in J) \\ E_{m,rs} &:= \alpha_m(E_{rs}) && (\text{für } (r,s) \in D) \\ A_{m,j} &:= \alpha_m(A_j) && (\text{für } j \in J) \\ A_{m,rs} &:= \alpha_m(A_{rs}) && (\text{für } (r,s) \in D) \end{aligned}$$

Damit gelten:

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= U_{-t_j}^{\mathbf{N}} E_{m,j} && (\text{für } j \in J) \\ A_{m,rs} &= U_{-t_{rs}}^{\mathbf{N}} E_{m,rs} && (\text{für } (r,s) \in D) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir gehen von der Annahme aus, dass die Experimente in allen Paralleluniversen zur selben Zeit ablaufen. Unsere Überlegungen könnten aber auch unabhängig von dieser Annahme durchgeführt werden.

Die Menge der Eigenschaften des Multiversums ist

$$\mathcal{U}^{\mathbf{N}} := \{ A \mid A < \mathcal{H}^{\mathbf{N}} \}$$

Hierzu lassen sich in voller Analogie zu unserer bisherigen Theorie bilden:

$\mathcal{E}^{\mathbf{N}}$	(Menge der möglichen Ereignisse)
$\Omega_0^{\mathbf{N}}$	(Menge der möglichen Weltabläufe)
$\langle A, t \rangle_0^{\mathbf{N}}$	(ein mögliches Ereignis als Teilmenge von $\Omega_0^{\mathbf{N}}$)
$\mathcal{A}_0^{\mathbf{N}}$	(Menge der möglichen Fakten)
$AX^{\mathbf{N}}$	(die deterministischen Axiome SG, MON und SEC)
$\Omega^{\mathbf{N}}$	(Menge der physikalisch möglichen Weltabläufe)
$\langle A, t \rangle^{\mathbf{N}}$	(ein mögliches Ereignis als Teilmenge von $\Omega^{\mathbf{N}}$)
$\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$	(Menge der möglichen Fakten, modelliert in $\Omega^{\mathbf{N}}$)
$\mu^{\mathbf{N}}$	(das auf $\mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ definierte Möglichkeitsmaß)

Die makroskopischen Eigenschaften des \mathbf{N} -Multiversums sind gegeben durch:

$$\mathcal{S}^{\mathbf{N}} := \{ \alpha_m(S) \mid m \leq \mathbf{N} \wedge S \in \mathcal{S} \}$$

Es handelt sich dabei einfach um die makroskopischen Eigenschaften aller enthaltenen Paralleluniversen. Damit ist auch klar, wann im \mathbf{N} -Multiversum eine Dokumentbeziehung besteht und wann eine Folge von Ereignissen t -zugänglich ist.

Bemerkung: Mit \mathcal{S} ist auch $\mathcal{S}^{\mathbf{N}}$ eine Menge paarweise vertauschbarer Unterräume.

Die Ereignisse $(E_{m,j}, t_j)$ können in *einer* Folge dargestellt werden:

$$(E_{1,1}, t_1), \dots, (E_{\mathbf{N},1}, t_1), \dots, (E_{1,n}, t_n), \dots, (E_{\mathbf{N},n}, t_n)$$

Die Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge

$$\mathbf{J}^{\mathbf{N}} := \{(1,1), \dots, (\mathbf{N},1), \dots, (1,n), \dots, (\mathbf{N},n)\}$$

ist gegeben durch

$$(x,j) \ll (y,k) \Leftrightarrow (x = y) \wedge (j \ll k)$$

für $x, y \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ und $j, k \in \mathbf{J}$. Mit den Teilbereichen

$$(\mathbf{K}')^{\mathbf{N}} := \{(1,1), \dots, (\mathbf{N},1), \dots, (1,q), \dots, (\mathbf{N},q)\}$$

und

$$(\mathbf{K}'')^{\mathbf{N}} := \{(1,q+1), \dots, (\mathbf{N},q+1), \dots, (1,n), \dots, (\mathbf{N},n)\}$$

haben wir einen makroskopischen Kontext im Sinne der früheren Definition (vgl. T.36.2).

Bemerkung: Wenn wir uns vorstellen, dass ein Subjekt die Experimente beobachtet oder beobachten könnte, so muss dieses Subjekt Zugang zu sämtlichen

Paralleluniversen haben. Dies ist aber auch plausibel, da es sich bei der Zusammensetzung des \mathbf{N} -Multiversums aus unabhängigen Paralleluniversen um eine bloße Idealisierung handelt. Tatsächlich finden Wiederholungen von Experimenten im Rahmen eines makroskopischen Kontextes im realen Universum statt.

Bemerkung: Wegen

$$\langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}} = \langle E_{m,j,t_j} \rangle^{\mathbf{N}} \quad (\text{für } m \leq \mathbf{N} \wedge j \in J)$$

und

$$\langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} = \langle E_{m,rs,t_{rs}} \rangle^{\mathbf{N}} \quad (\text{für } m \leq \mathbf{N} \wedge (r,s) \in D)$$

können wir die betrachteten Ereignisse wie zuvor auch mit $\langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}}$ bzw. $\langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}$ bezeichnen.

Die Algebra der möglichen Ergebnisse aller betrachteten Experimente im \mathbf{N} -Multiversum ist:

$$\mathcal{A}_e^{\mathbf{N}} := \mathcal{A}(\{ \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \mid m \leq \mathbf{N} \wedge (r,s) \in D \})$$

Es handelt sich dabei um eine Mengenalgebra auf $\Omega^{\mathbf{N}}$.

In Analogie zu G und N definieren wir zu jedem $m \leq \mathbf{N}$ zwei mögliche Fakten:

$$G_m := \langle UR^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_{j \in K} \langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}}$$

beschreibt die Voraussetzungen des Experiments im m -ten Paralleluniversum, und

$$N_m := \bigvee_r \exists_s \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}$$

beschreibt, dass bei dem Experiment im m -ten Paralleluniversum zu jeder Alternative mindestens eine Ausprägung realisiert ist und das Experiment insofern erfolgreich abgeschlossen wurde.

Es seien

$$G^{\mathbf{N}} := \bigvee_m G_m$$

sowie

$$N^{\mathbf{N}} := \bigvee_m N_m$$

und für alle $A \in \mathcal{A}_e^{\mathbf{N}}$ sei

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(A) := \mu^{\mathbf{N}}(A \mid G^{\mathbf{N}} \wedge N^{\mathbf{N}})$$

Man kann die in den Paralleluniversen durchgeführten Einzelexperimente zu einem Gesamtexperiment im \mathbf{N} -Multiversum zusammenfassen. Wenn wir hier-

auf die Aussagen des vorletzten Kapitels anwenden, so erhalten wir, dass $\mu_e^{\mathbf{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist (vgl. T.36.3).

Wir betrachten nun ein mögliches Faktum $B \in \mathcal{A}_e$ des realen Universums. Die möglichen Fakten der Form

$$\bigvee_{(r,s) \in D'} \langle A_{rs} \rangle \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D'} \neg \langle A_{rs} \rangle \quad (\text{mit } D' \subset D)$$

sind paarweise disjunkte Elemente von \mathcal{A}_e . Die nicht leeren Elemente dieser Form sind die atomaren Elemente der Mengenalgebra \mathcal{A}_e . Das mögliche Faktum B kann in eindeutiger Weise als disjunkte Vereinigung derartiger (nicht leerer) atomarer Elemente dargestellt werden:

$$B = \exists_u [\bigvee_{(r,s) \in D_u} \langle A_{rs} \rangle \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D_u} \neg \langle A_{rs} \rangle]$$

Dabei sind die D_u paarweise verschiedene Teilmengen von D .

Analog zu dieser Darstellung von B setzen wir für alle $m \leq \mathbf{N}$:

$$B_m := \exists_u [\bigvee_{(r,s) \in D_u} \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D_u} \neg \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}]$$

Das mögliche Faktum B_m (des \mathbf{N} -Multiversums) entspricht der Aussage, dass B im m -ten Paralleluniversum eingetreten ist. Für alle $m \leq \mathbf{N}$ gilt offenbar:

$$B_m \in \mathcal{A}_e^{\mathbf{N}}$$

Für $k \in \{0, \dots, \mathbf{N}\}$ sei

$$\mathcal{F}_k := \{ F \subset \{1, \dots, \mathbf{N}\} \mid \#F = k \}$$

und

$$\text{ANZ}_k := \exists_{F \in \mathcal{F}_k} [\bigvee_{m \in F} B_m \wedge \bigvee_{m \notin F} \neg B_m]$$

Dieses mögliche Faktum im \mathbf{N} -Multiversum beschreibt, dass genau k der Ereignisse B_m eingetreten sind. Damit kann das mögliche Faktum, dass die relative Häufigkeit

$$\#B_m / \mathbf{N}$$

nicht in das Intervall $[p-\delta, p+\delta]$ fällt, formal dargestellt werden als

$$\text{ANZ}_{\mathbf{N}, p, \delta} := \bigcup \{ \text{ANZ}_k \mid k \in \{0, \dots, \mathbf{N}\} \text{ und } k/\mathbf{N} \notin [p-\delta, p+\delta] \}$$

Wir setzen nun

$$p := \mu_e(B)$$

Es kann dann gezeigt werden, dass gilt:

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(B_m) = p \quad (\text{für } m \leq \mathbf{N}, \text{ vgl. T.36.4})$$

Für jede Teilfolge m_1, \dots, m_u von $1, \dots, \mathbf{N}$ gilt außerdem (siehe T.36.5):

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(B_{m_1} \wedge \dots \wedge B_{m_u}) = \mu_e^{\mathbf{N}}(B_{m_1}) \cdot \dots \cdot \mu_e^{\mathbf{N}}(B_{m_u})$$

Demnach sind die B_m unter $\mu_e^{\mathbf{N}}$ unabhängig und gleich wahrscheinlich (vgl. T.36.6). Da $\mu_e^{\mathbf{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, können die bekannten Gesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet werden. So kann der Wert von $\mu_e^{\mathbf{N}}(\text{ANZ}_{\mathbf{N},p,\delta})$ mit der Binomialverteilung bestimmt werden. Mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen folgt dann:

$$\forall_{\delta > 0} \lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} \mu_e^{\mathbf{N}}(\text{ANZ}_{\mathbf{N},p,\delta}) = 0 \quad (\text{vgl. T.36.7})$$

Es gilt also

$$\forall_{\delta > 0} \lim_{\mathbf{N} \rightarrow \infty} \mu_e^{\mathbf{N}}(\text{ANZ}_{\mathbf{N},p,\delta} \mid \forall_{m \leq \mathbf{N}} (G_m \wedge N_m)) = 0$$

Im Sinne der Definition der "Wahrscheinlichkeit" als Limes relativer Häufigkeiten (d.h. des Häufigkeitsgrades) ist daher

$$\begin{aligned} P(B \mid G \wedge N) &= p \\ &= \mu_e(B) \end{aligned}$$

Mit

$$P_e(B) := P(B \mid G \wedge N) \quad (\text{für alle } B \in \mathcal{A}_e)$$

wird der gesuchte, auf ganz \mathcal{A}_e definierte Häufigkeitsgrad angegeben, welcher die Ergebnisse des betrachteten Experiments beschreibt. Hierfür gilt:

$$P_e = \mu_e$$

und es handelt sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß im üblichen Sinne.

Wie zuvor sei

$$\mathcal{B} := \{ \beta : \{1, \dots, R\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_r \beta(r) \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen. Außerdem sei

$$W_1 := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \dots \pi_{A_q}$$

und es sei

$$W := W_1 / \text{tr } W_1$$

der statistische Operator, der die Voraussetzungen des Experiments zusammenfasst. Wegen $P_e(N_\beta) = p_\beta$ (wobei N_β und p_β wie im vorletzten Kapitel definiert sind) gilt dann für alle $\beta \in \mathcal{B}$:

$$(+)\quad P_e(\forall_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle) = \text{tr } \pi_{A_1,\beta(1)} \dots \pi_{A_R,\beta(R)} W \pi_{A_R,\beta(R)} \dots \pi_{A_1,\beta(1)}$$

Dies entspricht der Aussage, die wir auch nach dem bekannten Formalismus der Quantentheorie zu erwarten hätten. Die Reihenfolge der Faktoren $\pi_{A_{r,\beta(r)}}$ in der Gleichung (+) ist dabei beliebig wählbar. Selbst wenn die Eigenschaften $E_{r,\beta(r)}$ makroskopisch und daher miteinander vertauschbar sind, brauchen die $A_{r,\beta(r)}$ im allgemeinen nicht vertauschbar zu sein, da die Ereignisse $(E_{r,\beta(r)}, t_{r,\beta(r)})$ zu verschiedenen Zeitpunkten stattfinden können. Die Vertauschbarkeit der Faktoren in der Gleichung (+) beruht hier wesentlich auf der Tatsache, dass wir es mit einer Folge t -zugänglicher Ereignisse zu tun haben.

Anmerkung 1

Die Beschränkung von $\mu(|G^{\wedge}N)$ auf \mathcal{A}_e ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und somit additiv. Dies gilt für jedes einzelne Experiment. Im Gegensatz dazu ist das auf ganz \mathcal{A} definierte bedingte Möglichkeitsmaß $\mu(|G^{\wedge}N)$ – ebenso wie das auf \mathcal{A} definierte äußere Maß μ – im allgemeinen nicht additiv.

Anmerkung 2

Schon das auf der Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse definierte Möglichkeitsmaß μ_e hat die formalen Eigenschaften eines additiven Wahrscheinlichkeitsmaßes, so dass es scheinen könnte, als müssten wir die Definition von P_e über den Limes relativer Häufigkeiten gar nicht durchführen. Tatsächlich kommt es hier aber auf die Additivität von μ_e überhaupt nicht an.

Wir hätten in unserer Theorie anstelle des äußeren Maßes μ auf \mathcal{A} das (schwächere) äußere Maß $\mu^{1/2}$ zugrunde legen können. An die Stelle von μ_e wäre dann $(\mu_e)^{1/2}$ getreten, und dies ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß. Zugleich hätten wir μ^N durch $(\mu^N)^{1/2}$ ersetzen müssen. An der Definition von P_e hätte sich dadurch nichts geändert, da eine Folge a_N genau dann gegen Null konvergiert, wenn die zugehörige Folge $(a_N)^{1/2}$ gegen Null geht; die Konvergenz würde lediglich etwas langsamer erfolgen.

Wir haben das äußere Maß μ zugrunde gelegt, weil es (im Vergleich zu $\mu^{1/2}$) das stärkere äußere Maß darstellt und daher vorzuziehen ist. Dass sich damit ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß μ_e auf \mathcal{A}_e ergeben hat und darüber hinaus die Identität $P_e = \mu_e$ gilt, ist in diesem Zusammenhang nicht entscheidend. Es ergibt sich hieraus allerdings ein praktischer Vorteil: Mit dem aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten Gesetz der großen Zahlen lässt sich auf einfache Weise zeigen, dass $P_e(B) = P(B|G^{\wedge}N)$ für alle $B \in \mathcal{A}_e$ als Limes relativer Häufigkeiten definiert werden kann. Außerdem kann der Wert von $P_e(B)$ leicht ermittelt werden, da man einfach $P_e(B) = \mu_e(B)$ erhält.

Während also das Möglichkeitsmaß μ_e (als Ausdruck des Grades der (Un-)Möglichkeit) nicht notwendigerweise additiv sein muss, ist die Additivität des

Häufigkeitsgrades P_e eine Folge der Definition als Limes von (stets additiven) relativen Häufigkeiten. Es ist daher sinnvoll, den Häufigkeitsgrad P_e auf der Algebra der möglichen Ergebnisse des Experiments in der beschriebenen Weise explizit zu definieren, auch wenn sich dann herausstellt, dass im vorliegenden Fall einfach $P_e = \mu_e$ ist.

Anmerkung 3

Die formale Konstruktion unabhängiger Wiederholungen eines Experiments im Rahmen von \mathbf{N} -Multiversen erfolgte aus zwei Gründen: Zum einen sind im realen Universum keine unendlich vielen Wiederholungen möglich, zum andern ist dort keine Unabhängigkeit im präzisen Sinne erreichbar.

Bezogen auf das reale Universum hat der formal definierte Häufigkeitsgrad $P_e(B)$ folgende Bedeutung: Wenn man sehr viele Wiederholungen eines Experimentes betrachtet und diese Wiederholungen in guter Näherung als unabhängig voneinander angesehen werden können, so liegt die empirisch ermittelbare relative Häufigkeit des Eintretens der Ausprägung B fast sicher, d.h. mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe bei dem durch $P_e(B)$ angegebenen Wert.

Hierzu muss man ausgehen von einer Grundbedingung $G \in \mathcal{A}$, die angibt, dass die Voraussetzungen für sämtliche Wiederholungen des Experiments gegeben sind. Ferner wird die Bedingung $N \in \mathcal{A}$ benötigt, welche beschreibt, dass jedes der Experimente erfolgreich mit einem eindeutigen Ergebnis abgeschlossen wurde.

Für das aus sämtlichen Wiederholungen bestehende Gesamtexperiment muss man annehmen, dass es sich um ein makroskopisches Experiment im oben angegebenen Sinne handelt. Mit \mathcal{A}_e bezeichnen wir die Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse dieses Gesamtexperiments und mit μ_e die Beschränkung des bedingten Möglichkeitsmaßes $\mu(G \wedge N)$ auf \mathcal{A}_e . Nach den früheren Überlegungen ist μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Dass wir es mit "Wiederholungen" zu tun haben, bedeutet, dass die einzelnen Experimente von gleicher Art sind. Formal folgt hieraus:

$$(*) \quad \mu_e(B_m) = \mu_e(B_1) \quad (\text{für alle } m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\})$$

Dabei gibt \mathbf{N} die Anzahl der Wiederholungen an, und B_m bezeichnet das Eintreten der Ausprägung B in der m -ten Wiederholung. (Die Wiederholungen finden nunmehr im realen Universum statt, d.h. es ist $B_m \in \mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}$.) Die Gleichung (*) muss hier nicht exakt gelten; es genügt, dass sie in einer sehr guten Näherung gilt.

Dass die Wiederholungen B_m (mit $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$) unter der Bedingung $G \wedge N$ unabhängig voneinander sind, besagt formal, dass für jede Teilfolge m_1, \dots, m_u

von $1, \dots, N$ und für jedes $m \in \{1, \dots, N\}$, welches nicht zu dieser Teilfolge gehört, die Gleichung

$$\mu(B_m | G \wedge N \wedge B_{m_1} \wedge \dots \wedge B_{m_u}) = \mu(B_m | G \wedge N)$$

gilt. Da die B_m zu \mathcal{A}_e gehören, ist dies äquivalent zu

$$\mu_e(B_m | B_{m_1} \wedge \dots \wedge B_{m_u}) = \mu_e(B_m)$$

Hieraus kann man leicht ableiten, dass für jede Teilfolge m_1, \dots, m_u von $1, \dots, N$ gilt:

$$(**) \quad \mu_e(B_{m_1} \wedge \dots \wedge B_{m_u}) = \mu_e(B_{m_1}) \cdot \dots \cdot \mu_e(B_{m_u})$$

Auch diese Gleichung muss nicht exakt gelten; es genügt vielmehr, dass sie in sehr guter Näherung gilt.

Da μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}_e ist, folgt aus (*) und (**) mittels des schwachen Gesetzes der großen Zahlen die gewünschte Aussage: Für einen passend gewählten, kleinen Wert $\delta > 0$ und für $p := P_e(B)$ ist

$$\mu_e(\#B_m/N \notin [p-\delta, p+\delta]) \approx 0$$

Dabei bezeichnet $\#B_m$ die Anzahl der Wiederholungen, bei denen die Ausprägung B eingetreten ist.

Die hier beschriebene Rolle des Wertes $p = P_e(B)$ ist unabhängig davon, ob wir das äußere Maß μ zugrunde legen (was zu der Gleichung $p = \mu_e(B)$ führt) oder zum Beispiel das äußere Maß $\mu' = \mu^{1/2}$. Im letzteren Fall erhalten wir denselben Häufigkeitsgrad P_e und auch denselben Wert p . Für ihn gilt dann allerdings nicht die Gleichung

$$p = (\mu')_e(B)$$

sondern stattdessen die Beziehung

$$p = [(\mu')_e(B)]^2$$

Zusammenfassung

Wir betrachten ein makroskopisches Experiment, das in einem makroskopischen Kontext stattfindet. Die Ereignisse (E_j, t_j) seien die Voraussetzungen und (E_{rs}, t_{rs}) die möglichen Ergebnisse des Experiments. Zur Abkürzung seien

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, q\})$$

$$A_{rs} := U_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\} \text{ und } s \in \{1, \dots, S_r\})$$

Mit G bezeichnen wir das mögliche Faktum, dass sämtliche Voraussetzungen des Experiments gegeben sind, und N drückt aus, dass zu jeder experimentellen Alternative mindestens eine Ausprägung realisiert ist. Es werden die Bedingungen (EX1) und (EX2) angenommen. \mathcal{A}_e bezeichnet die Algebra der möglichen Ergebnisse und μ_e die Beschränkung von $\mu(G \wedge N)$ auf \mathcal{A}_e .

Wir modellieren die N -fache Wiederholung des Experiments in einem gedachten N -Multiversum, das eine N -fache Kopie des realen Universums darstellt. Der Hilbertraum des N -Multiversums ist das N -fache Tensorprodukt von \mathcal{H} mit sich selbst.

Der Operator U_t^N für das N -Multiversum wird so festgelegt, dass Bewegungen in den einzelnen Paralleluniversen völlig unabhängig voneinander erfolgen. Als Initialeigenschaft im N -Multiversum wird

$$UR^N := UR \otimes \dots \otimes UR$$

angenommen.

Die Begriffe \mathcal{U}^N , \mathcal{E}^N , Ω_0^N , \mathcal{A}_0^N , AX^N , Ω^N , \mathcal{A}^N , μ^N sowie \mathcal{S}^N werden für das N -Multiversum analog zu den entsprechenden Begriffen für das reale Universum definiert. Zu einem $B \in \mathcal{A}_e$ sowie zu G und N werden die entsprechenden möglichen Fakten B_m , G_m und N_m für jedes Paralleluniversum gebildet.

Die Definition

$$P(B | G \wedge N) = p \iff \forall \delta > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\#B_m / N \notin [p - \delta, p + \delta] | \forall_{m \leq N} (G_m \wedge N_m)) = 0$$

ergibt, dass sich

$$P_e(B) := P(B | G \wedge N)$$

für alle $B \in \mathcal{A}_e$ definieren lässt. Es gilt $P_e = \mu_e$ und für alle Ergebniskonstellationen β gilt die (aufgrund des bekannten Formalismus der Quantentheorie zu erwartende) Gleichung

$$(+) \quad P_e(\forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle) = \text{tr} \pi_{A_1, \beta(1)} \dots \pi_{A_R, \beta(R)} W \pi_{A_R, \beta(R)} \dots \pi_{A_1, \beta(1)}$$

mit

$$W_1 := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{A_1} \dots \pi_{A_q}$$

und

$$W := W_1 / \text{tr} W_1$$

Dabei können die Faktoren $\pi_{A_{r, \beta(r)}}$ (im wesentlichen wegen der t -Zugänglichkeit der Ereignisse) in beliebiger Reihenfolge angeordnet werden.

Der Häufigkeitsgrad P_e ist aufgrund der Konstruktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß im Sinne Kolmogoroffs. Die Additivität des Möglichkeitsmaßes μ_e sowie die Gleichung $P_e = \mu_e$ sind nicht von entscheidender Bedeutung, da man anstelle von μ bzw. μ_e auch $\mu^{1/2}$ bzw. $(\mu_e)^{1/2}$ hätte verwenden können und dennoch denselben Häufigkeitsgrad P_e erhalten hätte.

Für das reale Universum hat der Häufigkeitsgrad folgende Bedeutung: Im Falle vieler (in guter Näherung) voneinander unabhängiger Wiederholungen eines Experiments liegt die relative Häufigkeit des Eintretens von B mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe bei $P_e(B)$.

37. Quantenzustände

In diesem und den folgenden Kapiteln geht es uns darum zu zeigen, warum man Quantenexperimente im Sinne des bekannten Formalismus der Quantentheorie beschreiben kann und warum man mit diesem Formalismus zu denselben Aussagen über Wahrscheinlichkeiten von Messergebnissen gelangt wie in der hier dargestellten Theorie. Zu diesem Zweck definieren wir zu jedem Experiment, zu jedem Subsystem Q und zu jedem Zeitpunkt τ den "Quantenzustand". Dieser Zustand ist insbesondere abhängig von den gegebenen experimentellen Voraussetzungen; insofern handelt es sich um einen *bedingten* Zustand. In der Ausdrucksweise der Kopenhagener Deutung kann man sagen, durch die experimentellen Voraussetzungen werde dieser Zustand "präpariert".

Zu den Voraussetzungen eines Quantenexperiments gehören typischerweise:

- die Beschreibung einer oder mehrerer Quantenquellen,
- die Beschreibung der aufgebauten Messapparaturen,
- die übrigen allgemeinen Voraussetzungen, etwa die, dass die Erde samt Labor vorhanden ist und dass das Experiment nicht gestört wird, beispielsweise durch die kosmische Strahlung.

Der hierdurch präparierte Zustand hängt grundsätzlich von allen diesen Voraussetzungen ab. In bestimmten Fällen unterscheidet er sich jedoch nicht von dem Zustand, den man erhalten würde, wenn einer oder mehrere der Messapparate nicht vorhanden wären.

Ein Quantenexperiment ist nichts anderes als ein spezielles makroskopisches Experiment im oben diskutierten Sinne. Wenn die Ergebnisse eines solchen Experiments auswertbar sein sollen, muss sich das Experiment im Rahmen eines makroskopischen Kontextes abspielen. Formal sind die Voraussetzungen eines Quantenexperiments zu beschreiben als eine endliche Folge von Ereignissen $(E_j, t_j) \in \mathcal{E}$.

Unser Ziel ist es, zu jeder endlichen Folge

$$\mathcal{G} := ((E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n))$$

von Ereignissen, zu jedem Subsystem Q und zu jedem Zeitpunkt $\tau \in T$ den durch \mathcal{G} bedingten Quantenzustand von Q zur Zeit τ zu definieren. Dazu setzen wir:

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\})$$

$$L := \pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$W := LL^* / \text{tr}(LL^*)$$

$$W_\tau := U_\tau W U_{-\tau}$$

W ist der zu \mathcal{G} gehörende statistische Operator. Man kann ihn als Zustand des Universums zur Zeit 0 unter der Bedingung \mathcal{G} auffassen. Ebenso kann man W_τ interpretieren als Zustand des Universums zur Zeit τ unter der Bedingung \mathcal{G} .

Es sei nun Q ein Subsystem von \mathcal{H} und Q^- bezeichne den zugehörigen "Rest der Welt". Es ist dann

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

Zu jedem statistischen Operator W' auf \mathcal{H} kann man die partielle Spur auf \mathcal{H}_Q bilden. Dazu sei e_j eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_Q und f_r eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_{Q^-} . Die Vektoren der Form $e_j \otimes f_r$ bilden dann eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} . Demnach ist W' eindeutig darstellbar als

$$W' = \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} (e_j \otimes f_r)(e_k \otimes f_s)^*$$

Damit wird die partielle Spur von W' auf Q definiert durch

$$\text{tr}_Q[W'] := \sum_{j,k} \sum_r w_{jr,kr} e_j(e_k)^* \quad (\text{vgl. T.37.1})$$

Ebenso wie W' hat $\text{tr}_Q[W']$ die Eigenschaften eines statistischen Operators.

Den bedingten Quantenzustand des Subsystems Q zur Zeit τ unter der Bedingung \mathcal{G} können wir nun definieren als:

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} := \text{tr}_Q[W_\tau]$$

Im allgemeinen ist dies ein statistischer Operator auf \mathcal{H}_Q . Wenn dieser Operator jedoch den Rang 1 hat, so gibt es ein Element $\varphi \in \mathcal{H}_Q$ mit

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} = \varphi\varphi^*$$

Dabei ist φ bis auf einen Phasenfaktor eindeutig bestimmt. In diesem Fall spricht man von einem "reinen Zustand".

Bemerkung: In der Praxis wird man es genau genommen niemals mit einem reinen Zustand zu tun haben. Im besten Fall besteht die genannte Gleichung annähernd, d.h. es gilt:

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} \approx \varphi\varphi^*$$

Formal ist dies dann der Fall, wenn es (mit einer Orthonormalbasis φ_j) in der Spektraldarstellung

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} = \sum_j \lambda_j \varphi_j(\varphi_j)^*$$

ein j_0 gibt mit

$$\lambda_{j_0} \approx 1 \quad \text{und} \quad \varphi_{j_0} = \varphi$$

Bemerkung: Für den Fall, dass es sich bei dem Subsystem Q um das ganze Universum V handelt, ist einfach

$$W_{V;\tau|G} = W_\tau$$

Darum können wir W_τ als Zustand des Universums zur Zeit τ unter der Bedingung G auffassen.

Bemerkung: Wie die leere Menge kann man auch die "leere Folge", d.h. die Folge, welche gar kein Element enthält, mit \emptyset bezeichnen. In dem (theoretischen) Fall, dass wir überhaupt keine Bedingung annehmen, haben wir dann

$$G = \emptyset$$

und

$$W_{V;0|\emptyset} = \pi_{UR} / \text{tr}(\pi_{UR})$$

Die Eigenschaft UR entspricht daher dem *unbedingten* Zustand des Universums zur Zeit 0. Diesen Quantenzustand können wir auch als den "Ur-Zustand" des Universums bezeichnen. Entsprechend kann die Initialeigenschaft auch als "Ur-Eigenschaft" bezeichnet werden.

Bemerkung: Die Tatsache, dass Quantenzustände aus der Initialeigenschaft UR abgeleitet werden, ist aus folgenden Gründen plausibel: Um einen bestimmten Quantenzustand präparieren zu können, benötigt man eine Quantenquelle, etwa ein heißes Objekt, das aus thermischen Gründen Quanten einer bestimmten Art emittiert. Durch entsprechende Filter lassen sich dann Quanten mit dem gewünschten Zustand präparieren. Voraussetzung hierfür ist stets das Bestehen eines lokalen thermodynamischen Ungleichgewichts. Die Quelle aller derartigen Ungleichgewichte liegt aber in dem Vorhandensein der Initialeigenschaft zum Zeitpunkt 0.

Bemerkung: Man kann sich hier die Frage stellen, ob und gegebenenfalls wann ein Subsystem Q zur Zeit τ "tatsächlich" den Zustand $W_{Q;\tau|G}$ aufweist. Eine naheliegende Antwort lautet, dass dies genau dann der Fall ist, wenn alle durch G angegebenen Ereignisse (E_j, t_j) wirklich eingetreten sind, also zum tatsächlichen Weltablauf gehören. Formal lässt sich dies ausdrücken durch die Aussage

$$\forall_j [(E_j, t_j) \in \omega_0]$$

für die wir auch kurz

$$G \subset \omega_0$$

schreiben können. Demnach hat ein Subsystem Q zur Zeit τ aber nicht genau einen bestimmten Zustand im Sinne eines "Zustandsrealismus". Vielmehr weist

Q zur Zeit τ zugleich alle jene (bedingten) Zustände $W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$ auf, für die $\mathcal{G} \subset \omega_0$ gilt. Der "Zustand" eines Subsystems Q stellt – anders als der Zustand in der klassischen Theorie – keine Eigenschaft von Q dar, welche objektiv vorhanden ist und alle übrigen Eigenschaften festlegt. Vielmehr handelt es sich bei den verschiedenen bedingten Zuständen um formal definierbare theoretische Größen, die – wie wir sehen werden – zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten genutzt werden können. Ebenso, wie es zu unterschiedlichen Bedingungen verschiedene bedingte Wahrscheinlichkeiten gibt, existieren zu unterschiedlichen Bedingungen auch verschiedene Zustände für dasselbe Subsystem und zum gleichen Zeitpunkt.

Wir haben zu jeder endlichen Folge \mathcal{G} von Ereignissen als Bedingung, zu jedem Subsystem Q und zu jedem Zeitpunkt $\tau \in T$ den (bedingten) Zustand $W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$ in eindeutiger Weise definiert. Wir wollen nun diesen Zustandsbegriff anwenden auf die Beschreibung von Quantenexperimenten. Dazu betrachten wir ein makroskopisches Experiment im oben diskutierten Sinne. Mit (E_j, t_j) (für $j \in \{1, \dots, q\}$) werden die experimentellen Voraussetzungen bezeichnet. Die Ergebnisse des Experiments seien in R Alternativen gegliedert, wobei die r -te Alternative S_r mögliche Ausprägungen hat. Mit (E_{rs}, t_{rs}) werden (mit den Indizes $r \in \{1, \dots, R\}$ und $s \in \{1, \dots, S_r\}$) die möglichen Ergebnisse bezeichnet.

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ sei

$$\mathcal{B}_r := \{ \beta : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_{r' \leq r} \beta(r') \in \{1, \dots, S_{r'}\} \}$$

die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen für die ersten r Alternativen. Ein Element $\beta \in \mathcal{B}_r$ ordnet jeder dieser Alternativen genau eine der für sie möglichen Ausprägungen zu.

Es sei ferner

$$\mathcal{G}_0 := ((E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q))$$

die Folge der Voraussetzungen des Experiments. Der durch diese Voraussetzungen bedingte ("präparierte") Zustand eines Subsystems Q zur Zeit τ ist dann

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_0}$$

und mit

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, q\})$$

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

sowie

$$W := LL^* / \text{tr}(LL^*)$$

ist

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_0} = \text{tr}_Q[U_\tau W U_{-\tau}]$$

Zur Beschreibung eines Experiments sind außerdem diejenigen bedingten Zustände relevant, deren Bedingung darin besteht, dass neben den experimentellen Voraussetzungen auch einige der experimentellen Ergebnisse bereits gegeben sind. Daher definieren wir zu gegebenem $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$ (als Zusammenfügung zweier Folgen):

$$\mathcal{G}_{\beta,r} := \mathcal{G}_0 \cup ((E_{1,\beta(1)}, t_{1,\beta(1)}), \dots, (E_{r,\beta(r)}, t_{r,\beta(r)}))$$

Die Folge $\mathcal{G}_{\beta,r}$ enthält neben den Voraussetzungen des Experiments auch die Ergebnisse zu den ersten r Alternativen. Dabei gibt die Ergebniskonstellation β an, welche Ausprägungen bei diesen Alternativen jeweils realisiert sind. Mit dem bedingten Zustand

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_{\beta,r}}$$

wird das Subsystem Q zur Zeit τ beschrieben, wenn es durch die Voraussetzungen des Experiments "präpariert" wurde und wenn zu den Alternativen 1 bis r die durch β angegebenen Ergebnisse realisiert sind. Im speziellen Fall $r = 0$ ist einfach

$$\mathcal{G}_{\beta,0} = \mathcal{G}_0$$

und somit

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_{\beta,0}} = W_{Q;\tau|\mathcal{G}_0}$$

Mit

$$A_{rs} := U_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\} \text{ und } s \in \{1, \dots, S_r\})$$

setzen wir für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$

$$L_{\beta,r} := \pi_{A_{r,\beta(r)}} \cdots \pi_{A_{1,\beta(1)}} L$$

sowie

$$W_{\beta,r} := L_{\beta,r} (L_{\beta,r})^* / \text{tr} (L_{\beta,r} (L_{\beta,r})^*)$$

Für den durch die Voraussetzungen des Experiments sowie die Ergebnisse zu den ersten r Alternativen bedingten Quantenzustand des Subsystems Q zur Zeit τ erhalten wir damit die Gleichung:

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_{\beta,r}} = \text{tr}_Q[U_\tau W_{\beta,r} U_{-\tau}] \quad (\text{für } r \in \{0, \dots, R\} \text{ und } \beta \in \mathcal{B}_r)$$

Bemerkung: Der Ausdruck, mit dem $L_{\beta,r}$ definiert wird, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Faktoren $A_{j,\beta(j)}$ auftreten (vgl. T.37.2). Dies folgt aus der Tatsache, dass die möglichen experimentellen Ergebnisse (wie bei jedem makroskopischen Experiment) zu den "interessierenden Ereignissen" eines makroskopischen Kontextes gehören.

Abschließend wollen wir die Frage diskutieren, worin sich der Zustandsbegriff der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie von unserem Konzept unterscheidet. In der Kopenhagener Deutung wird zu jedem Quantenexperiment *angenommen*, dass das betrachtete Quantensystem einen Zustand hat. Für die Feststellung, um welchen Zustand es sich handelt, ist man – sofern dieser Zustand nicht durch eine vorangegangene Messung festgelegt ist – entweder auf halbklassische Überlegungen angewiesen, oder man bestimmt den Zustand empirisch mit den Mitteln der Statistik aufgrund einer großen Anzahl von Wiederholungen des Experiments. In der Kopenhagener Deutung stellt der Zustandsbegriff eines der grundlegenden Konzepte der Theorie dar.

Im Gegensatz dazu wird in unserem Ansatz zu jedem Quantenexperiment, zu jedem Subsystem und zu jedem Zeitpunkt der durch die Voraussetzungen des Experiments präparierte Zustand *abgeleitet*. Dabei wird die Initialeigenschaft UR zugrunde gelegt. Die Annahme dieser Eigenschaft wird (in der Quantentheorie ebenso wie in der klassischen Mechanik) damit begründet, dass das Universum zu einem früheren Zeitpunkt eine geringe Entropie aufgewiesen haben muss, da andernfalls das gegenwärtig zu beobachtende thermodynamische Ungleichgewicht nicht vorhanden wäre, und da es sonst weder Dokumente vergangener Fakten noch Erinnerungen oder Wahrnehmungen geben könnte. Ohne das Bestehen eines thermodynamischen Ungleichgewichts könnte es außerdem weder klassische Teilchenquellen noch Quantenquellen geben.

Auf der Basis der Initialeigenschaft und der experimentellen Voraussetzungen lässt sich der Zustand eines Subsystems grundsätzlich berechnen. Wegen der Komplexität des Problems ist man in der Praxis wiederum auf (halb-) klassische Überlegungen angewiesen. Derartige Überlegungen haben den Charakter einer Approximation an die tatsächlichen quantentheoretischen Zusammenhänge. Wenn sich die Initialbedingung oder die experimentellen Voraussetzungen nicht konkret angeben lassen, weil sie z.B. zu komplex oder einfach nicht bekannt sind, bleibt nur wieder der Weg der empirischen Ermittlung des durch den experimentellen Aufbau präparierten Zustands mittels einer großen Anzahl von Wiederholungen des Experiments.

In unserer Theorie ist nicht der Zustandsbegriff, sondern der Begriff der Eigenschaft das grundlegende Konzept. Die (bedingten) Quantenzustände sind theoretische Größen, die auf der Basis der Initialeigenschaft UR definiert werden und zur Berechnung von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten verwendet werden können.

Anmerkung 1

Ganz analog zum Vorgehen in der Quantentheorie lässt sich auch in der klassischen Mechanik zu jedem Teilsystem Q des Universums, zu jedem Zeitpunkt τ und zu jeder Folge von Ereignissen als Bedingung ein bedingter "Quantenzustand" definieren, den wir hier jedoch (allgemeiner) als "probabilistischen Zustand" bezeichnen wollen. Ausgangspunkt ist auch in diesem Fall die Initialeigenschaft UR . Projektionsoperatoren sind hierbei durch Indikatorfunktionen und die Schrödingergleichung ist durch das klassische Bewegungsgesetz zu ersetzen. An die Stelle der Spur tritt das Integral über den Phasenraum des Universums und an die Stelle der partiellen Spur auf Q die Integration über den Phasenraum des zu Q komplementären Subsystems Q^- . Der so definierte probabilistische Zustand ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf dem Phasenraum von Q und entspricht somit einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Ebenso wie im Falle der Quantentheorie können damit bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Formal werden die bedingten probabilistischen Zustände in der klassischen Mechanik folgendermaßen definiert: Zu $(E_j, t_j) \in \mathcal{E}$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &:= ((E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)) \\ A_j &:= (\beta_{t_j})^{-1}(E_j) \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\}) \\ L &:= \mathbf{1}_{A_n} \cdot \dots \cdot \mathbf{1}_{A_1} \mathbf{1}_{UR} \\ W &:= L / \int L \, d\lambda \\ W_\tau &:= W \circ (\beta_\tau)^{-1} \end{aligned}$$

Mit

$$M := \beta_\tau(UR \cap \bigcap_j A_j)$$

erhält man (unter Verwendung des Liouville'schen Satzes) die einfache Beziehung

$$W_\tau = \mathbf{1}_M / \lambda(M)$$

W_τ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf Z , dem Phasenraum des Universums. Z ist das kartesische Produkt aus den Phasenräumen von Q und Q^- :

$$Z = Z_Q \times Z_{Q^-}$$

Der probabilistische Zustand von Q zur Zeit τ unter der Bedingung \mathcal{G} wird nun definiert als

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} := \int W_\tau \, d\lambda_{Q^-}$$

Dabei ist λ_{Q^-} das Lebesguemaß auf Z_{Q^-} .

Anmerkung 2

Sowohl für die klassische Theorie als auch für die Quantentheorie gibt es einen deterministischen Zustand. Es handelt sich in beiden Fällen um eine Abbildung

$$z : \mathcal{U} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

die das Monotonieprinzip sowie das Ausschlussprinzip erfüllt. Im Falle der klassischen Theorie muss außerdem das physikalische "tertium non datur" erfüllt sein. In beiden Fällen kann der (deterministische) Zustandsraum definiert werden als die Menge aller derartiger Abbildungen. Im Falle der klassischen Theorie kann dieser Zustandsraum identifiziert werden mit dem Phasenraum Z .

Für beide Theorien gibt es außerdem einen bedingten probabilistischen Zustand, und zwar für jedes Teilsystem des Universums, für jeden Zeitpunkt und für jede endliche Folge von Ereignissen als Bedingung. Alle diese Zustände stellen Rechengrößen dar, die aus der Initialeigenschaft formal abgeleitet werden. Die Initialeigenschaft ihrerseits wird dem Universum zugeschrieben, da wir einen Zeitpfeil beobachten.

Im Falle der klassischen Theorie ist der probabilistische Zustand stets eine auf Eins normierte Dichtefunktion auf dem Phasenraum. Ist diese Dichtefunktion auf einen Punkt konzentriert – und mithin formal eine Distribution – so handelt es sich um einen reinen Zustand, und einen solchen kann man mit einem deterministischen Zustand identifizieren.

Im Falle der Quantentheorie ist der probabilistische Zustand nichts anderes als der Quantenzustand. Es handelt sich um einen "statistischen Operator". Hat dieser Operator den Rang Eins, so sprechen wir von einem reinen Zustand. Ein solcher kann durch einen Vektor ψ des Hilbertraums dargestellt werden, einem deterministischen Zustand entspricht er hier aber nicht.

Für beide Theorien kann ein reiner Zustand aufgefasst werden als Ausdruck eines maximal möglichen Wissens über das betrachtete Teilsystem des Universums. Ein deterministischer Zustand hingegen legt stets alle möglichen Eigenschaften des Systems eindeutig fest. Für die Quantentheorie besagt dies, dass das maximal mögliche Wissen über ein System niemals ausreicht, um alle möglichen Eigenschaften des Systems festzulegen.

Anmerkung 3

Nach unseren Überlegungen entspricht die Initialeigenschaft UR dem unbedingten Quantenzustand des Universums zur Zeit 0. Der statistische Operator

$$W_{V;0|\emptyset} = \pi_{UR} / \text{tr}(\pi_{UR})$$

beschreibt – und ähnlich verhält es sich auch im klassischen Fall – eine Gleichverteilung auf dem Unterraum UR.

UR ist definiert als jene Eigenschaft, die beschreibt, dass das Universum zur Zeit 0 eine sehr geringe Entropie aufgewiesen hat. Damit erklärt die Initialbedingung $\langle UR \rangle$ auch die Existenz des Zeitpfeils. Naturgemäß wissen wir nur sehr wenig über die anfänglichen Eigenschaften des Universums. Aus diesem Grunde müssen wir davon ausgehen, dass UR ein Unterraum hoher Dimension ist.

Aus der Gleichverteilung auf dem Unterraum UR lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen ableiten, dass bei der Wiederholung gleichartiger Experimente dieselben Wahrscheinlichkeiten auftreten, dass bestimmte Ereignisse unabhängig voneinander sind oder dass beim Werfen eines Würfels die möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.

Es stellt sich hier die Frage, ob es möglich ist, die Eigenschaft UR als eindimensional anzunehmen oder UR bei der Definition des Quantenzustands des Universums zu ersetzen durch eine Eigenschaft $UR' \in \mathcal{H}$, welche die Dimension Eins hat. In diesem Fall wäre $UR' = [\psi]$ mit einem Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, und der bedingte Zustand des Universums wäre zu jeder Zeit und zu jeder Bedingung ein reiner Zustand. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der hierbei möglichen $\psi \in \mathcal{H}$ wäre damit nicht gegeben.

Die Folge dieser Annahme wäre allerdings, dass wir über ψ praktisch niemals konkrete Kenntnisse haben würden. ψ bliebe stets eine unbekannte Größe der Theorie, und daran würden auch umfangreiche empirische Beobachtungen nichts ändern können. Alles, was wir über ψ sagen könnten, wäre, dass ψ einem Zustand geringer Entropie entspricht.

Als Folge dieser Tatsache würde die Theorie in der Praxis gar nichts aussagen können: Jede Beobachtung im Rahmen eines Experiments, bei dem z.B. eine bestimmte relative Häufigkeit ermittelt wird, könnte immer darin begründet sein, dass ψ gerade ein ganz bestimmtes Element von \mathcal{H} ist, und wir könnten nicht den Schluss ziehen, dass bei einer Wiederholung des Experiments mit hoher Wahrscheinlichkeit ein ähnliches Ergebnis herauskommen müsse.

Anders verhält es sich, wenn wir bei der Bildung der Quantenzustände die Eigenschaft UR zugrunde legen. Im Gegensatz zu ψ ist UR prinzipiell durch eine bestimmte Definition gegeben und es handelt sich nicht um ein grundsätzlich unbekanntes Element von \mathcal{U} . Bei der Definition der Quantenzustände wird implizit eine Gleichverteilung auf den Elementen von UR angenommen. Aufgrund dieser zusätzlichen Annahme kann die Theorie stärkere Vorhersagen machen als es auf der Basis eines unbekanntes Elements $\psi \in \mathcal{H}$ der Fall wäre. Insbesondere sagt die Theorie damit voraus, dass die Wiederholung von Experimenten unter gleichen Bedingungen mit hoher Wahrscheinlichkeit zu ähnlichen Ergebnissen führt. Analog verhält es sich bei der zusätzlichen Annahme des Wahrscheinlichkeitsgesetzes im Falle der klassischen Theorie.

Zusammenfassend müssen wir also feststellen, dass die Annahme, der (unbedingte) Quantenzustand des Universums zum Zeitpunkt 0 sei ein reiner

Zustand, nicht sinnvoll ist. Vielmehr muss man davon ausgehen, dass es sich bei der Initialeigenschaft UR um einen Unterraum mit hoher Dimension handelt und dass durch die Bildung von $\pi_{UR}/\text{tr}(\pi_{UR})$ eine Gleichverteilung auf UR ausgedrückt wird.

Bemerkung: Eine ähnliche Überlegung gilt auch für alle jene Deutungsvarianten, in denen von der Existenz eines Zustandsvektors $\psi \in \mathcal{H}$ für das Universum ausgegangen wird, welcher letztlich immer unbekannt bleibt, über den die Theorie nichts Spezifisches aussagt und für den sie insbesondere keine Wahrscheinlichkeitsverteilung angibt.

38. Die Bewegung von Subsystemen nach der Schrödinger- gleichung

In diesem Kapitel wollen wir die Frage diskutieren, unter welchen Umständen sich die zeitliche Veränderung des Zustands eines Subsystems Q durch eine Schrödingergleichung auf dem zu Q gehörenden Hilbertraum \mathcal{H}_Q beschreiben lässt.

Hierzu sei Q ein Subsystem von \mathcal{H} und Q^- bezeichne den zugehörigen "Rest der Welt", so dass gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

Wie zuvor sei

$$\mathcal{G} := ((E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n))$$

eine endliche Folge von Ereignissen. Mit

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\})$$

$$L := \pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$W := LL^* / \text{tr}(LL^*)$$

$$W_\tau := U_\tau W U_{-\tau}$$

ist dann:

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} = \text{tr}_Q[W_\tau]$$

Wir betrachten hier den Fall, in dem der Rest der Welt Q^- einseitig auf das Subsystem Q wirkt, ohne dass es zu einer nennenswerten Rückwirkung kommt. Insbesondere soll diese Rückwirkung von Q auf Q^- so gering sein, dass durch sie die umgekehrte Einwirkung von Q^- auf Q nicht wesentlich beeinflusst wird. Nur in diesem Fall kann ein Subsystem durch eine eigene Bewegungsgleichung beschrieben werden. Lässt sich die Rückwirkung von Q auf Q^- hingegen nicht vernachlässigen, so kann man nur das Gesamtsystem $Q + Q^-$, d.h. das Universum als ganzes durch eine Bewegungsgleichung beschreiben.

Bemerkung: Auch in der klassischen Theorie kann ein Teilsystem nur dann durch eine eigene Bewegungsgleichung beschrieben werden, wenn der Rest der Welt einseitig auf das Teilsystem einwirkt, ohne dass es eine nennenswerte Rückwirkung gibt.

Für den angegebenen Fall werde die Energie von Q beschrieben durch den Operator H_Q auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_Q . Hierzu gehört sowohl die Energie des Subsystems Q , wenn man es für sich allein und ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Q und Q^- betrachtet, als auch die Energie, die sich

unter den durch \mathcal{G} gegebenen Bedingungen aus der Einwirkung von Q^- auf Q ergibt. Die Energie des Subsystems Q^- für sich allein betrachtet, d.h. ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Q und Q^- , werde andererseits beschrieben durch den Operator H_{Q^-} auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_{Q^-} .

Beispiel: Das Subsystem Q bestehe aus einem einzigen Elektron. Der Rest der Welt erzeuge (unter der Bedingung \mathcal{G}) ein elektrisches Feld, in dem sich das Elektron bewegt. Das Verhalten des Elektrons habe keine nennenswerte Auswirkung auf den Rest der Welt. Der Operator H_Q beschreibe dann sowohl die "innere" Energie des Elektrons, in diesem Fall die kinetische Energie, als auch die Einwirkung des Rests der Welt auf Q , d.h. die potentielle Energie des Elektrons in dem von Q^- erzeugten elektrischen Feld. Mit H_{Q^-} wird andererseits die Energie des Rests der Welt beschrieben, und zwar so, als wäre das Elektron gar nicht vorhanden.

Bemerkung: Verhältnisse der geschilderten Art sind immer nur gegeben unter einer Bedingung \mathcal{G} und während eines Zeitintervalls $[t_1, t_2]$. Beispielsweise kann \mathcal{G} einen experimentellen Aufbau beschreiben, durch den im Zeitabschnitt $[t_1, t_2]$ ein elektrisches Feld erzeugt wird, in dem sich Elektronen bewegen.

Wir definieren

$$\alpha_Q(H_Q) := H_Q \otimes I_{Q^-}$$

$$\alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) := I_Q \otimes H_{Q^-}$$

wobei I_Q und I_{Q^-} die Einheitsoperatoren auf \mathcal{H}_Q bzw. \mathcal{H}_{Q^-} sind, und setzen zur Abkürzung

$$H' := \alpha_Q(H_Q) + \alpha_{Q^-}(H_{Q^-})$$

Der Hamiltonoperator H für das Universum kann damit dargestellt werden als

$$H = H' + H_X$$

Der auf \mathcal{H} definierte Operator H_X beschreibt dabei den Teil der Wechselwirkung, der über die Einwirkung von Q^- auf Q hinausgeht und somit durch H_Q noch nicht erfasst ist.

Wir nehmen an, dass (abgesehen von der durch H_Q beschriebenen Einwirkung von Q^- auf Q) unter den durch \mathcal{G} gegebenen Bedingungen im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ zwischen Q und Q^- nur eine sehr geringe zusätzliche Wechselwirkung besteht. Konkret nehmen wir an, dass unter diesen Bedingungen die durch H_X beschriebene Energie stets nahe bei Null liegt.

Quantentheoretisch drückt sich dies darin aus, dass bei gegebenem statistischen Operator W_τ der "Erwartungswert" von $(H_X)^2$ annähernd Null ist. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} E_{W_\tau}((H_X)^2) &:= \text{tr}((H_X)^2 W_\tau) \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Mit der durch

$$|M| := (\text{tr}(MM^*))^{1/2}$$

definierten (euklidischen) Norm auf dem linearen Raum aller Operatoren auf \mathcal{H} und mit der abkürzenden Bezeichnung

$$L_\tau := U_\tau L$$

erhalten wir

$$W_\tau = L_\tau (L_\tau)^* / |L|^2$$

und es folgt:

$$\begin{aligned} E_{W_\tau}((H_X)^2) &= \text{tr}((H_X)^2 W_\tau) \\ &= \text{tr}(H_X W_\tau H_X) \\ &= \text{tr}(H_X L_\tau (L_\tau)^* H_X) / |L|^2 \\ &= |H_X L_\tau|^2 / |L|^2 \end{aligned}$$

Da $| \cdot |$ eine Norm ist, folgt weiter

$$H_X L_\tau \approx 0$$

und daraus wegen

$$H_X W_\tau = H_X L_\tau (L_\tau)^* / |L|^2$$

die Aussage

$$(1) \quad H_X W_\tau \approx 0 \quad (\text{für } \tau \in [t_1, t_2])$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$(2) \quad H W_\tau \approx H' W_\tau \quad (\text{für } \tau \in [t_1, t_2])$$

und (da man zu den adjungierten Ausdrücken übergehen kann und H , H' und W_τ selbstadjungiert sind) ebenfalls äquivalent zu

$$(3) \quad W_\tau H \approx W_\tau H' \quad (\text{für } \tau \in [t_1, t_2])$$

Bemerkung: Wenn Q kein sinnvoll abgrenzbares physikalisches Subsystem darstellt, so gibt es keine Bedingung G und keine Zeitspanne $[t_1, t_2]$, für die sich H als

$$\alpha_Q(H_Q) + \alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) + H_X$$

mit

$$H_X W_\tau \approx 0 \quad (\text{für } \tau \in [t_1, t_2])$$

darstellen lässt. Eine separate Beschreibung der Bewegung des Subsystems Q ist dann nicht möglich.

Die Bewegungsgleichung für den zu G gehörenden statistischen Operator lautet:

$$W_\tau = U_\tau W U_{-\tau}$$

Sie kann auch in Form einer Differentialgleichung ausgedrückt werden. Es gelten:

$$\begin{aligned} U_\tau &= e^{-i\tau H/\hbar} \\ \partial/\partial\tau(U_\tau) &= (-iH/\hbar) U_\tau \\ U_{-\tau} &= e^{i\tau H/\hbar} \\ \partial/\partial\tau(U_{-\tau}) &= U_{-\tau} (iH/\hbar) \end{aligned}$$

Dabei sind H und U_τ vertauschbare Operatoren, und H hängt nicht von dem Parameter τ ab.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial/\partial\tau(W_\tau) &= \partial/\partial\tau(U_\tau) W U_{-\tau} + U_\tau W \partial/\partial\tau(U_{-\tau}) \\ &= (-iH/\hbar) U_\tau W U_{-\tau} + U_\tau W U_{-\tau} (iH/\hbar) \\ &= (-i/\hbar) (H W_\tau - W_\tau H) \end{aligned}$$

und somit die Beziehung

$$(4) \quad i\hbar \partial/\partial\tau(W_\tau) = H W_\tau - W_\tau H$$

Dies ist eine Fassung der Schrödingergleichung, die die Zeitabhängigkeit des statistischen Operators W_τ in Form einer Differentialgleichung beschreibt.

Zu jedem statistischen Operator W' auf \mathcal{H} bezeichnen wir mit $\text{tr}_Q[W']$ wie zuvor die partielle Spur von W' auf \mathcal{H}_Q . Für jeden derartigen Operator gelten die Beziehungen

$$\text{tr}_Q[\alpha_Q(H_Q) W'] = H_Q \text{tr}_Q[W'] \quad (\text{vgl. T.38.1})$$

$$\text{tr}_Q[W' \alpha_Q(H_Q)] = \text{tr}_Q[W'] H_Q \quad (\text{vgl. T.38.2})$$

sowie

$$\text{tr}_Q[\alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) W'] = \text{tr}_Q[W' \alpha_{Q^-}(H_{Q^-})] \quad (\text{vgl. T.38.3})$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
 i\hbar \partial/\partial\tau \operatorname{tr}_Q[W_\tau] &= \operatorname{tr}_Q[i\hbar \partial/\partial\tau(W_\tau)] \\
 &= \operatorname{tr}_Q[H W_\tau - W_\tau H] \\
 &\approx \operatorname{tr}_Q[H' W_\tau - W_\tau H'] \\
 &= \operatorname{tr}_Q[H' W_\tau] - \operatorname{tr}_Q[W_\tau H'] \\
 &= \operatorname{tr}_Q[\alpha_Q(H_Q) W_\tau] + \operatorname{tr}_Q[\alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) W_\tau] \\
 &\quad - \operatorname{tr}_Q[W_\tau \alpha_Q(H_Q)] - \operatorname{tr}_Q[W_\tau \alpha_{Q^-}(H_{Q^-})] \\
 &= H_Q \operatorname{tr}_Q[W_\tau] - \operatorname{tr}_Q[W_\tau] H_Q
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$ erhalten wir somit die zu (4) analoge Beziehung:

$$i\hbar \partial/\partial\tau(W_{Q;\tau|\mathcal{G}}) \approx H_Q W_{Q;\tau|\mathcal{G}} - W_{Q;\tau|\mathcal{G}} H_Q$$

Dies ist die (im allgemeinen nur näherungsweise geltende) Schrödingergleichung für den Zustand des Subsystems Q unter der Bedingung \mathcal{G} für alle τ im Zeitabschnitt $[t_1, t_2]$. Sie beschreibt die Änderung des Zustands von Q unter der Bedingung \mathcal{G} mit der Zeit.

Der Operator H_Q kann selbst explizit zeitabhängig sein. In diesem Fall ist

$$H'(\tau) = \alpha_Q(H_Q(\tau)) + \alpha_{Q^-}(H_{Q^-})$$

und anstelle von (2) und (3) gelten für $\tau \in [t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned}
 H W_\tau &\approx H'(\tau) W_\tau \\
 W_\tau H &\approx W_\tau H'(\tau)
 \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung für den Zustand $W_{Q;\tau|\mathcal{G}}$ lautet dann:

$$i\hbar \partial/\partial\tau(W_{Q;\tau|\mathcal{G}}) \approx H_Q(\tau) W_{Q;\tau|\mathcal{G}} - W_{Q;\tau|\mathcal{G}} H_Q(\tau)$$

Falls H_Q *nicht* in dieser Weise zeitabhängig ist, lässt sich die Bewegungsgleichung für Q auch in geschlossener Form darstellen. Mit

$$U_{Q;\tau} := e^{-i\tau H_Q/\hbar}$$

lautet die Schrödingergleichung dann

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}} \approx U_{Q;\tau-t_1} W_{Q;t_1|\mathcal{G}} U_{Q;-(\tau-t_1)} \quad (\text{für } \tau \in [t_1, t_2])$$

Normalerweise besteht die Schrödingergleichung für ein Subsystem Q auch in dieser geschlossenen Form nur annähernd. Lediglich in dem Fall, dass es sich bei Q um das gesamte Universum handelt, gilt sie im Sinne exakter Gleichheit.

39. Messungen an Quantensystemen

Im Rahmen eines Quantenexperiments werden Messungen an einem oder mehreren Quantensystemen durchgeführt. Da mehrere Quantensysteme sich stets als ein Gesamtsystem auffassen lassen, genügt es, den Fall *eines* Quantensystems zu betrachten. Ein solches Quantensystem entspricht einem Subsystem von \mathcal{H} , dem Hilbertraum des Universums. In diesem Sinne gehen wir im folgenden von einem Subsystem Q aus, das Gegenstand des betrachteten Quantenexperiments ist. Mit Q^- werde der zugehörige "Rest der Welt" bezeichnet, so dass gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

Wie jedes Experiment ist auch ein Quantenexperiment zunächst durch bestimmte Voraussetzungen charakterisiert. Hierzu gehören das Vorhandensein einer oder mehrerer Quantenquellen, die Anwesenheit der Messinstrumente sowie allgemeine Voraussetzungen wie zum Beispiel die, dass die Erde zusammen mit dem Labor vorhanden ist und das Experiment nicht durch äußere Faktoren gestört wird. Alle diese Voraussetzungen werden beschrieben durch eine Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q) \in \mathcal{E}$$

Den zugehörigen Indexbereich definieren wir als

$$K' := \{1, \dots, q\}$$

In dem Quantenexperiment können nacheinander mehrere Messungen an Q durchgeführt werden, wobei jeweils eine Observable gemessen wird. Diese Observablen bezeichnen wir mit

$$M_1, \dots, M_R$$

Für jedes $r \in \{1, \dots, R\}$ ist M_r ein selbstadjungierter Operator auf \mathcal{H}_Q , dem Hilbertraum des Subsystems Q . Die Messung von M_r findet statt zu einem Zeitpunkt τ_r . Wir nehmen an, dass diese Zeitpunkte aufsteigend angeordnet sind, dass also gilt:

$$\tau_1 \leq \dots \leq \tau_R$$

Die Reihenfolge, in der die Messungen der Observablen stattfinden, ist damit festgelegt.

Wir gehen davon aus, wie es auch der Praxis entspricht, dass jede der Observablen M_r nur endlich viele verschiedene Werte annehmen kann. Die Anzahl dieser möglichen Werte werde mit S_r bezeichnet. M_r ist demnach ein Operator

mit endlichem Spektrum. Dafür erhalten wir eine Spektraldarstellung der Form

$$M_r = \sum_s \lambda_{rs} \pi_{F_{rs}}$$

Hierbei sind λ_{rs} die paarweise verschiedenen (reellen) Eigenwerte von M_r und F_{rs} paarweise orthogonale Eigenräume, für die gilt:

$$\bigoplus_s F_{rs} = \mathcal{H}_Q$$

Wir definieren den Indexbereich

$$D := \{ (r,s) \mid r \in \{1,\dots,R\} \wedge s \in \{1,\dots,S_r\} \}$$

und setzen für alle $(r,s) \in D$

$$\begin{aligned} C_{rs} &:= \alpha_Q(F_{rs}) \\ &= F_{rs} \otimes \mathcal{H}_{Q^-} \end{aligned}$$

C_{rs} ist jener Unterraum von \mathcal{H} , der dem Eigenraum F_{rs} des Operators M_r entspricht. Damit ist das Eintreten des Ereignisses (C_{rs}, τ_r) gleichbedeutend mit der Tatsache, dass die Observable M_r zur Zeit τ_r den Wert λ_{rs} aufweist.

Das Stattfinden der Messung der Observablen M_r bedeutet, dass jedem möglichen Wert dieser Observablen ein (ablesbares) Messergebnis zugeordnet ist. Das Vorhandensein eines Messergebnisses stellt ein physikalisches Ereignis dar. Folglich gibt es zu jedem $s \in \{1,\dots,S_r\}$ ein

$$(E_{rs}, t_{rs}) \in \mathcal{E}$$

das dem Messergebnis entspricht. Zwischen dem Ereignis, dass die Observable M_r zur Zeit τ_r den Wert λ_{rs} hat, d.h. dem Ereignis (C_{rs}, τ_r) , und dem entsprechenden Messergebnis (E_{rs}, t_{rs}) muss – unter den gegebenen experimentellen Voraussetzungen – eine Beziehung bestehen, die wir als "Messbeziehung" bezeichnen.

Ein Messergebnis (E_{rs}, t_{rs}) braucht im allgemeinen nicht makroskopisch zu sein, und es braucht auch nicht unmittelbar von einem makroskopischen Subjekt wahrgenommen zu werden. Es genügt vielmehr, dass es im oben definierten Sinne empirisch zugänglich ist, um "ablesbar" zu sein. Beispielsweise kann ein Messergebnis zunächst von einer Apparatur aufgezeichnet und zu einem späteren Zeitpunkt ausgewertet werden.

Damit das Quantenexperiment von einem makroskopischen Subjekt ausgewertet werden kann, müssen sowohl die Ereignisse (E_j, t_j) (mit $j \in K'$) als auch alle (E_{rs}, t_{rs}) (mit $(r,s) \in D$) von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich sein. Tatsächlich ist ein Quantenexperiment nichts anderes als ein spezielles

makroskopisches Experiment im oben diskutierten Sinne. Es ist dadurch ausgezeichnet, dass (als Folge der experimentellen Voraussetzungen) die erforderlichen Messbeziehungen bestehen, aufgrund derer man die Beobachtung des Ereignisses (E_{rs}, t_{rs}) deuten kann als "Messung" des Wertes λ_{rs} für die Observable M_r zur Zeit τ_r . Die Menge

$$\{ (E_{rs}, t_{rs}) \mid (r,s) \in D \}$$

der möglichen Ergebnisse des hier betrachteten makroskopischen Experiments ist gegliedert in R Alternativen, wobei die r -te Alternative S_r mögliche Ausprägungen hat.

Zur Abkürzung setzen wir wie zuvor

$$\begin{aligned} A_j &:= U_{-t_j} E_j && (\text{für } j \in K') \\ A_{rs} &:= U_{-t_{rs}} E_{rs} && (\text{für } (r,s) \in D) \end{aligned}$$

und definieren

$$G := \langle UR \rangle \wedge \bigvee_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

als das mögliche Faktum, dass alle Voraussetzungen des Experiments gegeben sind, sowie

$$N := \bigvee_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

als das mögliche Faktum, dass zu jeder der Alternativen mindestens eine Ausprägung realisiert ist.

Wie bei jedem makroskopischen Experiment gehen wir davon aus, dass die beiden Bedingungen

$$(EX1) \quad \bigvee_r \bigvee_{s \neq s'} \neg \hat{\Delta} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

und

$$(EX2) \quad \bigvee_r \neg \hat{\Delta} (G \wedge \bigvee_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

erfüllt sind. (EX1) besagt, dass unter der Voraussetzung G nie mehrere Ausprägungen derselben Alternative realisiert sein können. (EX2) hingegen sagt aus: Unter der Voraussetzung G kann nicht zu allen Ausprägungen einer Alternative das "physikalische Gegenteil" realisiert sein.

Bemerkung: Die beiden Aussagen (EX1) und (EX2) sind eine Konsequenz aus der später eingeführten Bedingung (MB) und müssen daher an dieser Stelle nicht explizit vorausgesetzt werden.

Auf der Menge Ω sei

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A} (\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \})$$

definiert als die Algebra der möglichen experimentellen Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines dieser Ergebnisse wird angegeben durch das (additive) Wahrscheinlichkeitsmaß P_e , welches auf \mathcal{A}_e definiert ist. Nach den obigen Überlegungen gilt hierfür (vgl. T.39.1):

$$P_e(A) = \mu(A | G \wedge N) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_e)$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann die erforderlichen Messbeziehungen gegeben sind. Der Tatsache, dass die Observable M_r zum Zeitpunkt τ_r den Wert λ_{rs} hat, entspricht das Ereignis (C_{rs}, τ_r) . Dieses Ereignis gehört im allgemeinen nicht zu den t-zugänglichen Ereignissen des makroskopischen Kontextes. Andererseits soll das Ergebnis λ_{rs} für die Messung der Observablen M_r zum Zeitpunkt τ_r dann vorliegen, wenn das mögliche Ereignis (E_{rs}, t_{rs}) eintritt. Die beiden Ereignisse (C_{rs}, τ_r) und (E_{rs}, t_{rs}) müssen daher durch die Messbeziehung miteinander verknüpft werden.

Bemerkung: Mit τ_r wird der Zeitpunkt bezeichnet, zu dem die Observable M_r an Q gemessen wird. Dagegen ist t_{rs} der Zeitpunkt, an dem das ablesbare Messergebnis (E_{rs}, t_{rs}) vorliegt, sofern bei der Messung der Wert λ_{rs} herauskommt. Wir können daher annehmen, dass gilt:

$$\tau_r \leq t_{rs} \quad (\text{für alle } (r,s) \in D)$$

Im Normalfall werden die möglichen Messergebnisse für eine Observable stets zu demselben Zeitpunkt vorliegen, d.h. für unterschiedliche Ausprägungen derselben Alternative gilt die Beziehung:

$$t_{rs} = t_{rs'} \quad (\text{mit } (r,s) \in D \text{ und } (r,s') \in D)$$

Wir gehen davon aus, dass eine Messbeziehung im wesentlichen dasselbe ist wie eine Dokumentbeziehung. Ebenso wie letztere besteht auch eine Messbeziehung im allgemeinen nur bedingt. Im Falle des betrachteten Experiments setzen wir daher

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

sowie

$$B_{rs} := U_{-\tau_r} C_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

und nehmen dann (für jedes $(r,s) \in D$) das Bestehen einer Messbeziehung zwischen (C_{rs}, τ_r) und (E_{rs}, t_{rs}) an, wenn gilt:

$$(MB1) \quad \pi_{B_{rs}} L = \pi_{A_{rs}} L$$

Diese Gleichung beschreibt das Bestehen der Messbeziehung unter den experimentellen Voraussetzungen, d.h. unter der Bedingung

$$G = \langle UR \rangle \wedge \langle A_1 \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_q \rangle$$

Wegen der Identität

$$\langle A_{r_s} \rangle = \langle E_{r_s}, t_{r_s} \rangle$$

bezeichnet der Ausdruck $\langle A_{r_s} \rangle$ das mögliche Faktum, dass das Ereignis (E_{r_s}, t_{r_s}) eintritt. Ebenso beschreibt $\langle B_{r_s} \rangle$ das Ereignis (C_{r_s}, τ_r) . Wenn nun die Messbeziehung (MB1) gegeben ist, so entspricht $\langle A_{r_s} \rangle$ dem möglichen Faktum, dass an der Observablen M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{r_s} gemessen wird.

Bemerkung: Ganz allgemein und unabhängig von der Quantentheorie gilt: Jede Messung besteht grundsätzlich aus zwei Schritten. Zum einen muss ein Messergebnis (E, t) beobachtet werden. Dabei ist (E, t) im einfachsten Fall ein makroskopisches Ereignis, welches unmittelbar wahrgenommen werden kann. Zum andern muss es eine Messbeziehung geben zwischen dem beobachteten Messergebnis und dem zu messenden Faktum. Wann eine solche Messbeziehung besteht, ergibt sich stets nur aus der jeweils zugrundegelegten Theorie. Wenn es sich bei dem zu messenden Faktum um ein mikroskopisches Ereignis (C, τ) handelt, so besteht für ein makroskopisches Subjekt prinzipiell keine Möglichkeit zu überprüfen, ob hier eine wirkliche Messung vorliegt und ob also, wenn (E, t) beobachtet wurde, das "gemessene" Ereignis (C, τ) tatsächlich realisiert ist. Es ist allein die Theorie, die darüber entscheidet, wann mit dem Eintreten eines Messergebnisses (E, t) das mikroskopische Ereignis (C, τ) als "gemessen" gelten soll. Grundsätzlich gilt dies für die klassische Physik ebenso wie für die Quantentheorie.

Von den Messbeziehungen für die r -te Observable erwarten wir, dass sie unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen bestehen. Um dies formal auszudrücken, definieren wir wie zuvor für alle $r \in \{0, \dots, R\}$

$$\mathcal{B}_r := \{ \beta : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_{r' \leq r} \beta(r') \in \{1, \dots, S_{r'}\} \}$$

als die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen für die Observablen M_1, \dots, M_r . Ein Element $\beta \in \mathcal{B}_r$ gibt an, welche Ergebnisse in den ersten r Messungen realisiert sind.

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$ setzen wir:

$$L_{\beta, r} := \pi_{A_r, \beta(r)} \cdots \pi_{A_1, \beta(1)} L$$

Wenn die Messbeziehung zwischen (C_{r_s}, τ_r) und (E_{r_s}, t_{r_s}) unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen bestehen soll, so muss für

beliebige Ergebniskonstellationen $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ gelten:

$$(MB) \quad \pi_{B_{rs}} L_{\beta, r-1} = \pi_{A_{rs}} L_{\beta, r-1}$$

Die Gleichung (MB) gilt für alle $r \in \{1, \dots, R\}$ (für alle gemessenen Observablen), für alle $s \in \{1, \dots, S_r\}$ (für jeden möglichen Wert dieser Observablen) und für alle $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ (d.h. für alle Ergebniskonstellationen der Observablen M_1 bis M_{r-1}).

Bemerkung: Aufgrund der angenommenen t-Zugänglichkeit ändert sich an dem Ausdruck

$$\pi_{A_{r, \beta(r)}} \cdots \pi_{A_{1, \beta(1)}} L$$

nichts, wenn man die Reihenfolge der darin auftretenden Faktoren $\pi_{A_{k, \beta(k)}}$ nach Belieben ändert (vgl. T.39.2).

Bemerkung: Aus der Unabhängigkeit der Messbeziehung zwischen (C_{rs}, τ_r) und (E_{rs}, t_{rs}) von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen folgt nicht nur die Beziehung (MB), sondern allgemeiner die Gleichung

$$(MB') \quad \pi_{B_{rs}} L' = \pi_{A_{rs}} L'$$

sofern man L' analog zu $L_{\beta, r-1}$ definiert, dabei aber nur eine Teilfolge der Faktoren $\pi_{A_{k, \beta(k)}}$ verwendet, die in der Definition von $L_{\beta, r-1}$ auftreten. Auch L' ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Faktoren angeordnet sind (vgl. T.39.3).

Bemerkung: Ebenso wie Dokumentbeziehungen gelten auch Messbeziehungen in der Praxis stets nur annäherungsweise.

Bemerkung: Die oben eingeführten Bedingungen (EX1) und (EX2) müssen im Falle eines Quantenexperiments der hier beschriebenen Art nicht explizit angenommen werden, da sie sich aus den Messbeziehungen (MB) ableiten lassen (vgl. T.39.4 und T.39.5).

Der Unterschied zwischen den durch (MB) angegebenen Messbeziehungen einerseits und den früher diskutierten Dokumentbeziehungen andererseits liegt vor allem darin,

- dass die gemessenen Ereignisse im allgemeinen nicht zu den empirisch zugänglichen Ereignissen des makroskopischen Kontextes gehören
- und dass die Messbeziehungen nicht unabhängig von den Ergebnissen der nachfolgenden Messungen sein müssen.

Die Tatsache, dass Messbeziehungen im allgemeinen nicht unabhängig sind von den Ergebnissen der nachfolgenden Messungen, wollen wir an einem Beispiel erläutern. Dazu gehen wir von einem räumlichen Koordinatensystem

(x, y, z) aus und betrachten eine Quelle, welche Elektronen in der Richtung der x -Achse ("nach rechts") emittiert.

Die Elektronen treffen auf ein Spin-Filter, welches die Teilchen in Abhängigkeit von ihrem y -Spin in Richtung der y -Achse nach oben bzw. nach unten ablenkt. Jeder der beiden entstehenden Teilstrahlen durchquert anschließend ein zweites Spin-Filter, das die Teilchen in Abhängigkeit von ihrem z -Spin in Richtung der z -Achse nach hinten bzw. nach vorn ablenkt.

Nach dem Passieren der beiden Filter wird jedes Elektron durch eine entsprechende Vorrichtung aufgefangen und sein Ort wird registriert. Dies geschieht in einer solchen Weise, dass die Information von einem makroskopischen Subjekt zu einem Zeitpunkt t abgelesen werden kann.

Es bezeichne Y' den Unterraum von \mathcal{H} , der dem y -Spin "up" des betrachteten Elektrons entspricht, und τ_y den Zeitpunkt, an dem das Teilchen sich vor dem ersten Filter befindet. Ebenso sei Z' der Unterraum, der dem z -Spin "up" entspricht, und τ_z der Zeitpunkt, an dem sich das Elektron vor dem zweiten Filter befindet.

Die Registrierung der Messergebnisse führt zu makroskopischen "Dokumenten" (E', t) für das Ereignis (Y', τ_y) und (F', t) für das Ereignis (Z', τ_z). Wir setzen:

$$Y := U_{-\tau_y} Y'$$

$$Z := U_{-\tau_z} Z'$$

sowie

$$E := U_{-t} E'$$

$$F := U_{-t} F'$$

Wenn der Operator L wie zuvor die Voraussetzungen des Experiments beschreibt, so lauten die Messbeziehungen:

$$(1) \quad \pi_Y L = \pi_E L$$

$$(2) \quad \pi_Z L = \pi_F L$$

Die Beziehung (2) besteht unabhängig von dem Ergebnis der vorangegangenen Messung des y -Spins. Es gilt daher auch:

$$(3) \quad \pi_Z \pi_E L = \pi_F \pi_E L$$

Wäre nun die Messbeziehung zwischen dem y -Spin "up" und dem Ereignis (E', t) auch unabhängig vom Ergebnis der nachfolgenden Messung des z -Spins, so müsste darüber hinaus gelten:

$$(4) \quad \pi_Y \pi_F L = \pi_E \pi_F L$$

Da E und F miteinander vertauschbar sind, folgt aus den Aussagen (1) bis (4) die Beziehung:

$$(5) \quad \pi_Y \pi_Z L = \pi_Z \pi_Y L$$

Diese Gleichung kann jedoch nicht gelten, da die Terme auf den beiden Seiten – wenn man sie bezieht auf das Subsystem Q, welches allein den Spin des Elektrons beschreibt – zwei verschiedenen (reinen) Spin-Zuständen entsprechen (vgl. T.39.6). Damit ist gezeigt, dass die Messbeziehung zwischen dem y-Spin "up" und dem Ereignis (E',t) nicht unabhängig sein kann vom Ergebnis der nachfolgenden Messung des z-Spins.

Wir wollen nun diskutieren, welche Rolle die oben eingeführten Quantenzustände im Zusammenhang mit den Messungen spielen, die im Rahmen eines Quantenexperiments durchgeführt werden. Dazu definieren wir die Folge

$$\mathcal{G}_0 := ((E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q))$$

Außerdem definieren wir für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$

$$\mathcal{G}_{\beta, r} := \mathcal{G}_0 \cup ((E_{1, \beta(1)}, t_{1, \beta(1)}), \dots, (E_{r, \beta(r)}, t_{r, \beta(r)}))$$

als Zusammenfügung zweier Teilfolgen. Speziell gilt dann:

$$\mathcal{G}_{\beta, 0} = \mathcal{G}_0$$

Die Folge $\mathcal{G}_{\beta, r}$ enthält neben den Voraussetzungen des Experiments auch die Ergebnisse zu den ersten r Alternativen, und zwar jene, die durch die Ergebniskonstellatation β vorgegeben sind. Somit ist

$$W_{Q; \tau | \mathcal{G}_{\beta, r}}$$

der Zustand des Subsystems Q zur Zeit τ unter der Bedingung, dass einerseits die Voraussetzungen des Experiments vorliegen und dass andererseits in den ersten r Messungen die durch β angegebenen Resultate herausgekommen sind.

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$ setzen wir

$$Y_{\beta, r} := \langle A_{1, \beta(1)} \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_{r, \beta(r)} \rangle$$

Dies ist das mögliche Faktum, dass bei den ersten r Messungen die durch β vorgegebenen Ergebnisse herauskommen, und es gilt:

$$Y_{\beta, r} \in \mathcal{A}_e$$

Speziell ist dabei

$$Y_{\beta, 0} = \Omega$$

Es ist $\langle A_{rs} \rangle$ das mögliche Faktum, dass für die Observable M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{rs} gemessen wird. Hierfür erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsaussage (vgl. T.39.7):

$$(PR) \quad P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

Sie gilt für alle $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$.

Wir skizzieren kurz den Beweis dieser Aussage. Für jeden statistischen Operator W auf \mathcal{H} und jeden Unterraum $F < \mathcal{H}_Q$ gilt mit $C := \alpha_Q(F)$ die Gleichung:

$$(*) \quad \text{tr } \pi_C W = \text{tr } \pi_F \text{tr}_Q[W]$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} L' &:= L_{\beta, r-1} \\ L'' &:= \pi_{A_{rs}} L' \\ W' &:= L'(L')^* / \text{tr } L'(L')^* \end{aligned}$$

sowie

$$(W')_{\tau_r} := U_{\tau_r} W' U_{-\tau_r}$$

In Analogie zu der Beziehung (+), die wir im Kapitel über das Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem makroskopischen Experiment angegeben haben, gelten

$$P_e(Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } L'(L')^* / \text{tr } LL^*$$

und

$$P_e(\langle A_{rs} \rangle \wedge Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } L''(L'')^* / \text{tr } LL^*$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) &= \text{tr } L''(L'')^* / \text{tr } L'(L')^* \\ &= \text{tr } \pi_{A_{rs}} W' \\ &= \text{tr } \pi_{B_{rs}} W' && \text{(wegen (MB))} \\ &= \text{tr } \pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} && \text{(da } B_{rs} = U_{-\tau_r} C_{rs}) \\ &= \text{tr } \pi_{F_{rs}} \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}] && \text{(mit (*) wegen } C_{rs} = \alpha_Q(F_{rs})) \\ &= \text{tr } \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}} && \text{(Definition des Zustands)} \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen (QED).

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (PR) kann ausführlich geschrieben werden als:

$$P_e(\langle A_{rs} \rangle | \langle A_{1, \beta(1)} \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_{r-1, \beta(r-1)} \rangle)$$

Er stellt die bedingte Wahrscheinlichkeit dar für das Ereignis, dass am Subsystem Q zur Zeit τ_r für die Observable M_r der Wert λ_{rs} gemessen wird, unter der Bedingung, dass bei den vorangegangenen Messungen die durch β angegebenen Resultate herausgekommen sind. Der rechts in (PR) auftretende Ausdruck

$$W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}}$$

ist der bedingte Zustand von Q zur Zeit τ_r unter der gleichen Bedingung (sowie den Voraussetzungen des Experiments).

Die Gleichung (PR) ist die aus dem Formalismus der Quantentheorie bekannte Formel, mit der bei gegebenem Zustand die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass bei der Messung der r -ten Observablen der Wert λ_{rs} herauskommt. Der durch die Ergebnisse der vorangegangenen Messungen bedingte Zustand von Q zur Zeit τ_r erlaubt die Bestimmung der (durch dieselben Ergebnisse) bedingten Wahrscheinlichkeit dafür, bei der r -ten Messung an Q den Wert λ_{rs} zu erhalten.

Wir befassen uns nun mit der Frage, inwiefern es durch eine Messung zu einer Änderung des Zustands kommt. Hierzu nehmen wir an, dass für alle $(r,s) \in D$ mit $r < R$ gilt:

$$(**) \quad \tau_r \leq t_{rs} \leq \tau_{r+1}$$

Dies besagt, dass der Zeitpunkt, an dem das ablesbare Messergebnis (E_{rs}, t_{rs}) vorliegt, nicht nur nach dem Zeitpunkt liegt, zu dem die Observable M_r gemessen wird (was ohnehin üblicherweise anzunehmen ist), sondern auch vor dem Zeitpunkt, zu dem die nächste Observable M_{r+1} gemessen werden soll.

Wir denken hierbei insbesondere an den Fall, dass Subjekte den gesamten Prozess kontinuierlich beobachten, so dass die Ablesung eines Messergebnisses immer schon dann erfolgt, wenn dieses Ergebnis vorliegt, und somit vor dem Zeitpunkt abgeschlossen ist, zu dem die nächste Observable gemessen wird.

Bemerkung: Plausibel, aber nicht notwendig, ist hier wiederum die Annahme, dass die möglichen Messergebnisse zu einer Observablen stets zu demselben Zeitpunkt vorliegen, dass es also Werte t_r gibt mit

$$t_{rs} = t_r \quad (\text{für alle } (r,s) \in D)$$

In diesem Fall ist die Bedingung (**) äquivalent zu:

$$\tau_1 \leq t_1 \leq \tau_2 \leq t_2 \dots \leq \tau_R \leq t_R$$

Vor Durchführung der r -ten Messung sind die Ergebnisse der $r-1$ vorangegangenen Messungen bekannt. Sie werden durch eine Ergebniskonstellation $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ beschrieben. In dieser Situation interessieren die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung $Y_{\beta,r-1}$. Sie können berechnet werden

mittels des bedingten Zustands

$$\underline{W}' := W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}}$$

Für ein Subjekt, das (neben den Voraussetzungen des Experiments) nur die Ergebnisse der vorangegangenen Messungen kennt, ist dies "der" Zustand des Subsystems Q zum Zeitpunkt τ_r .

Nach erfolgreicher Durchführung der r-ten Messung ist auch deren Ergebnis bekannt. Wenn der Wert λ_{rs} (und somit die s-te Ausprägung der r-ten Alternative) herausgekommen ist, so ist damit zusätzlich das Faktum $\langle A_{rs} \rangle$ bekannt. Es interessieren nun die durch $Y_{\beta,r-1} \wedge \langle A_{rs} \rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten. Sie können mit Hilfe des bedingten Zustands

$$\underline{W}'' := W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}''}$$

berechnet werden, wenn man

$$\mathcal{G}'' := \mathcal{G}_{\beta,r-1} \cup ((E_{rs}, t_{rs}))$$

als Zusammenfügung zweier Folgen definiert. \underline{W}'' ist der Zustand des Subsystems Q zur Zeit τ_r für ein Subjekt, das neben den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen nun auch das Ergebnis der r-ten Messung kennt.

Mit $F := F_{rs}$ gilt die Gleichung

$$(ST) \quad \underline{W}'' = \pi_F \underline{W}' \pi_F / \text{tr}(\pi_F \underline{W}' \pi_F)$$

(vgl. T.39.8) und somit die aus dem Formalismus der Quantentheorie bekannte Formel zur Bestimmung des neuen Quantenzustands aus dem alten, wenn an der Observablen M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{rs} gemessen wurde.

Die Gleichung (ST) lässt sich ausführlich schreiben als:

$$\begin{aligned} & W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1} \cup ((E_{rs}, t_{rs}))} \\ &= \pi_{F_{rs}} W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}} \pi_{F_{rs}} / \text{tr}(\pi_{F_{rs}} W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}} \pi_{F_{rs}}) \end{aligned}$$

Sie gilt für alle $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$.

Wir skizzieren den Beweis der Gleichung (ST). Es seien:

$$\begin{aligned} L' &:= L_{\beta,r-1} \\ W' &:= L'(L')^* / \text{tr} L'(L')^* \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} L'' &:= \pi_{A_{rs}} L' \\ W'' &:= L''(L'')^* / \text{tr} L''(L'')^* \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition bedingter Zustände erhalten wir damit:

$$\underline{W}' = \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}]$$

$$\underline{W}'' = \text{tr}_Q[(W'')_{\tau_r}]$$

Wegen der Messbeziehung (MB) gilt außerdem:

$$L'' = \pi_{B_{rs}} L'$$

Daraus folgt:

$$W'' = \pi_{B_{rs}} W' \pi_{B_{rs}} / \text{tr}(\pi_{B_{rs}} W' \pi_{B_{rs}})$$

Wegen $B_{rs} = U_{-\tau_r} C_{rs}$ erhalten wir weiter:

$$(W'')_{\tau_r} = \pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}} / \text{tr}(\pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}})$$

Mit der Beziehung (*) folgt dann wegen $C_{rs} = \alpha_Q(F)$

$$\underline{W}'' = \pi_F \underline{W}' \pi_F / \text{tr}(\pi_F \underline{W}' \pi_F)$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen (QED).

Die Ablesung des Messergebnisses zum Zeitpunkt t_{rs} führt hier nicht zu einer sprunghaften Änderung "des Zustands" in einem objektiven Sinne. Was sich ändert, ist vielmehr das Wissen des Subjekts und damit auch sein Interesse. Wenn das Subjekt das Ergebnis der Messung zur Kenntnis nimmt, so richtet sich sein Interesse anschließend auf einen anderen (bedingten) Zustand als zuvor, auf jenen Zustand nämlich, der bedingt ist durch die Ereignisfolge \mathcal{G}'' , welche seinem neuen Wissensstand entspricht. Zugleich richtet sich sein Interesse auch auf jene (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, die durch das der Folge \mathcal{G}'' entsprechende mögliche Faktum

$$Y_{\beta, r-1} \wedge \langle A_{rs} \rangle$$

bedingt sind.

Diese Überlegungen, und insbesondere die Gleichungen (PR) und (ST), zeigen, dass ein makroskopisches Subjekt, wenn es den bekannten quantentheoretischen Zustandskalkül verwendet, zu korrekten Wahrscheinlichkeitsaussagen gelangt. Sie zeigen aber auch, dass der "Zustandsübergang" aufgrund einer Messung keine Änderung einer physikalischen Eigenschaft des betrachteten Objekts darstellt, wie es eine Deutung im Sinne des "Zustandsrealismus" nahelegen würde.

Anmerkung 1

Wie wir gesehen haben, erfolgt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das mögliche Faktum $\langle A_{rs} \rangle$, dass für die Observable M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{rs}

gemessen wird, mit der Gleichung

$$(PR) \quad P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr} \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

In dem Ausdruck

$$Y_{\beta, r-1} := \langle A_{1, \beta(1)} \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_{r-1, \beta(r-1)} \rangle$$

kann man dabei die einzelnen Ereignisse vertauschen, ohne dass sich an dem Wert des Ausdrucks

$$P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1})$$

etwas ändert.

Anders verhält es sich auf der rechten Seite der Gleichung. In der Folge

$$G_{\beta, r-1} := G_0 \cup ((E_{1, \beta(1)}, t_{1, \beta(1)}), \dots, (E_{r-1, \beta(r-1)}, t_{r-1, \beta(r-1)}))$$

dürfen nicht einfach alle Ereignisse miteinander vertauscht werden, da die Definition eines bedingten Quantenzustands von der (geordneten) Folge der Ereignisse abhängt. Wenn

$$G_{\beta, r-1} = ((G_1, s_1), \dots, (G_n, s_n))$$

ist, so wird der hier interessierende bedingte Quantenzustand definiert mittels

$$A_j := U_{-s_j} G_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\})$$

$$L := \pi_{A_n} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$W := LL^* / \text{tr}(LL^*)$$

sowie

$$W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}} := \text{tr}_Q[U_{\tau_r} W U_{-\tau_r}]$$

In dem Ausdruck für L kommt es auf die Reihenfolge der im allgemeinen nicht vertauschbaren Projektionsoperatoren an. Die Gleichung (PR) gilt nur dann, wenn hier eine korrekte Reihenfolge gewählt wird. Zulässig ist dabei jede Reihenfolge, welche die Abhängigkeiten berücksichtigt, die zwischen den Dokumentbeziehungen bestehen. Diese Dokumentbeziehungen bilden ihrerseits die Grundlage für die Auswertbarkeit des makroskopischen Experiments zu einem geeigneten Zeitpunkt t .

Wir können in diesem Zusammenhang eine *Folge*

$$G = ((G_1, s_1), \dots, (G_n, s_n))$$

von Ereignissen als ein *angeordnetes* empirisches Material bezeichnen, während die zugehörige *Menge*

$$\{(G_1, s_1), \dots, (G_n, s_n)\} \in M$$

ein *ungeordnetes* empirisches Material darstellt. Das Wissen eines Subjekts entspricht stets einem solchen ungeordneten empirischen Material.

Anmerkung 2

In der Gleichung

$$(PR) \quad P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

beschreibt die Ereignisfolge $G_{\beta, r-1}$ alle Voraussetzungen des Experiments einschließlich des Vorhandenseins des Messgeräts, welches für alle $s \in \{1, \dots, S_r\}$ die Messbeziehung zwischen (C_{rs}, τ_r) und (E_{rs}, t_{rs}) herstellt. Die Ereignisfolge G^* unterscheidet sich von $G_{\beta, r-1}$ nur darin, dass sie eine Situation beschreibt, in der dieses Messgerät nicht vorhanden ist. Falls nun

$$W_{Q; \tau_r | G^*} = W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

ist, so hängt der Zustand des Subsystems Q zur Zeit τ_r nicht davon ab, ob das Messgerät aufgebaut wurde oder nicht. Dies ist die Situation, in der wir sinnvollerweise überhaupt von einem "Messgerät" sprechen können. In diesem Fall kann man sagen, dass der Zustand durch die mit G^* beschriebenen Bedingungen präpariert worden ist. Es ist gerade dieser Fall, um den es in dem bekannten Quantenformalismus geht: Der präparierte Zustand hängt hier typischerweise nicht davon ab, ob das Messgerät vorhanden ist und welche Eigenschaft es gegebenenfalls misst (z.B. welche Spinrichtung).

Zusammenfassung

In einem Quantenexperiment werden an einem Subsystem nacheinander mehrere Observable gemessen.

Ein Quantenexperiment ist ein spezielles makroskopisches Experiment. Zwischen den Werten der zu messenden Observablen und den Ausprägungen der Alternativen dieses makroskopischen Experiments bestehen Messbeziehungen.

Messbeziehungen haben grundsätzlich dieselbe Form wie Dokumentbeziehungen.

Die Messbeziehungen zu jeder der Observablen sind unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen.

Im allgemeinen sind die Messbeziehungen aber – anders als man es von Dokumentbeziehungen erwartet – nicht unabhängig von den Ergebnissen der nachfolgenden Messungen.

Dass an der Observablen M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{rs} gemessen wird, ist ein mögliches Faktum $\langle A_{rs} \rangle$. Als solches ist es ein Element von \mathcal{A}_e , der Algebra der möglichen Ergebnisse des Experiments.

Es gilt die aus dem Formalismus der Quantentheorie bekannte Formel:

$$(PR) \quad P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr} \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

Links steht dabei die bedingte Wahrscheinlichkeit für das mögliche Faktum, dass an der Observablen M_r zur Zeit τ_r der Wert λ_{rs} gemessen wird, unter der Bedingung, dass die Ergebnisse der vorangegangenen Messungen durch die Ergebniskonstellation β gegeben sind. Der Unterraum F_{rs} ist der zu dem Eigenwert λ_{rs} des Operators M_r gehörende Eigenraum. Der rechts auftretende Ausdruck

$$W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

bezeichnet den bedingten Zustand von Q zur Zeit τ_r unter der Bedingung, dass einerseits die Voraussetzungen des Experiments gegeben sind und andererseits die vorangegangenen Messungen zu den durch β gegebenen Ergebnissen geführt haben.

Vor Durchführung der r -ten Messung interessieren die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der Bedingung $Y_{\beta, r-1}$. Sie können berechnet werden mittels des bedingten Zustands

$$\underline{W}' := W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1}}$$

Wenn dann bei der r -ten Messung der Wert λ_{rs} herausgekommen ist, so interessieren die durch $Y_{\beta, r-1} \wedge \langle A_{rs} \rangle$ bedingten Wahrscheinlichkeiten. Sie lassen sich berechnen mit Hilfe des bedingten Zustands

$$\underline{W}'' := W_{Q; \tau_r | G_{\beta, r-1} \cup ((E_{rs}, t_{rs}))}$$

Dabei entspricht das Ereignis (E_{rs}, t_{rs}) dem Vorliegen des zu λ_{rs} gehörenden Messergebnisses.

Zwischen den genannten Zuständen besteht die aus dem Formalismus der Quantentheorie bekannte Beziehung:

$$(ST) \quad \underline{W}'' = \pi_{F_{rs}} \underline{W}' \pi_{F_{rs}} / \text{tr}(\pi_{F_{rs}} \underline{W}' \pi_{F_{rs}})$$

Diese Überlegungen zeigen, dass ein makroskopisches Subjekt, wenn es den bekannten Zustandskalkül verwendet, zu korrekten Wahrscheinlichkeitsaussagen gelangt, dass jedoch der aufgrund einer Messung erfolgende sprunghafte "Zustandsübergang" keine Änderung einer physikalischen Eigenschaft des betrachteten Objekts bedeutet.

40. Anmerkungen zu Messungen an Quantensystemen

Anmerkung 1

Wir sind bisher davon ausgegangen, dass in einem Quantenexperiment zu jeder Observablen und zu jedem ihrer möglichen Werte (das heißt: zu jedem $(r,s) \in D$) ein Ereignis (E_{rs}, t_{rs}) als Messergebnis existiert und dass entsprechende Messbeziehungen bestehen. Im allgemeinen muss dies aber nicht so sein. Vielmehr kann der Fall eintreten, dass (zu jeder Observablen) nur einem Teil der möglichen Werte ein Messergebnis zugeordnet ist. Formal bedeutet dies: Es gibt eine Teilmenge $D' \subset D$, so dass (nur) zu allen $(r,s) \in D'$ ein Ereignis (E_{rs}, t_{rs}) als Messergebnis vorhanden ist, für das eine Messbeziehung besteht.

In diesem Fall gelten die Aussagen (PR) und (ST) entsprechend eingeschränkt, d.h. nur für jene $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$, die die Bedingungen:

$$(r,s) \in D'$$

und

$$(k, \beta(k)) \in D' \quad (\text{für alle } k \in \{1, \dots, r-1\})$$

erfüllen. Voraussetzung hierfür ist, dass die Messbeziehungen ebenfalls entsprechend eingeschränkt, dann aber in der oben angegebenen erweiterten Form (MB') angenommen werden.

Anmerkung 2

Wir hatten vorausgesetzt, dass die r -te Messung stets dieselbe Observable M_r betrifft, unabhängig von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen. Im allgemeinen Fall muss dies aber nicht so sein. Es kann vielmehr zu jeder Ergebniskonstellation $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ bei der r -ten Messung eine andere Observable $M_{\beta r}$ betrachtet werden. Beispielsweise könnte man das im letzten Kapitel diskutierte Experiment so abändern, dass in einem der beiden durch das erste Filter erzeugten Teilstrahlen anstelle des Spins in z -Richtung der Spin in einer z' -Richtung gemessen wird, die gegenüber der z -Richtung einen Winkel von $\theta \neq 0^\circ$ aufweist.

Der Operator $M_{\beta r}$ hat eine Spektraldarstellung

$$M_{\beta r} = \sum_s \lambda_{\beta r s} \pi_{F_{\beta r s}}$$

wobei s den Indexbereich $\{1, \dots, S_{\beta r}\}$ durchläuft. Dabei ist $S_{\beta r}$ die Anzahl der möglichen Werte der Observablen $M_{\beta r}$. Die Messung von $M_{\beta r}$ findet statt zu einem Zeitpunkt $\tau_{\beta r}$. Die zugehörigen Messergebnisse seien $(E_{\beta r s}, t_{\beta r s})$. Die Voraussetzungen des Experiments werden wiederum durch die Ereignisse

(E_j, t_j) beschrieben. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} A_{\beta rs} &:= U_{-t_{\beta rs}} E_{\beta rs} \\ C_{\beta rs} &:= \alpha_Q(F_{\beta rs}) \\ B_{\beta rs} &:= U_{-t_{\beta r}} C_{\beta rs} \\ A_j &:= U_{-t_j} E_j \\ L &:= \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \end{aligned}$$

sowie

$$L_{\beta, r-1} := \pi_{A_{\beta, r-1, \beta(r-1)}} \cdots \pi_{A_{\beta, 1, \beta(1)}} L$$

lautet dann die Messbeziehung:

$$(MB) \quad \pi_{A_{\beta rs}} L_{\beta, r-1} = \pi_{B_{\beta rs}} L_{\beta, r-1}$$

Sie muss für alle $r \in \{1, \dots, R\}$, $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ und $s \in \{1, \dots, S_{\beta r}\}$ gelten. An die Stelle der Unabhängigkeit der Messbeziehungen von den Ergebnissen der vorangegangenen Messungen tritt hier die explizite Abhängigkeit von eben diesen Messergebnissen.

Die Menge der Ergebniskonstellationen ist hier rekursiv zu definieren durch die folgende Aussage: Eine Abbildung

$$\underline{\beta} : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N}$$

gehört zu \mathcal{B}_r genau dann, wenn für ihre Restriktion auf die Indexmenge $\{1, \dots, r-1\}$, d.h. für

$$\beta := \underline{\beta}|_{\{1, \dots, r-1\}}$$

die Aussage

$$\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$$

und darüber hinaus

$$\underline{\beta}(r) \in \{1, \dots, S_{\beta r}\}$$

gilt.

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} Y_{\beta, r-1} &:= \langle A_{\beta, 1, \beta(1)} \rangle \wedge \cdots \wedge \langle A_{\beta, r-1, \beta(r-1)} \rangle \\ \mathcal{G}_0 &:= ((E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q)) \\ \mathcal{G}_{\beta, r-1} &:= \mathcal{G}_0 \cup ((E_{\beta, 1, \beta(1)}, t_{\beta, 1, \beta(1)}), \dots, (E_{\beta, r-1, \beta(r-1)}, t_{\beta, r-1, \beta(r-1)})) \end{aligned}$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsaussage (PR) in der Form

$$(PR) \quad P_e(\langle A_{\beta rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr} \pi_{F_{\beta rs}} W_{Q; \tau_{\beta r} | \mathcal{G}_{\beta, r-1}}$$

Sie gilt für alle $r \in \{1, \dots, R\}$, $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ und $s \in \{1, \dots, S_{\beta r}\}$. Mit den weiteren Definitionen

$$\underline{W}' := W_{Q; \tau_{\beta r} | \mathcal{G}_{\beta, r-1}}$$

und

$$\underline{W}'' := W_{Q; \tau_{\beta r} | \mathcal{G}_{\beta, r-1} \cup ((E_{\beta rs}, t_{\beta rs}))}$$

sowie

$$F := F_{\beta rs}$$

erhalten wir die Beziehung

$$(ST) \quad \underline{W}'' = \pi_F \underline{W}' \pi_F / \text{tr}(\pi_F \underline{W}' \pi_F)$$

zur Bestimmung des neuen Quantenzustands aus dem alten, wenn an der Observablen $M_{\beta r}$ zur Zeit $\tau_{\beta r}$ der Wert $\lambda_{\beta rs}$ gemessen wurde. Sie gilt ebenfalls für alle $r \in \{1, \dots, R\}$, $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ und $s \in \{1, \dots, S_{\beta r}\}$.

Bemerkung: In dem hier betrachteten Ansatz ist auch der Fall enthalten, dass bei bestimmten Ergebniskonstellationen β der vorangegangenen Messungen bei der r -ten Messung gar keine Observable betrachtet wird. Für diesen Fall kann $M_{\beta r} = 0$ gesetzt werden. Man hat dann $S_{\beta r} = 1$, $F_{\beta r1} = \mathcal{H}_Q$ und $\lambda_{\beta r1} = 0$ sowie $E_{\beta r1} = \mathcal{H}$. Die Zeitpunkte $\tau_{\beta r}$ und $t_{\beta r1}$ sind dabei beliebig wählbar.

Anmerkung 3

Im vorangegangenen Kapitel haben wir den Standardfall des Formalismus der Quantentheorie diskutiert, in dem nacheinander mehrere Observable jeweils vollständig gemessen werden. Die in den Anmerkungen 1 und 2 beschriebenen Fälle stellen Erweiterungen dieses Standardfalles dar. Es ist auch die Kombination dieser beiden Fälle möglich, das heißt es kann der Fall eintreten, dass zu jeder Konstellation der vorangegangenen Messergebnisse eine andere Observable betrachtet wird und dass jeweils nur einem Teil der möglichen Werte dieser Observablen ein Messergebnis zugeordnet ist, für das die entsprechende Messbeziehung besteht. Auch hierfür gelten die Aussagen (PR) und (ST) in entsprechender Formulierung.

Anmerkung 4

Im Formalismus der Quantentheorie werden Aussagen über ein Quantensystem nur in Bezug auf zwei Randfälle gemacht:

- den Fall, dass das Verhalten des Quantensystems durch eine Schrödinger-gleichung beschrieben werden kann,
- den Fall, dass eine Messung an dem Quantensystem stattfindet.

Dabei wird im Fall einer Messung nicht klar unterschieden zwischen der mit dem Messprozess verbundenen Wechselwirkung des Quantensystems mit seiner Umgebung einerseits und den Konsequenzen der Ablesung eines Messergebnisses andererseits. Andere Verhältnisse als die beiden genannten Randfälle können im Formalismus der Quantentheorie nur dadurch beschrieben werden, dass ein umfassenderes Quantensystem und dessen Zustand betrachtet wird.

In unserer Darstellung der Quantentheorie wird jede Eigenschaft eines Quantensystems zugleich als Eigenschaft des Universums aufgefasst. Es ist daher möglich, die verschiedenen Fälle von einem einheitlichen Standpunkt aus zu betrachten. Zu diesen Fällen zählen unter anderem:

- der Fall, dass sich die Bewegung eines Quantensystems (näherungsweise) durch eine Schrödinger-gleichung beschreiben lässt,
- der Fall einer "Zustandsänderung" (im Sinne eines Wechsels des für ein Subjekt relevanten bedingten Zustands) aufgrund der Ablesung eines Messergebnisses,
- der Fall der objektiven Änderung eines bestimmten bedingten Zustands eines Quantensystems (ohne dass sich die Bedingung ändert) durch eine Wechselwirkung mit dem Rest der Welt.

Zu dem zuletzt genannten Fall gehören insbesondere:

- das Vorliegen einer Messwechselwirkung, ohne dass ein Messergebnis abgelesen wird,
- das Phänomen der "Dekohärenz"
- sowie alle anderen "Störungen" der unabhängigen Bewegung eines Quantensystems.

Die hier vertretene Darstellung der Quantentheorie ermöglicht eine klare Unterscheidung zwischen Messwechselwirkungen einerseits und den Konsequenzen der Ablesung eines Messergebnisses andererseits.

Anmerkung 5

Der Wechsel des für ein Subjekt relevanten Zustands bei der Ablesung eines Messergebnisses betrifft den Zustand zu einem Zeitpunkt τ_r . Es ist möglich, dass die Bewegung des Quantensystems anschließend (d.h. im Intervall $[\tau_r, \tau_{r+1}]$) durch eine Schrödinger-gleichung beschreibbar ist. Der Fall, dass dies

für alle r gilt, ist von besonderem Interesse: Man kann dann die Zustandsänderungen abwechselnd mit der Schrödingergleichung und mit der Gleichung (ST) beschreiben, wobei stets nur "der Zustand" des Quantensystems im Zentrum der Betrachtung steht.

Im Sinne eines Zustandsrealismus kann so der Eindruck entstehen, es handle sich im Grunde um zwei vergleichbare Vorgänge: einerseits um eine ungestörte Bewegung und andererseits um eine Zustandsänderung durch Messung einer Observablen am betrachteten System. Man könnte sogar vermuten, es gebe überhaupt nur diese beiden Möglichkeiten: Jede Störung der unabhängigen Bewegung wäre dann als ein Messvorgang zu deuten.

Diese Vorstellungen lassen sich nicht aufrechterhalten. Nicht bei jeder Störung der unabhängigen, durch eine Schrödingergleichung beschreibbaren Bewegung handelt es sich um eine Messung. Ein Zustandswechsel durch Messung im Sinne der Gleichung (ST) tritt nur ein im Falle der Ablesung des Messergebnisses, die zur Folge hat, dass sich das Wissen des ablesenden Subjekts und damit die Bedingung des für dieses Subjekt relevanten Zustands ändert. Es ändert sich dabei nicht "der Zustand" als solcher, sondern das Interesse richtet sich nach der Messung auf einen anderen (bedingten) Zustand.

Außerdem kann die Beschreibung der Bewegung eines Quantensystems mittels einer Schrödingergleichung im realen Universum stets nur annäherungsweise erfolgen. Eine Bewegung nach der Schrödingergleichung im exakten Sinne gibt es (außer für das Universum als ganzes) nicht. Der Anschein, dass es derartige (rückwirkungsfreie) Bewegungen geben könne, entsteht möglicherweise dadurch, dass man die Quantentheorie meist auf mikroskopische Objekte anwendet, deren Umgebung durch makroskopische Fakten beschrieben wird. Einen prinzipiellen Unterschied zwischen mikroskopischen und makroskopischen Fakten gibt es allerdings nicht.

Anmerkung 6

Der Quantenformalismus lässt sich in völlig analoger Weise auch auf den Fall der klassischen Mechanik anwenden. Dazu muss man den Quantenzustand ersetzen durch den oben definierten probabilistischen Zustand der klassischen Mechanik. Außerdem müssen Projektionsoperatoren durch Indikatorfunktionen, die Schrödingergleichung durch das klassische Bewegungsgesetz und die Spurbildung durch die Bildung von Lebesgue-Integralen ersetzt werden.

41. Subjektbezogene Quantenzustände

Ein Subjekt schreibt einem Subsystem sinnvollerweise denjenigen bedingten Zustand zu, dessen Bedingung dem eigenen empirischen Wissen entspricht (subjektbezogener Quantenzustand). Zugleich interessiert es sich für diejenige bedingte Wahrscheinlichkeit, deren Bedingung ebenfalls seinem Wissen entspricht (subjektbezogene Wahrscheinlichkeit). Es schreibt also dem Subsystem gerade denjenigen (bedingten) Zustand zu, der es ihm gestattet, die interessierenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Mit dem subjektbezogenen Quantenzustand ist hier nicht derjenige gemeint, von dem das Subjekt tatsächlich ausgeht, sondern derjenige, von dem es angesichts seines gegebenen (empirischen) Wissens ausgehen *sollte*. Entsprechendes gilt für subjektbezogene Wahrscheinlichkeiten. Ob das Subjekt die Quantentheorie oder die Wahrscheinlichkeitstheorie kennt und korrekt anwenden kann, ist dabei ohne Belang.

Absolute und bedingte Quantenzustände sind, ebenso wie absolute und bedingte Wahrscheinlichkeiten, objektiv gegebene Größen. Da auch das Wissen eines Subjekts zu einem bestimmten Zeitpunkt objektiv vorhanden ist, sind subjektbezogene Quantenzustände und Wahrscheinlichkeiten ebenfalls objektiv gegeben. An die Stelle eines menschlichen Subjekts kann hier z.B. auch ein Datenträger treten, dessen Inhalte als ein "Wissen" interpretierbar sind.

Bei der Definition des subjektbezogenen Quantenzustands ist von dem empirischen Wissen auszugehen, über das das Subjekt s zu einem Zeitpunkt t verfügt. Dieses Wissen kann – z.B. im Rahmen eines makroskopischen Kontextes – angegeben werden als eine endliche Folge $G_s(t)$ von Ereignissen. Der Zustand des Subsystems Q zur Zeit τ , von dem das Subjekt s zur Zeit t sinnvollerweise ausgehen sollte, d.h. der subjektbezogene Quantenzustand, ist dann gegeben als

$$W_{Q;\tau|G_s(t)}$$

Wenn das Subjekt – im Rahmen einer Messung oder einer anderen Beobachtung – eine zusätzliche Information erhält, so ändert sich hierdurch sein Wissen und damit der Zustand, den es dem System (sinnvollerweise) zuschreibt. Zugleich ändert sich aber auch die Bedingung in der bedingten Wahrscheinlichkeit, für die sich das Subjekt interessiert.

Wenn zum Beispiel das Subjekt s im Zeitintervall $[t,t']$ das zusätzliche Ereignis (E',t') beobachtet, so ist

$$G_s(t'') := G_s(t) \cup ((E',t'))$$

wobei das Symbol \cup hier für die Bildung der Zusammenfügung zweier endlicher Folgen steht. Nach der Beobachtung von (E',t') richtet sich das Interesse

des Subjekts vernünftigerweise nicht mehr auf den durch $G_s(t)$, sondern auf den durch $G_s(t')$ bedingten Zustand.

Diese Änderung des subjektbezogenen Zustands des Quantensystems wird durch den bekannten quantentheoretischen Zustandskalkül beschrieben. Der bei einer Messung auftretende diskontinuierliche "Quantensprung" (die "Reduktion der ψ -Funktion") wird damit erklärt.

Von einer "geisterhaften Fernwirkung" zwischen dem Subjekt und dem System, über das es eine Information erhält, kann dabei nicht die Rede sein: Weder ist der Zustand eine physikalische Eigenschaft des betrachteten Quantensystems, noch ändert sich einer der bedingten Zustände $W_{Q;\tau|G}$ durch die Beobachtung.

Die sprunghafte Änderung des (subjektbezogenen) Zustands des Subsystems Q für das Subjekt s bedeutet keine Änderung einer Eigenschaft von Q, sie ist vielmehr Ausdruck der ebenso sprunghaften Änderung des Wissens des Subjekts und damit des Wechsels seines Interesses.

Zwischen den Änderungen des für ein Subjekt relevanten Quantenzustands einerseits und den entsprechenden Änderungen der für dieses Subjekt relevanten (bedingten) Wahrscheinlichkeiten andererseits besteht eine weitgehende Analogie.

Die Veränderung der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit mit der Zeit kann aus zwei Gründen erfolgen. Zum einen kann ein Ereignis (E,τ) eine andere Wahrscheinlichkeit aufweisen als das Ereignis (E,τ') , d.h. als "dasselbe" Ereignis zu einer anderen Zeit. In diesem Fall erfolgt die Änderung der Wahrscheinlichkeit mit der Zeit normalerweise kontinuierlich. Zum andern kann das Subjekt eine Beobachtung machen, so dass sich sein Wissen ändert. Wenn diese Änderung des Wissens sprunghaft erfolgt, ergibt sich eine ebenso sprunghafte Änderung der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit.

Auch wenn sich diese Wahrscheinlichkeit auf ein weit entferntes Objekt bezieht, ist hier keine "geisterhafte Fernwirkung" im Spiel. Von einer "geistigen Fernbeziehung" könnte man hingegen sprechen, da sich sowohl das Wissen eines Subjekts als auch dessen Änderung auf weit entfernte Gegenstände beziehen kann.

Wie im Falle der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeiten besteht auch bei den Quantenzuständen eine doppelte Abhängigkeit von der Zeit. Zum einen ändert sich (bei fester Bedingung $G_s(t)$) der Zustand, welcher das Subsystem Q zur Zeit τ beschreibt, in Abhängigkeit von τ . Diese Änderung beruht auf der für das Universum als ganzem geltenden Schrödingergleichung und erfolgt in einer stetigen Weise. Zum andern ändert sich der (das Subjekt s betreffende) subjektbezogene Zustand aber auch dann, wenn sich das Wissen des Subjekts ändert, etwa wenn s bis zum Zeitpunkt t' zusätzlich das Ereignis (E',t') beobachtet. In

diesem Fall sollte das Subjekt zum Zeitpunkt t' sinnvollerweise nicht mehr von

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_S(t)}$$

sondern von dem neuen bedingten Zustand

$$W_{Q;\tau|\mathcal{G}_S(t')}$$

ausgehen.

Anmerkung 1

Ein sprunghafter Wechsel des für ein Subjekt relevanten bedingten Quantenzustands (ein "Quantensprung") erfolgt nicht nur dann, wenn das Subjekt selbst ein Messergebnis abliest oder eine andere Beobachtung macht. Derselbe Wechsel findet auch dann statt, wenn das Subjekt die neue Information auf andere Weise erhält, z.B. durch eine Mitteilung. Falls das Subjekt die erhaltene Information (oder das selbst abgelesene Messergebnis) später wieder vergisst, wird der ursprüngliche bedingte Zustand für das Subjekt erneut relevant. In Analogie zum Begriff des "Quantensprungs" könnte man in diesem Fall von einem "Quanten-Rücksprung" sprechen.

Anmerkung 2

Der Wechsel des Zustands bei der Ablesung eines Messergebnisses oder einer anderen Beobachtung findet normalerweise zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer sprunghaften Weise statt. Dies ist eine Folge der Tatsache, dass sich das Wissen des Subjekts ebenso sprunghaft ändert. In Fällen hingegen, in denen sich das Wissen des Subjekts kontinuierlich verändert, findet auch der Wechsel des subjektbezogenen Quantenzustands in stetiger Weise statt.

In der Praxis kann ein solcher Fall etwa dann eintreten, wenn das Subjekt eine Zeigerstellung abliest und dabei die Position des Zeigers im Laufe der Zeit immer genauer erkennen kann. Man denke z.B. an den Fall, dass der Zeiger mittels eines Mikroskops (oder eines Teleskops) beobachtet und dabei die Fokussierung allmählich immer besser eingestellt wird.

In einem solchen Fall würde die auf einer Wissensänderung basierende Änderung der subjektbezogenen Wahrscheinlichkeit nicht mehr sprunghaft erfolgen. Ebenso wäre dann auch der durch eine Beobachtung ausgelöste Wechsel des subjektbezogenen Quantenzustands als ein kontinuierlicher Prozess in der Zeit zu beschreiben.

Um zu sehen, wie ein kontinuierlicher Wechsel des bedingten Quantenzustands formal möglich ist, wollen wir ein Beispiel betrachten. Es sei

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi(x)|^2 dx < \infty \}$$

der zugrundeliegende Hilbertraum mit der durch

$$|\varphi|^2 := \int |\varphi(x)|^2 dx$$

definierten Norm. Es sei $\varphi \in \mathcal{H}$ ein Element dieses Hilbertraums und $T' \subset T$ ein Zeitintervall. Der Vektor φ steht hier für den reinen Quantenzustand $\varphi\varphi^*$. Es seien außerdem a und b zwei stetige, auf dem Intervall T' definierte reelle Funktionen, wobei a monoton wächst und b monoton fällt. Damit erhalten wir das monoton schrumpfende Intervall

$$I_t := [a(t), b(t)] \quad (\text{für } t \in T')$$

Es sei nun L eine Observable mit kontinuierlichem Spektrum, die z.B. eine Zeigerstellung darstellt. Die Aussage $L \in I_t$ entspricht dann einem Unterraum A_t von \mathcal{H} . Damit sei

$$\varphi_t := \pi_{A_t}\varphi / |\pi_{A_t}\varphi|$$

Offenbar ist φ_t – bezüglich der oben angegebenen Norm – in stetiger Weise von t abhängig. Diese Überlegung kann leicht auf sehr viel komplexere Fälle verallgemeinert werden.

Bemerkung: Entscheidende Voraussetzung für die Möglichkeit einer stetigen Veränderung des Quantenzustands ist es hier, dass wir einen unendlich-dimensionalen Hilbertraum zugrunde legen.

Anmerkung 3

Die Frage einer "geisterhaften Fernwirkung" stellt sich nicht erst im Zusammenhang mit der Quantentheorie. Als Beispiel hierzu betrachten wir ein Experiment mit zwei Würfeln, die so aneinandergeklebt werden, dass die 6 des einen Würfels auf die 1 des anderen geheftet wird und die Werte 2 bis 5 beider Würfel jeweils nebeneinander zu liegen kommen. Nach dem Würfeln unter einem Würfelbecher zeigen beide Würfel folglich den gleichen Wert aus der Menge $\{2,3,4,5\}$ an, wobei jedes dieser Ergebnisse die Wahrscheinlichkeit $1/4$ hat.

Der Becher werde nun senkrecht in der Mitte durchtrennt, wobei auch die beiden Würfel voneinander abgelöst werden, und zwar so, dass die von den Würfeln angezeigten Werte nicht verändert werden. Durch Einführen zweier Trennwände entstehen sodann zwei neue geschlossene Behälter, die je einen der Würfel enthalten. Einer dieser Behälter wird nun an einen sehr weit entfernten Ort verschoben.

Es seien zwei Experimentatoren Abel und Bruno anwesend. Für jeden dieser beiden hat die Wahrscheinlichkeit, dass der entfernte Würfel eine 3 zeigt, den Wert $1/4$. In den am ursprünglichen Ort gebliebenen Behälter wird nun ein Fenster geschnitten, und Abel beobachtet, dass von der Seite der Wert 2 zu sehen ist. Da die 5 der 2 gegenüber liegt und folglich nur noch die beiden Werte

3 und 4 als Würfelergebnis in Frage kommen, ändert sich für Abel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der von ihm beobachtete Würfel eine 3 anzeigt, auf den Wert $1/2$. Ohne Zeitverzögerung schreibt Abel dann auch dem möglichen Faktum, dass der entfernte Würfel eine 3 zeigt, die Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu. Für Bruno, der nicht in das Fenster gesehen hat, ändert sich hierbei nichts.

Obwohl sich die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen des Wertes 3 bei dem entfernten Würfel (für Abel) unmittelbar verändert hat (und es nicht zu einer durch die beschränkte Ausbreitungsgeschwindigkeit physikalischer Wirkungen bedingten zeitlichen Verzögerung kommt), kann hier von einer "geisterhaften Fernwirkung" nicht die Rede sein. Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist keine Eigenschaft des (weit entfernten) Würfels, sondern eine Eigenschaft eines möglichen Faktums. Mögliche Fakten aber sind abstrakte Objekte und als solche nicht "lokal".

Man könnte hier jedoch von einer "geistigen Fernbeziehung" sprechen. Eine solche besteht darin, dass sich das Wissen eines Subjekts auch auf beliebig weit entfernte Objekte beziehen kann. So weiß Abel, dass der von dem entfernten Würfel angezeigte Wert mit demjenigen des anderen Würfels übereinstimmt. In dem Moment, in dem er erfährt, dass der von dem beobachteten Würfel angezeigte Wert nicht die 2 oder die 5 ist, kann er (ohne Zeitverzögerung) auf den weit entfernten Würfel schließen. Dies ist ein Vorgang, der sich nur in Abels Gehirn abspielt; eine physikalische Fernwirkung ist damit nicht verbunden.

Ganz analog verhält es sich mit Quantenzuständen, die einem Quantensystem zugeschrieben werden und dazu dienen, bestimmte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Ebenso wie eine Wahrscheinlichkeit ist auch ein Quantenzustand keine physikalische Eigenschaft eines Objekts und somit nicht "lokal". Der Wechsel des Quantenzustands eines weit entfernten Objekts aufgrund einer (lokalen) Beobachtung bedeutet keine physikalische Fernwirkung. Von einer "geistigen Fernbeziehung" könnten wir aber sprechen, da das Subjekt, welches dem entfernten Objekt einen neuen Quantenzustand zuschreibt, damit eine Aussage über dieses ferne Objekt macht.

42. Varianten des Formalismus der Quantentheorie

Wir haben mehrfach von "dem" bekannten Formalismus der Quantentheorie gesprochen. Unser Ziel war es dabei zu zeigen, dass ein makroskopisches Subjekt mit diesem Formalismus zu korrekten Vorhersagen über die Wahrscheinlichkeit von Messergebnissen gelangt. Tatsächlich gibt es aber nicht einen bestimmten, klar beschriebenen quantentheoretischen Formalismus. Im Rahmen dieses Formalismus ist keineswegs immer eindeutig festgelegt, wie ein bestimmtes Experiment zu behandeln ist.

Dieselbe konkrete Situation kann vielmehr in mehreren verschiedenen Varianten des quantentheoretischen Formalismus beschrieben werden. Für die Ergebnisse eines Quantenexperiments werden dabei allerdings stets dieselben Wahrscheinlichkeiten oder Korrelationen vorhergesagt, unabhängig von der jeweils verwendeten Variante. Wäre dies nicht so, so wären die Unterschiede im Rahmen der vielen durchgeführten Experimente längst aufgefallen, und man hätte bestimmte Varianten als empirisch falsch erkannt und verworfen.

Außerdem lässt sich zu den verschiedenen Varianten jeweils auch theoretisch zeigen, dass sie zu denselben Vorhersagen über die Wahrscheinlichkeiten experimenteller Ergebnisse führen. Voraussetzung für einen formalen Beweis der Äquivalenz verschiedener Varianten in bestimmten Situationen wäre es allerdings, dass man zum einen die in Frage kommenden Situationen und zum anderen die anzuwendenden Varianten präzise formuliert.

Zu jeder Variante gehört auch die Festlegung, welche (mikroskopischen) Fakten bei Vorliegen eines bestimmten ablesbaren Messergebnisses als gemessen gelten sollen. Auch in diesem Punkt können sich zwei ansonsten gleiche Varianten unterscheiden.

Es kann somit zur Beschreibung derselben experimentellen Situation mehrere Varianten des quantentheoretischen Formalismus im Sinne verschiedener Kalküle geben, mit denen man die gleichen (makroskopischen) Voraussagen erhält. Im folgenden werden wir Beispiele für solche Varianten anführen. Wir verzichten aber darauf, für die einzelnen Fälle eine präzise Darstellung zu geben und die empirische Gleichwertigkeit der verschiedenen Varianten jeweils formal nachzuweisen.

Beispiel 1 (Emission eines bestimmten Teilchens)

Man betrachte ein Quantenexperiment, in dem die aus einer Quelle emittierten Elektronen zwei aufeinander folgende Spinfilter durchlaufen, bevor sie von einer Messapparatur aufgefangen werden.

Durch den experimentellen Aufbau ist hier nur festgelegt, dass zu einem Zeitpunkt τ irgendein Elektron die Quelle verlässt und sich durch die Anordnung der Filter bewegt. Es kann nichts darüber ausgesagt werden, um welches Elektron es sich handelt. Demzufolge kann man die Theorie in diesem Fall eigent-

lich nur auf das Subsystem anwenden, welches aus allen Elektronen des Universums besteht. Diese Sichtweise ist im quantentheoretischen Formalismus zwar nicht üblich, aber durchaus möglich.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Theorie auf ein bestimmtes einzelnes Elektron anzuwenden. Man nimmt also zusätzlich zu den die Quelle beschreibenden Fakten an, dass ein bestimmtes individuelles Elektron zur Zeit τ aus der Quelle kommt, und identifiziert das betrachtete Subsystem mit diesem Elektron. Dies ist die übliche Vorgehensweise im quantentheoretischen Formalismus und entspricht einer halbklassischen Sicht.

Der Formalismus der Quantentheorie lässt sich in den beiden geschilderten Varianten anwenden, wobei man stets genau dieselben Vorhersagen bezüglich der zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten oder Korrelationen erhält.

Bemerkung: Da sich die zum Universum gehörenden Elektronen voneinander nicht unterscheiden, ist es sogar prinzipiell unmöglich, durch einen experimentellen Aufbau ein bestimmtes Elektron auszuzeichnen. Anders wäre dies, wenn es zwischen den einzelnen Elektronen eine (physikalische) Unterscheidungsmöglichkeit gäbe, wenn also z.B. jedes einzelne Elektron eine etwas andere Masse hätte. In diesem Fall wäre es – wenigstens im Prinzip – möglich, ein Experiment so aufzubauen, dass ein bestimmtes Elektron zu einem Zeitpunkt τ aus der Quelle kommt und anschließend auf das erste Filter trifft.

Beispiel 2 (Zeitpunkt der Emission des Teilchens)

In dem in Beispiel 1 beschriebenen Fall ist nicht vorgesehen, dass jedes einzelne Elektron dann, wenn es die Quelle verlässt, registriert wird. Auch ist die Quelle nicht so eingerichtet, dass sie zu einem bestimmten festgelegten Zeitpunkt ein Elektron emittiert (was grundsätzlich möglich wäre). Es ist daher erforderlich, das System über einen bestimmten Zeitraum hinweg zu beobachten und zu jedem einzelnen Zeitpunkt zu messen, ob ein Elektron am Ende der Apparatur aufgefangen wird. Damit ergibt sich eine große Anzahl von zu messenden Ereignissen, die im Sinne des quantentheoretischen Formalismus zu betrachten wären. Diese Betrachtungsweise ist in dem bekannten Formalismus nicht üblich, aber doch möglich.

Üblicherweise wird man im Rahmen des quantentheoretischen Formalismus annehmen, dass ein Elektron zu einer bestimmten Zeit aus der Quelle kommt. Mit dieser zusätzlichen Annahme ergibt sich eine alternative Variante zur Beschreibung desselben Experiments, welche hinsichtlich der zu beschreibenden Wahrscheinlichkeiten oder Korrelationen allerdings stets dieselben Ergebnisse liefert.

Beispiel 3 (Klassische Bewegung und Spin-Messung)

Das in Beispiel 1 diskutierte Experiment muss eigentlich so dargestellt werden, dass man sowohl die horizontale Bewegung als auch den Spin des Elektrons

quantentheoretisch beschreibt. Im quantentheoretischen Formalismus ist es alternativ möglich (und auch üblich), die horizontale Bewegung klassisch, den Spin jedoch quantentheoretisch zu behandeln. An den die Spin-Messung betreffenden Wahrscheinlichkeiten ändert dies nichts.

Beispiel 4 (Indirekte Messung)

Man betrachte nochmals das Experiment von Beispiel 1. Das Durchlaufen der Spinfilter führt hier zu einer Verschränkung (entanglement) von Ort und Spin. Nach dem Passieren der beiden Filter wird das Elektron von einem Gerät aufgefangen, welches sein Vorhandensein in einem bestimmten Raumsegment anzeigt. Das Auffangen des Elektrons kann nun entweder als Messung des Ortes des Elektrons oder aber als Messung des Spins aufgefasst werden. Auch hier handelt es sich genau genommen um zwei verschiedene Deutungsvarianten desselben Vorgangs im Sinne des quantentheoretischen Formalismus.

Beispiel 5 (Messung ohne Ablesung)

In dem in Beispiel 1 dargestellten Experiment wird nach dem Passieren des ersten Filters nicht registriert, welchen Pfad das betroffene Elektron eingeschlagen hat. Wir können nun aber einen zusätzlichen Detektor installieren, der dies feststellt. Allerdings soll dieser Detektor so verkapselt sein, dass sich das Messergebnis nicht ablesen lässt. Diese Situation kann entweder so gedeutet werden, dass hier eine Messung stattfindet, die nur nicht abgelesen wird, oder aber so, dass durch das Vorhandensein des Detektors der Zustand im Sinne einer Dekohärenz verändert wird, ohne dass eine Messung erfolgt. In beiden Fällen erhält man dieselben Vorhersagen bezüglich der sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten. Im Sinne des quantentheoretischen Formalismus handelt es sich hierbei wiederum um zwei verschiedene Varianten, die in einer präzisen Darstellung formal voneinander zu unterscheiden wären.

Beispiel 6 (Aufzeichnung einer Ereignisanzahl)

Nehmen wir an, in dem in Beispiel 1 betrachteten Experiment wird nicht jedes einzelne aufgefangene Elektron registriert und beobachtet, sondern es wird (in einem verkapselten Gerät) die Anzahl der über einen bestimmten Zeitraum eingetroffenen Elektronen festgestellt, und diese Anzahl kann anschließend abgelesen werden. (Die Einzelereignisse werden hier überhaupt nicht aufgezeichnet.) In diesem Fall kann man den quantentheoretischen Formalismus entweder so anwenden, dass man alle Einzelereignisse als Observable betrachtet, oder aber so, dass man nur die Gesamtzahl als Observable ansieht. Auch dies ergibt zwei Varianten des quantentheoretischen Formalismus, welche zu denselben Vorhersagen führen.

Beispiel 7 (Mehrere Quantensysteme)

In vielen Fällen betrachtet man Quantensysteme, die aus mehreren Teilsystemen zusammengesetzt sind. Wenn diese Teilsysteme voneinander unabhängig sind (was allerdings immer nur annähernd der Fall ist), kann man ihnen entweder jeweils einzeln einen Quantenzustand zuordnen oder aber nur das Gesamtsystem mit seinem Quantenzustand betrachten. Auch dies ergibt zwei verschiedene Varianten des quantentheoretischen Formalismus, mit denen dieselbe konkrete Situation beschrieben wird.

Beispiel 8 (Zustandsvektor oder statistischer Operator)

Der Zustand eines Quantensystems ist im allgemeinen durch einen statistischen Operator W gegeben. Da ein solcher Operator stets eine Spektraldarstellung der Form

$$W = \sum_j p_j \varphi_j(\varphi_j)^*$$

hat, kann man (im Rahmen des quantentheoretischen Formalismus) alternativ annehmen, dass das System mit der Wahrscheinlichkeit p_j den Zustand φ_j aufweist. Mit dieser Annahme erhält man eine Variante des quantentheoretischen Formalismus, mit der sich dieselben Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen.

Abschließende Bemerkung

Wir hatten festgestellt, dass ein makroskopisches Subjekt mit "dem" Formalismus der Quantentheorie zu denselben Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten experimenteller Ergebnisse gelangt, wie die hier diskutierte realistische Quantentheorie. Die oben anhand einiger Beispiele dargestellten Varianten des quantentheoretischen Formalismus führen hinsichtlich der Ergebnisse von (Quanten-) Experimenten stets zu denselben Vorhersagen. Daher gilt diese Feststellung für den Formalismus der Quantentheorie in allen seinen Varianten.

43. Zur Realität gemessener Ereignisse

Unter einer Messung im herkömmlichen Sinne versteht man die Feststellung einer tatsächlich vorhandenen Eigenschaft zu einem Zeitpunkt, also die Feststellung, dass ein bestimmtes mögliches Ereignis realisiert ist. Derartige Messungen wollen wir im folgenden als "klassische" Messungen bezeichnen.

Die zu messende Eigenschaft muss dabei vor Beginn des Messprozesses und unabhängig von der Tatsache der Messung vorhanden sein. Nicht ausgeschlossen ist, dass die gemessene Eigenschaft sowie andere Eigenschaften des Objekts, an dem die Messung vorgenommen wird, durch den Prozess der Messung zerstört werden.

Der Unterschied zwischen einer derartigen klassischen Messung einerseits und einer einfachen Beobachtung andererseits besteht darin, dass entweder ein numerischer Wert mit einer größeren Präzision ermittelt wird (etwa wenn die genaue Höhe eines Berggipfels gemessen wird), oder ein Ereignis festgestellt wird, welches man ohne spezielle Hilfsmittel bzw. Messinstrumente überhaupt nicht würde beobachten können (etwa das Vorkommen bestimmter Bakterien in einem Gewässer). Das Konzept der klassischen Messung stellt eine Erweiterung des Begriffs der (unmittelbaren) Beobachtung dar. Beobachtungen können demnach als spezielle klassische Messungen aufgefasst werden.

Jede klassische Messung besteht typischerweise aus zwei Teilschritten: der unmittelbaren Beobachtung (Ablese) eines Messergebnisses und dem Rückschluss auf die gemessene Eigenschaft aufgrund bestimmter theoretischer Vorstellungen, beispielsweise einer Theorie des Elektronenmikroskops.

Solange sich die gemessenen Fakten (zusammen mit den Voraussetzungen des Messvorgangs und den unmittelbar ablesbaren Messergebnissen) im Rahmen eines einfachen oder erweiterten makroskopischen Kontextes (oder auch eines allgemeinen kommutativen Kontextes im oben diskutierten Sinne) darstellen lassen, gilt das über Dokumentbeziehungen in derartigen Kontexten Gesagte: Man kann für die interessierenden Ereignisse das physikalische "tertium non datur" annehmen und unter dieser Annahme (im Falle einer klassischen Messung) von den Messergebnissen auf die Realität der gemessenen Fakten schließen. Das in dieser Weise Gemessene kann daher stets als real angenommen werden.

Das in den Kapiteln 39 und 40 betrachtete Konzept der "Messung an Quantensystemen" (kurz: "Quantenmessung") stellt eine Erweiterung des Begriffs der klassischen Messung dar. Klassische Messungen sind demnach spezielle Quantenmessungen, das Umgekehrte gilt aber nicht. Insbesondere sind "Messungen" im Sinne des bekannten Formalismus der Quantentheorie im allgemeinen keine klassischen Messungen.

Man hat das Konzept der Quantenmessung im Rahmen der Quantentheorie eingeführt, ohne dass hierfür ein eigener Terminus verwendet wurde. Mitunter

wurden damit (so auch in der Kopenhagener Deutung) Vorgänge als "Messung" bezeichnet, bei denen es sich nicht um Messungen im herkömmlichen Sinne (als Feststellung gegebener Realitäten) handelt. Der klassische Begriff der Messung wurde auf diese Weise erweitert.

Der Begriff der "Messung" bezeichnet somit zwei ganz verschiedene Konzepte, zum einen die "klassische" Messung im herkömmlichen Sinn und zum andern die "Quantenmessung".

In der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie wird unter bestimmten Umständen von der "Messung" einer Observablen M gesprochen. Unter welchen Voraussetzungen *genau* eine solche Messung vorliegt, wird dabei nicht präzise formuliert. Üblicherweise wird von halbklassischen Überlegungen ausgegangen um zu begründen, dass eine bestimmte Apparatur die Observable M misst.

"Messung" bedeutet hier nicht, dass eine zuvor vorhandene Eigenschaft festgestellt wird. Eher scheint es, dass das zu messende Faktum durch die "Messung" (bzw. durch die Messwechselwirkung) erst "hergestellt" wird. Die Kopenhagener Deutung macht keine präzise Aussage darüber, ob, ab welchem Zeitpunkt und in welchem Sinne die jeweils gemessenen Werte (bzw. die zugehörigen Ereignisse) als "real" anzusehen sind.

Die von uns angegebene Messbeziehung (MB) präzisiert die in dem bekannten Formalismus der Quantentheorie vorliegende Konzeption der Quantenmessung auf der Basis unseres ontologisch realistischen Ansatzes. Dabei wird nicht auf halbklassische Überlegungen Bezug genommen; die Formulierung erfolgt vielmehr ganz im Rahmen der quantentheoretischen Modellierung von Eigenschaften und Ereignissen.

Die auf einer Messbeziehung (MB) beruhenden Messungen sind, ähnlich wie die Quantenmessungen im Falle der Kopenhagener Deutung, im allgemeinen keine klassischen Messungen im oben definierten Sinne, d.h. Feststellungen von (zuvor) vorhandenen Eigenschaften. Besteht die Messbeziehung (MB) zwischen einem Ereignis (C, τ) und einem Messergebnis (E, t) , sind die jeweiligen Voraussetzungen gegeben und wird das Ereignis (E, t) beobachtet, so kann man zunächst nur sagen, dass das Ereignis (C, τ) als gemessen *gilt*.

Die Messbeziehung (MB) stellt einen formalen Zusammenhang her zwischen einem zu messenden Ereignis (C, τ) und einem Messergebnis (E, t) . Dabei werden, wie im Falle einer Dokumentbeziehung, gewisse Voraussetzungen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_r, t_r)$$

angenommen. Die Voraussetzungen und das Messergebnis gehören zu einem makroskopischen Kontext, der auf der Menge S aller makroskopischen Eigenschaften oder auf einer Erweiterung S' von S beruht. Das zu messende Ereignis (C, τ) gehört jedoch im allgemeinen nicht zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes.

Allein die Theorie entscheidet hier darüber, unter welchen Umständen ein bestimmtes Ereignis als gemessen zu gelten hat. Über die Frage, ob das Ereignis (C, τ) dann auch tatsächlich realisiert ist, sagt dies zunächst nichts aus. Wenn eine Eigenschaft im Sinne einer Quantenmessung als "gemessen" gilt, so bedeutet dies nur, dass eine formale Messbeziehung besteht und das zugehörige Messergebnis vorliegt. Es bedeutet nicht, dass das gemessene mögliche Faktum tatsächlich realisiert ist oder dass man seine Realität annehmen kann. Sofern das zu messende Ereignis mikroskopisch ist, ist die empirische Prüfung der Realität des gemessenen Ereignisses (C, τ) prinzipiell auch gar nicht möglich. Nur die Theorie kann dann entscheiden, was als gemessen zu gelten hat und was nicht.

Dies entspricht einer allgemeinen Tatsache: Jede Messung besteht grundsätzlich zunächst aus einer oder mehreren Beobachtungen. Hieraus wird dann aufgrund der Theorie auf die damit gemessenen Fakten geschlossen. Erst die Theorie legt somit fest, welches Faktum aufgrund von bestimmten Beobachtungen als "gemessen" gelten soll. Nur dann, wenn es sich bei den gemessenen Fakten um solche handelt, die ihrerseits unmittelbar beobachtet werden können, lässt sich überprüfen, ob ein als gemessen geltendes Faktum auch tatsächlich gegeben ist.

Anders als beim Bestehen einer Dokumentbeziehung kann man, wenn nur eine Messbeziehung der Form (MB) vorliegt, im allgemeinen vom Messergebnis $\langle E, t \rangle$ nicht auf das mögliche Faktum $\langle C, \tau \rangle$ schließen, da sich für das Ereignis (C, τ) das physikalische "tertium non datur" nicht ohne weiteres annehmen lässt. Mit der für dokumentierte Ereignisse gegebenen Begründung lässt sich die Annahme der Realität der im Sinne einer Quantenmessung als "gemessen" geltenden Ereignisse daher nicht rechtfertigen.

Darüber hinaus kann anhand einfacher Beispiele gezeigt werden, dass es im allgemeinen nicht möglich ist, im Falle von Quantenmessungen die Realität des Gemessenen als gegeben anzunehmen.

In $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ kann man z.B. mit $x := \sqrt{2}$ bilden:

$$\psi := (1, 1, 2x)$$

$$c_1 := (1, 1, 0)$$

$$c_2 := (1, 0, 0)$$

$$UR := [\psi]$$

$$A_1 := [e_1, e_2] \quad (\text{mit } e_1 := (1, 0, 0) \text{ und } e_2 := (0, 1, 0))$$

$$A_2 := [e_1]$$

$$C_1 := [c_1]$$

$$C_2 := [c_2]$$

Setzt man der Einfachheit halber alle Zeitpunkte gleich 0, so bestehen die

folgenden Messbeziehungen:

$$\pi_{C_1} \pi_{UR} = \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$\pi_{C_2} \pi_{UR} = \pi_{A_2} \pi_{UR}$$

$$\pi_{C_2} \pi_{A_1} \pi_{UR} = \pi_{A_2} \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

Dabei sind A_1 und A_2 miteinander vertauschbare Unterräume. Die Vektoren

$$f := (3, 1, -x)$$

$$g := (1, -1, x)$$

$$h := (0, x, 1)$$

sind paarweise orthogonal und es gilt:

$$UR < [f^\perp]$$

$$C_1 < [g^\perp]$$

$$C_2 < [h^\perp]$$

Hieraus folgt mittels MON und SEC:

$$\neg \hat{\diamond}(\langle C_1 \rangle \wedge \langle C_2 \rangle \wedge \langle UR \rangle)$$

Wird in diesem Beispiel $\langle UR \rangle$ als Initialbedingung interpretiert und stehen $\langle A_1 \rangle$ und $\langle A_2 \rangle$ für Messergebnisse, die beobachtet wurden, so ist die Realität der "gemessenen" Ereignisse $\langle C_1 \rangle$ und $\langle C_2 \rangle$ gar nicht möglich.

Anhand ähnlich aufgebauter Beispiele lässt sich zeigen, dass Ereignisse, die im Sinne der formalen Messbeziehung (MB) als gemessen gelten, im allgemeinen nicht (zusammen mit der Initialbedingung) als "real" angenommen werden können.

Es stellt sich hier die Frage, wie die Tatsache, dass das im Rahmen von Quantenmessungen als "gemessen" Geltende im allgemeinen nicht als real annehmbar ist, mit dem von uns vorausgesetzten ontologischen Realismus vereinbar ist.

Die Annahme des ontologischen Realismus besagt nur, dass jedem möglichen Ereignis objektiv einer der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet ist. Durch diese Annahme wird (unter anderem) die Voraussetzung dafür geschaffen, dass die alltäglich wahrnehmbaren Fakten (anders als in manchen Deutungen der Quantentheorie) ohne weiteres als "real", d.h. als "wahr" angenommen werden können und darüber hinaus – im Rahmen eines makroskopischen Kontextes – auch jene Fakten, die empirisch zugänglich sind, weil sie zum Beispiel mittels einer technischen Vorrichtung aufgezeichnet wurden.

Insbesondere soll es möglich sein, die Schrödinger'sche Katze für objektiv tot (bzw. lebendig) zu halten, wenn dies beobachtet wird, und nicht annehmen zu müssen, dass der Tod der Katze erst aufgrund der Beobachtung durch den Experimentator eintritt, dass also die Fakten im Universum erst durch den subjektiven Prozess der Beobachtung zustande kommen.

Unser Ansatz des ontologischen Realismus verlangt aber nicht, dass dasjenige, was nur im Sinne einer formalen Messbeziehung als "gemessen" gilt, real sein muss. Die Tatsache, dass man im Rahmen der Quantentheorie eine bestimmte erweiterte Konzeption der Messung eingeführt hat, kann nicht bedeuten, dass es in einer ontologisch realistischen Theorie in jedem Fall möglich sein muss, das in diesem Sinne "Gemessene" als real anzunehmen.

Das Konzept einer "Messung" auf der Grundlage von Messbeziehungen der Form (MB) haben wir eingeführt um zeigen zu können, warum sich der quantentheoretische Zustandskalkül erfolgreich anwenden lässt. Die Beziehung (MB) soll aber keine Messungen im eigentlichen Sinne, d.h. als Feststellung realer Ereignisse beschreiben.

Es besteht so keinerlei Widerspruch zwischen der Annahme des ontologischen Realismus und der damit verfolgten Absicht, alltäglich wahrnehmbare Fakten ohne weiteres als "real" annehmen zu können, und der Tatsache, dass das im Rahmen von Quantenmessungen im Sinne der Messbeziehung (MB) als "gemessen" Geltende im allgemeinen nicht als real angenommen werden kann.

Bemerkung: Die im Rahmen der Quantentheorie erfolgte Erweiterung des Begriffs der Messung lässt sich (historisch) nachvollziehen aufgrund der Tatsache, dass man zunächst im Sinne klassisch-atomistischer Vorstellungen von der Realität von Messgrößen wie den Orten und Impulsen elementarer Teilchen ausgegangen war. Da diese Vorstellungen sich nicht aufrechterhalten lassen, ist es notwendig, zwischen Messungen im eigentlichen Sinne und den auf einer Messbeziehung der Form (MB) beruhenden "Quantenmessungen" zu unterscheiden.

Anmerkung

Wir haben bei der Definition von Dokumentbeziehungen, bei dem Konzept der empirischen Zugänglichkeit und bei der Diskussion der einfachen oder erweiterten makroskopischen Kontexte nicht vorausgesetzt, dass die dokumentierten Ereignisse makroskopisch sein müssen, dass die betrachteten Eigenschaften also zu S bzw. zu S' gehören. Es wurde lediglich angenommen, dass die jeweiligen Dokumente makroskopisch sind.

Demnach gelten alle Aussagen über makroskopische Kontexte auch für den Fall, dass die dokumentierten Ereignisse nicht makroskopisch sind.

Diese Überlegungen können auch angewendet werden auf die Frage, wann Ereignisse, die im Sinne "klassischer Messungen" gemessen wurden, als real angenommen werden können. Wie wir oben ausgeführt haben, ist dies insbesondere dann der Fall, wenn sich die gemessenen Fakten – zusammen mit den Voraussetzungen des Messvorgangs und den ablesbaren Messergebnissen – im Rahmen eines makroskopischen Kontextes darstellen lassen. In diesem Fall lässt sich für alle interessierenden Ereignisse des Kontextes das physikalische

"tertium non datur" annehmen und man kann von den Messergebnissen auf die gemessenen Fakten schließen.

Dies lässt sich auch anwenden auf den Fall, dass es sich bei den gemessenen Fakten um mikroskopische Ereignisse handelt. Auch sie können in diesem Sinne "klassisch" gemessen werden und ihre Realität kann – unter den genannten Bedingungen – angenommen werden.

Der entscheidende Unterschied zwischen klassischen Messungen einerseits und Quantenmessungen andererseits besteht somit nicht darin, dass nur makroskopische Fakten im klassischen Sinne gemessen werden können, sondern darin, dass die Messbeziehungen im Falle von Quantenmessungen im allgemeinen nicht unabhängig von den Ergebnissen nachfolgender Messungen bestehen und das "Gemessene" aus diesem Grunde nicht als real angesehen werden kann.

Bemerkung: Im obigen Beispiel gilt:

$$\pi_{C_1} \pi_{A_2} \pi_{UR} \neq \pi_{A_1} \pi_{A_2} \pi_{UR}$$

Die Messbeziehung zwischen $\langle C_1 \rangle$ und $\langle A_1 \rangle$ besteht demnach nicht unabhängig vom Messergebnis $\langle A_2 \rangle$. So kommt es dazu, dass in diesem Fall die "gemessenen" Ereignisse $\langle C_1 \rangle$ und $\langle C_2 \rangle$ nicht zugleich mit der Initialbedingung $\langle UR \rangle$ realisiert sein können.

Zusammenfassung

Es sind zwei grundsätzlich verschiedene Konzepte der "Messung" zu unterscheiden: Einerseits "Messung" im eigentlichen (klassischen) Sinne als Feststellung einer gegebenen Realität, andererseits "Quantenmessung" als Beobachtung eines Messergebnisses, wenn eine formale Messbeziehung der Form (MB) besteht.

Im Falle klassischer Messungen bestehen voneinander unabhängige Dokumentbeziehungen zwischen den gemessenen Ereignissen und den unmittelbar beobachtbaren Messergebnissen. Spielt sich dies insgesamt im Rahmen eines (erweiterten) makroskopischen Kontextes ab, so lässt sich stets die Realität des Gemessenen annehmen. Dies gilt auch für den Fall, dass die gemessenen Ereignisse nicht makroskopisch sind.

Im Fall von Quantenmessungen ist es hingegen im allgemeinen nicht möglich, die Realität des formal als "gemessen" Geltenden anzunehmen. Der wesentliche Unterschied liegt hier darin, dass die Messbeziehungen nicht unabhängig von den nachfolgenden Messergebnissen bestehen müssen. Quantenmessungen stellen daher im allgemeinen keine wirklichen Messungen dar.

Es besteht kein Gegensatz zwischen der Annahme des ontologischen Realismus (im Sinne der Annahme der Wahrheitswertbestimmtheit aller möglichen Fakten) und der Tatsache, dass das formal im Rahmen von Quantenmessungen als "gemessen" Geltende im allgemeinen nicht als "wahr" angenommen werden kann.

44. Exkurs: Rekonstruktiver Realismus und Quantentheorie

Wir haben im vorangegangenen Kapitel stets nur davon gesprochen, dass die Realität (d.h. die "Wahrheit") des im klassischen Sinne Gemessenen "angenommen" werden kann. Dies verweist auf die Frage, in welchem Sinne die reale Welt, von deren Existenz wir im Rahmen des ontologisch realistischen Ansatzes zunächst ausgegangen sind, auf der Basis von Messungen und Beobachtungen erkannt werden kann.

Im folgenden wollen wir hierzu einige grundsätzliche Thesen formulieren. Eine tiefere Diskussion der hiermit verbundenen philosophischen Fragestellungen des Realismus, des Phänomenalismus oder der Rolle, die die "Phänomene", d.h. die "Erscheinungen" in diesem Zusammenhang spielen, kann hingegen nicht Gegenstand des vorliegenden Textes sein.

Im alltäglichen Leben verhalten wir uns meist als "naive Realisten" in dem Sinne, dass wir das, was wir wahrnehmen, unmittelbar als real gegeben annehmen.

Gelegentlich wird uns jedoch die Tatsache bewusst, dass wir uns in unseren Wahrnehmungen auch täuschen können. Es wird uns dann klar, dass uns die Welt letztlich nur in der Weise bekannt ist, wie sie uns erscheint. Unmittelbar gegeben sind uns somit nur die Erscheinungen (die Phänomene), und über die "Welt an sich" können wir (im Sinne Kants) eigentlich gar nichts wissen.

Bemerkung: Anders als Kant sprechen wir hier nicht vom "Ding an sich", sondern von der "Welt an sich". Mit der Rede vom "Ding an sich" würden wir bereits implizit annehmen, dass die "Welt an sich" aus "Dingen an sich" besteht. Dies ist aber weder in einer (reinen) klassischen Feldtheorie noch in der Quantentheorie anzunehmen und würde eine bestimmte physikalische Sicht (etwa den Atomismus der klassischen Mechanik) voraussetzen.

Aus den gegebenen Phänomenen können wir – und normalerweise tun wir dies auch ganz spontan – die Realität im Sinne einer "Welt an sich" rekonstruieren, auch wenn wir letztlich nicht wissen können, inwieweit die von uns rekonstruierte Realität mit der eigentlichen (d.h. der wirklichen) "Welt an sich" übereinstimmt und ob es eine solche überhaupt gibt. Bei dieser Rekonstruktion handelt es sich – im Sinne Kants – um ein Prinzip der Vernunft (und nicht etwa, wie man meinen könnte, um einen Akt der Unvernunft). Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem "rekonstruktiven Realismus".

Ein physikalisches Analogon zu der Aussage, dass uns nur die Phänomene gegeben sind und nicht die Welt an sich, besteht in der Tatsache, dass unsere (optischen) Wahrnehmungen auf zweidimensionalen Netzhautbildern beruhen, aus denen unser Gehirn ein sich im dreidimensionalen Raum abspielendes Geschehen rekonstruiert.

Der Vorteil einer solchen Rekonstruktion liegt darin, dass sich bestimmte Vorgänge in einer dreidimensionalen Darstellung besser verstehen lassen.

Künftige Ereignisse lassen sich damit leichter vorausberechnen, so dass man hier von einem "kalkulatorischen Vorteil" sprechen kann. Indem die Rekonstruktion einer dreidimensionalen Realität uns diesen kalkulatorischen Vorteil bietet, macht sie uns die uns umgebende Welt "vertraut".

Wenn wir beispielsweise sehen, dass sich ein Vogel zunächst rechts von einem Baum befindet, er sodann nicht mehr zu sehen ist, um anschließend links wieder zu erscheinen, so rekonstruieren wir daraus den Vorgang, dass ein Vogel hinter einem Baum vorbeigeflogen ist. Obwohl wir den Vogel vorübergehend nicht mehr sehen konnten, nehmen wir an, in der "Wirklichkeit" sei er während des gesamten Vorgangs vorhanden gewesen.

Bemerkung: Es ist anzunehmen, dass die Fähigkeit, aus den gegebenen Sinnesreizen ein Geschehen im äußeren Raum zu rekonstruieren, im Rahmen der biologischen Evolution wegen ihrer Nützlichkeit als eine grundlegende Eigenschaft unseres Gehirns entstanden ist. In ähnlicher Weise werden auch Roboter, die sich in der Welt zurechtfinden sollen, mit der Fähigkeit ausgestattet, aus dem ihnen gegebenen Input an Videobildern eine dreidimensionale Darstellung ihrer Umgebung zu rekonstruieren.

Das dargestellte physikalische Analogon legt die Annahme nahe, dass die spontane Rekonstruktion der Realität aus den gegebenen Phänomenen (im Sinne eines allgemeinen Prinzips der Vernunft) ebenfalls einen "kalkulatorischen Vorteil" aufweist. Aus diesem Grunde ist die Rekonstruktion der "Welt an sich" dann auch als vernünftig anzusehen. Sie führt zu einer Vertrautheit mit der Welt, die uns ansonsten nur als eine Menge von "Phänomenen" gegeben ist.

Ausgehend von unserem naiven Realismus streben wir daher stets eine realistische Sicht der uns umgebenden Welt an. Eine solche entspricht auch der grundlegenden Form unseres Denkens. Wenn wir z.B. einen Baum sehen, so sagen wir normalerweise nicht: "Mir ist die Erscheinung eines Baumes gegeben", sondern einfach nur: "Dort steht ein Baum." Das Konzept des rekonstruktiven Realismus erlaubt es, vernünftigerweise von der Vorstellung einer objektiven Realität auszugehen. Dabei wird die Möglichkeit des Zweifels am Inhalt einzelner konkreter Wahrnehmungen keineswegs ausgeschlossen.

Auch von einer physikalischen Theorie erwarten wir, dass sie (anders als es bei manchen Deutungen der Quantentheorie der Fall ist) in einer objektiven und realistischen Weise formuliert ist. Konkret bedeutet dies zunächst, dass wir von der ontologisch realistischen Annahme ausgehen müssen, dass jedes im Modell der Theorie mögliche Faktum einen objektiv gegebenen Wahrheitswert besitzt. Nicht notwendig ist hier allerdings die Annahme des numerischen Realismus, der in der klassischen Physik vorausgesetzt wird und verlangt, dass das Universum durch eine Menge von Variablen zu beschreiben ist, welche stets einen numerischen Wert aufweisen.

Die Annahme des ontologischen Realismus – als Wahrheitswertbestimmtheit aller möglichen Fakten – betrifft hier zunächst nur die *Form* der Theorie. Zu

den Grundbegriffen dieser Theorie sollen insbesondere (anders als z.B. bei der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie) keine subjektiven Konzepte wie Beobachtung oder Messung gehören. Die Annahme der Wahrheitswertbestimmtheit besagt aber noch nichts darüber, inwieweit sich reale Fakten, insbesondere auch solche der Vergangenheit, tatsächlich erkennen lassen, oder welche Schlüsse aus gegebenen Beobachtungen gezogen werden können.

Die naturwissenschaftliche Rekonstruktion der "Welt an sich" stellt eine kontinuierliche Erweiterung der spontanen Rekonstruktion des unmittelbar Wahrgenommenen dar. Diese Erweiterung kann z.B. schrittweise erfolgen von dem mit bloßem Auge Wahrnehmbaren hin zu dem, was sich erst mit einer Brille, einer Lupe und schließlich mit einem Mikroskop beobachten lässt.

Gegenstand der naturwissenschaftlichen Rekonstruktion ist nicht nur die jeweilige Gegenwart. Vielmehr rekonstruieren wir aus den uns gegebenen Phänomenen den gesamten Ablauf der kosmischen Evolution, wobei uns zu den Fakten der Vergangenheit allenfalls Dokumente vorliegen. Außerdem betrifft diese Rekonstruktion den mikroskopischen sowie den "teleskopischen", d.h. den astronomischen Bereich. In ähnlicher Weise lassen sich auch zukünftige Ereignisse "rekonstruieren", d.h. vorhersagen.

Ziel dieser Rekonstruktion ist es, ausgehend von den uns unmittelbar gegebenen Phänomenen das gesamte Universum in einer in sich stimmigen (widerspruchsfreien) "Geschichte" darzustellen. Unmittelbar gegebene Phänomene werden dabei im Sinne des Vorhandenseins bestimmter Eigenschaften des Universums modelliert und durch positive Aussagen beschrieben. Logische Kombinationen und insbesondere Negationen derartiger Aussagen werden bei der Modellierung der Phänomene hingegen nicht verwendet.

Basis der weitgehenden naturwissenschaftlichen Rekonstruktion innerhalb eines physikalischen Modells sind zum einen die Dokumentbeziehungen und zum andern die Initialannahme, ohne die es gar keine Dokumentbeziehungen geben könnte.

Ein "Schluss" von den jeweiligen Dokumenten auf die dokumentierten Fakten ist im Rahmen der von uns betrachteten Theorien stets nur möglich aufgrund der Annahme des physikalischen "tertium non datur". Dieses kann in der klassischen Physik als ein allgemeines Gesetz angenommen werden, in der Quantentheorie hingegen nur im Rahmen eines bestimmten (makroskopischen) Kontextes.

Die bloße Annahme des "ontologischen Realismus" (im Sinne der allgemeinen Wahrheitswertbestimmtheit) genügt demnach zur Rekonstruktion der Realität nicht. Vielmehr ist hierzu die Annahme eines zusätzlichen physikalischen "Gesetzes" notwendig, konkret die Annahme des physikalischen "tertium non datur".

Diese Annahme erlaubt es

- das jeweils Gemessene als "wahr" anzunehmen,
- hieraus (im Sinne eines positiven Kalküls) auf weitere Fakten zu schließen
- und auf diese Weise letztlich Vorhersagen über künftige Ereignisse zu machen.

Dabei beruhen Messungen (im eigentlichen Sinne, das heißt als "klassische" Messungen gegebener Realitäten) zunächst auf Dokumentbeziehungen. Dass hierbei "gegebene Realitäten" festgestellt werden, bedeutet, dass diese Realitäten (mit Hilfe des physikalischen "tertium non datur") widerspruchsfrei aus den gegebenen Dokumenten rekonstruiert werden können.

Die durch die Annahme des physikalischen "tertium non datur" gegebenen kalkulatorischen Möglichkeiten positiven Schließens ermöglichen die Rekonstruktion einer objektiven Realität. Damit erlaubt uns diese Annahme, ein (widerspruchsfreies) naturwissenschaftliches "Weltbild" aufzubauen und uns so die Welt in der üblichen Weise vertraut zu machen.

Wie wir gezeigt haben, entsteht durch die Annahme des physikalischen "tertium non datur" kein zusätzlicher empirischer Gehalt. Dies bedeutet, dass bei dieser naturwissenschaftlichen Rekonstruktion der "Welt an sich" der empirische Gehalt der verwendeten Theorie nicht erweitert wird.

Im Falle der Quantentheorie kann das physikalische "tertium non datur" jeweils nur für einen bestimmten (makroskopischen) Kontext angenommen werden, wenn ausgeschlossen werden soll, dass dabei ein zusätzlicher empirischer Gehalt entsteht. Im Rahmen eines solchen Kontextes lassen sich die im klassischen Sinne gemessenen Ereignisse als "wahr" annehmen, darauf aufbauend positive Schlüsse ziehen und so künftige Ereignisse vorhersagen. Damit wird auch in der Quantentheorie eine Rekonstruktion der Realität ermöglicht, die der uns vertrauten alltäglichen Welt entspricht.

Bemerkung: Während das physikalische "tertium non datur" in der Quantentheorie nur im Rahmen eines bestimmten Kontextes angenommen werden kann, kann man es in der klassischen Physik als ein allgemeines Gesetz postulieren. Da dieses Gesetz jedoch keinen zusätzlichen empirischen Gehalt liefert, handelt es sich auch im Falle der klassischen Theorie um eine bloße *Annahme*, die empirisch nicht überprüfbar ist.

Der Begriff der "Quantenmessung" stellt eine Erweiterung des Konzeptes der klassischen Messung dar. Dieser Begriff ist jedoch irreführend: "Quantenmessungen" sind im allgemeinen keine Messungen in der eigentlichen Bedeutung des Wortes.

Das im Sinne einer "Quantenmessung" Gemessene kann im allgemeinen nicht als "real" aufgefasst werden, d.h. die Realität lässt sich so nicht widerspruchsfrei rekonstruieren. Im Rahmen des rekonstruktiven Realismus bleibt daher nur

die Möglichkeit, das bei einer Quantenmessung als "gemessen" Geltende nicht als "wahr" und somit – in der eigentlichen Bedeutung des Wortes – auch nicht als "gemessen" anzunehmen.

Der Verzicht auf die Annahme der Realität des im Sinne von Quantenmessungen "Gemessenen" stellt keinen ernsthaften Nachteil dar, da das ursprüngliche Konzept derartiger "Messungen" weitgehend auf (halb-) klassischen Vorstellungen beruht, die klassische Theorie sowie das zugrundeliegende atomistische Modell jedoch als widerlegt zu gelten haben.

Anmerkung 1

Durch die Beschränkung auf einen makroskopischen Kontext wird im Falle der Quantentheorie nicht der ontologische Realismus (im Sinne der Wahrheitswertbestimmtheit) eingeschränkt, sondern nur die Möglichkeit makroskopischer Subjekte, etwas über die als gegeben angenommene Realität auszusagen, und insbesondere auch die Möglichkeit, als "gemessen" geltende Fakten als "wahr" zu rekonstruieren.

Anmerkung 2

Bei der Definition von t -zugänglichen Ereignissen (E_j, t_j) ist die Bedingung $t_j \leq t$ formal nicht erforderlich. Auf der Basis des in einem (makroskopischen) Kontext angenommenen physikalischen "tertium non datur" sind daher auch (positive) Vorhersagen über künftige Ereignisse möglich.

Anmerkung 3

Zwar ist die Bedingung $t_j \leq t$ bei der Definition (makroskopischer) Kontexte formal nicht erforderlich. Wenn jedoch Vorhersagen über zukünftige Ereignisse erfolgen sollen, so ist es sinnvoll, auf der Basis eines späteren, nach diesen Ereignissen liegenden Zeitpunktes t nachzuweisen, dass alle relevanten Ereignisse zu *einem* solchen Kontext gehören. Dazu muss man zeigen, dass es zu diesen Ereignissen zum Zeitpunkt t Dokumente (mit unabhängigen Dokumentbeziehungen) gibt.

Anmerkung 4

In Kapitel 30, Anmerkung 8, haben wir gezeigt, dass das physikalische "tertium non datur" auch dann angenommen werden kann, wenn kein makroskopischer Kontext vorliegt, sondern eine beliebige Folge von Ereignissen, die von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich sind. Die obigen Ausführungen können daher in entsprechender Weise auch für den Fall einer beliebigen Folge empirisch zugänglicher Ereignisse formuliert werden.

Anmerkung 5

Die in der Quantentheorie notwendige Beschränkung des physikalischen "tertium non datur" auf eine Folge empirisch zugänglicher Ereignisse spielt in der Praxis des Alltags keine Rolle. Die Menge der zu einer solchen Folge gehörenden Ereignisse kann sehr umfangreich sein. Insbesondere kann die Folge so gewählt sein, dass sich das gesamte alltägliche Denken eines makroskopischen Subjekts darin abspielt. Als Subjekt kann man hier auch die Menschheit als Ganzes (im Sinne eines ideellen Gesamtsubjekts) annehmen. In der alltäglichen Praxis ist man damit von der Allgemeingültigkeit des physikalischen "tertium non datur" nicht allzu weit entfernt. So entsteht dann auch der Anschein, dass man es mit zwei verschiedenen Welten zu tun hat: der normalen Welt des Alltags, in der sich gemessene Ereignisse stets problemlos als real annehmen lassen und positive Schlüsse von vorhandenen Informationen auf künftiges Geschehen ohne weiteres möglich sind, und der "Quantenwelt", deren Eigenheiten nur im Falle des Auftretens typischer Quantenphänomene beachtet werden müssen und in der die Realität des (in einem erweiterten Sinne) "Gemessenen" im allgemeinen nicht widerspruchsfrei angenommen werden kann.

Anmerkung 6

In ähnlicher Weise wie der Begriff der "Quantenmessung" ist auch der Begriff des "Quantenzustands" irreführend. Quantenzustände haben nichts mit dem ursprünglichen klassischen Zustandsbegriff zu tun. Es ist daher auch abwegig, im Sinne eines "Zustandsrealismus" die Quantenzustände ohne weiteres als physikalische Eigenschaften der betroffenen Objekte aufzufassen. Auch in diesem Fall werden durch eine unpassende Begriffsbildung Missverständnisse ausgelöst.

Zusammenfassung

Wir gehen zunächst stets von einem naiven Realismus aus. Zweifel an der Verlässlichkeit unserer Wahrnehmungen führen jedoch zu der Einsicht, dass uns immer nur die "Phänomene" unmittelbar gegeben sind. Das Konzept des rekonstruktiven Realismus stellt hier einen vernünftigen Weg dar: Aus den gegebenen Phänomenen können wir eine "Welt an sich" rekonstruieren.

Diese Rekonstruktion bietet "kalkulatorische Vorteile" und hilft so dabei, sich die umgebende Welt vertraut zu machen.

Eine physikalische Theorie sollte diesem Konzept entsprechen. Dazu muss sie zunächst von der Annahme des ontologischen Realismus im Sinne der Wahrheitswertbestimmtheit aller im Modell möglichen Fakten ausgehen. Unmittelbar gegebene Phänomene werden in diesem Modell als "Ereignisse" interpretiert.

Die naturwissenschaftliche Rekonstruktion der Realität (der fernen Vergangenheit, des Mikroskopischen und des "Teleskopischen" sowie zukünftiger Ereignisse) erfolgt sodann über Dokumentbeziehungen.

Durch die Annahme des physikalischen "tertium non datur" im Rahmen eines (makroskopischen) Kontextes wird – ohne den empirischen Gehalt der Theorie zu erweitern – die Möglichkeit positiver Schlüsse gegeben. Auf der Basis unmittelbar beobachteter Fakten lassen sich damit auch weit entfernte Vorgänge als real rekonstruieren.

Entsprechende Aussagen gelten auch, wenn man an die Stelle makroskopischer Kontexte beliebige Folgen empirisch zugänglicher Ereignisse setzt.

Die Folge empirisch zugänglicher Ereignisse kann hierbei sehr umfangreich sein; sie kann insbesondere so gewählt sein, dass sie das gesamte alltägliche Denken eines makroskopischen Subjekts einschließt. Als Subjekt kann hier auch die Menschheit als Ganzes angenommen werden.

Damit die Rekonstruktion widerspruchsfrei erfolgen kann, dürfen die sogenannten "Quantenmessungen" nicht als Feststellung realer Gegebenheiten aufgefasst werden.

Durch den Verzicht auf die Annahme der Realität des bei Quantenmessungen als "gemessen" Geltenden gelangt man zu einer konsistenten Darstellung der Quantentheorie im Einklang mit dem Konzept des rekonstruktiven Realismus.

45. Symmetrien in der Quantentheorie

In physikalischen Theorien können verschiedene Arten von Symmetrien auftreten. Eine solche Symmetrie ergibt sich z.B., wenn eine Theorie in Bezug auf Transformationen des raumzeitlichen Koordinatensystems invariant ist. Für viele Theorien ist es auch charakteristisch, dass sie Subsysteme (Teilchen bzw. Quanten) beschreiben, die nicht voneinander unterscheidbar sind; dies entspricht einer Teilchentausch-Symmetrie. Hinsichtlich der Rolle, die derartige Symmetrien spielen, gibt es bedeutende Unterschiede zwischen klassischen Theorien einerseits und der Quantentheorie andererseits. Wir wollen daher an dieser Stelle allgemein auf das Phänomen der Symmetrie eingehen.

In einer klassischen Theorie wird eine Symmetrie beschrieben durch eine Gruppe G von Bijektionen auf dem Phasenraum Z , für welche gilt:

$$g \circ \beta_t = \beta_t \circ g \quad (\text{für alle } t \in T \text{ und } g \in G)$$

Diese Beziehung drückt aus, dass das durch β_t gegebene Bewegungsgesetz symmetrisch ist. Wenn man sich nun beschränkt auf die Menge der symmetrischen Eigenschaften, d.h. auf

$$\mathcal{U}_{\text{sym}} := \{ A \in \mathcal{U} \mid \forall_{g \in G} g(A) = A \}$$

so kann die Theorie empirisch gleichwertig dargestellt werden auf einem reduzierten Phasenraum Z' . Hierzu definiert man die Äquivalenzrelation

$$z_1 \sim z_2 \iff \exists_{g \in G} z_2 = g(z_1) \quad (\text{für alle } z_1, z_2 \in Z)$$

und bildet

$$Z' := Z/\sim$$

als die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen. Einer symmetrischen Eigenschaft $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ entspricht dann die Teilmenge

$$A' := \{ z' \in Z' \mid z' \subset A \}$$

des reduzierten Phasenraums Z' . Da das Bewegungsgesetz β_t symmetrisch ist, lässt es sich auf Z' übertragen.

In der Quantentheorie wird eine Symmetrie beschrieben durch eine Gruppe \mathcal{G} von unitären Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} , für die gilt:

$$U H = H U \quad (\text{für alle } U \in \mathcal{G})$$

Dies besagt, dass der Hamiltonoperator H bezüglich \mathcal{G} symmetrisch ist. Damit ist auch das durch H gegebene Bewegungsgesetz symmetrisch, d.h. es gilt:

$$U U_t = U_t U \quad (\text{für alle } t \in T \text{ und } U \in \mathcal{G})$$

In vielen Fällen beruht die auf dem Hilbertraum \mathcal{H} operierende Symmetriegruppe \mathcal{G} auf einer Symmetrie des Konfigurationsraumes, der \mathcal{H} erzeugt. Ein Konfigurationsraum ist dabei eine Menge \mathcal{K} , die mit einem Maß μ versehen ist. Der zugehörige Hilbertraum ist dann definiert als

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 d\mu < \infty \}$$

d.h. als die Menge der quadratintegrierbaren komplexen Funktionen auf \mathcal{K} , ausgestattet mit dem üblichen Skalarprodukt. Der Konfigurationsraum kann beispielsweise eine diskrete (d.h. eine endliche oder abzählbare) Menge sein, und μ das sogenannte Zählmaß, welches jeder Teilmenge von \mathcal{K} die Anzahl seiner Elemente zuordnet. Ein anderes Beispiel stellt der Fall $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ dar, wobei μ das Lebesguemaß ist. Im allgemeinen kann der Konfigurationsraum \mathcal{K} auch eine Kombination (ein kartesisches Produkt) aus einer diskreten und einer kontinuierlichen Menge sein. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn Quanten neben einem Bewegungsfreiheitsgrad auch einen Spin aufweisen.

Bemerkung: Im Falle eines kontinuierlichen Konfigurationsraumes sind zwei quadratintegrierbare komplexe Funktionen φ und φ' auf \mathcal{K} äquivalent, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge voneinander unterscheiden, d.h. wenn gilt:

$$\mu(\{ x \in \mathcal{K} \mid \varphi(x) \neq \varphi'(x) \}) = 0$$

Genau genommen müssen Funktionen, die in diesem Sinne äquivalent sind, miteinander identifiziert werden. Der Hilbertraum \mathcal{H} wird dann gebildet als die Menge der Äquivalenzklassen derartiger Funktionen.

Ähnlich wie im klassischen Fall sei nun G eine Gruppe von Bijektionen auf dem Konfigurationsraum \mathcal{K} , die die Symmetrie beschreibt. Das Maß μ muss gegenüber dieser Gruppe symmetrisch sein, d.h. es muss gelten:

$$\mu = \mu \circ g \quad (\text{für alle } g \in G)$$

Jedem Element $g \in G$ entspricht in diesem Fall eine unitäre Abbildung U_g auf \mathcal{H} . Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ wird dabei $U_g(\varphi)$ bestimmt durch die Gleichung

$$U_g(\varphi)(x) := \varphi(g^{-1}(x)) \quad (\text{für alle } x \in \mathcal{K})$$

Es ist dann

$$\mathcal{G} := \{ U_g \mid g \in G \}$$

die auf \mathcal{H} operierende Symmetriegruppe, welche auf der durch G gegebenen Symmetrie des Konfigurationsraumes beruht (vergleiche T.45.1 und T.45.2).

Als ein wichtiges Beispiel für Symmetrien in der Quantenmechanik betrachten wir hier die Vertauschung von "Teilchen". (Genau genommen geht es hier nicht um "Teilchen" im klassischen Sinne, sondern um Quanten, d.h. um spezielle Subsysteme.)

Es sei \mathcal{H}_1 der (separable) Hilbertraum, welcher zur Beschreibung eines der Quanten der betrachteten Art dient. Dazu sei $(b_k)_k$ eine beliebige Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 , wobei wir den Bereich, den der Index k durchläuft, mit \mathcal{K}_1 bezeichnen. Es ist dann \mathcal{K}_1 eine endliche oder abzählbare Menge. Wenn wir mit μ_1 das Zählmaß auf \mathcal{K}_1 bezeichnen, so können wir \mathcal{H}_1 identifizieren mit der Menge der bezüglich μ_1 quadratintegrablen komplexen Funktionen auf \mathcal{K}_1 . Die Menge \mathcal{K}_1 übernimmt somit die Rolle des Konfigurationsraumes.

Wir definieren nun

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1$$

als das n -fache Tensorprodukt von \mathcal{H}_1 mit sich selbst. Dieser (separable) Hilbertraum stellt ein System aus n Quanten derselben Art dar. Die Menge aller Tensorprodukte der Form

$$b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n} \quad (\text{für } k_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, k_n \in \mathcal{K}_1)$$

bildet eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} . Wir definieren ferner

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_1$$

als das n -fache kartesische Produkt von \mathcal{K}_1 mit sich selbst. Ist nun μ das Zählmaß auf \mathcal{K} , so lässt sich der Hilbertraum \mathcal{H} identifizieren mit der Menge der bezüglich μ quadratintegrablen komplexen Funktionen auf \mathcal{K} . Die Menge \mathcal{K} spielt somit die Rolle des Konfigurationsraumes von \mathcal{H} .

Mit

$$\text{PER} := \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv} \}$$

definieren wir die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zu jeder Permutation $\sigma \in \text{PER}$ sei g_σ jene Bijektion auf \mathcal{K} , welche jedes Element (k_1, \dots, k_n) von \mathcal{K} abbildet auf $(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})$. Damit ist

$$G := \{ g_\sigma \mid \sigma \in \text{PER} \}$$

eine Symmetriegruppe auf dem Konfigurationsraum \mathcal{K} . Da das Zählmaß μ bezüglich dieser Gruppe symmetrisch ist, stellt

$$\mathcal{G} := \{ U_g \mid g \in G \}$$

eine Gruppe aus unitären Operatoren auf \mathcal{H} dar. Mit

$$U_\sigma := U_{g_\sigma} \quad (\text{für alle } \sigma \in \text{PER})$$

folgt

$$\mathcal{G} = \{ U_\sigma \mid \sigma \in \text{PER} \}$$

Für alle $\sigma \in \text{PER}$ bildet U_σ jedes der Tensorprodukte

$$b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n} \quad (\text{mit } (k_1, \dots, k_n) \in \mathcal{K})$$

ab auf

$$b_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes b_{k_{\sigma(n)}}$$

Die Gruppe \mathcal{G} beschreibt die Symmetrie der Vertauschung von "Teilchen" für den Fall, dass es sich bei den betroffenen Quanten um Bosonen handelt.

Macht man die unitären Abbildungen abhängig von dem Signum der jeweiligen Permutation, indem man definiert

$$U_{\text{ferm},\sigma} := (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} U_\sigma$$

so erhält man mit

$$\mathcal{G}_{\text{ferm}} := \{ U_{\text{ferm},\sigma} \mid \sigma \in \text{PER} \}$$

die entsprechende Gruppe unitärer Operatoren für den Fall der Fermionen. Man beachte, dass die Symmetriegruppe in diesem Fall (wegen des veränderten Vorzeichens) nicht in derselben kanonischen Weise auf der Symmetrie des Konfigurationsraumes beruht, wie wir es oben allgemein beschrieben haben.

Bemerkung: Die unitären Operatoren U_σ und $U_{\text{ferm},\sigma}$ sind unabhängig davon, welche Orthonormalbasis $(b_k)_k$ des Hilbertraums \mathcal{H}_1 bei der Definition zugrunde gelegt wurde (vgl. T.45.3).

Wir wollen hier nun den allgemeinen Fall einer Quantentheorie betrachten, die auf einem Hilbertraum \mathcal{H} sowie dem Hamiltonoperator H basiert und eine Symmetrie aufweist, welche durch eine Gruppe \mathcal{G} unitärer Operatoren beschrieben wird. Dabei setzen wir voraus, dass H (und folglich das Bewegungsgesetz) bezüglich \mathcal{G} symmetrisch ist.

Man kann in diesem Fall die Menge aller symmetrischen Eigenschaften definieren als

$$\mathcal{U}_{\text{sym}} := \{ A \in \mathcal{U} \mid \forall_{U \in \mathcal{G}} UA = A \}$$

Die Menge \mathcal{U}_{sym} ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Durchschnitten, direkten Summen und orthogonalen Komplementen, d.h. für $A, B \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ ist stets auch $A \cap B$, $A \oplus B$, $A^\perp \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$.

Eine Beschränkung der Theorie auf symmetrische Eigenschaften ist naturgemäß nur dann sinnvoll, wenn alle makroskopischen Eigenschaften sowie die Initialeigenschaft als symmetrisch angenommen werden können, d.h. wenn gilt:

$$S \subset \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

und

$$UR \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

Von dieser Annahme gehen wir im folgenden aus.

Anders als im klassischen Fall kann eine symmetrische Theorie im allgemeinen nicht ohne weiteres auf einem reduzierten Hilbertraum dargestellt werden. Eine solche Darstellung ist vielmehr erst dann möglich, wenn man die ursprüngliche Theorie um ein zusätzliches Gesetz erweitert. Hierdurch ändert sich formal der empirische Gehalt der Theorie, und in bestimmten Fällen ist die Gültigkeit des neu postulierten Gesetzes empirisch prüfbar. Im Falle der fermionischen Symmetrie impliziert dieses neue Gesetz z.B. das Pauli-Verbot, welches besagt, dass sich zwei Fermionen desselben Typs niemals im gleichen Zustand befinden können. Das Gesetz wäre also widerlegt, sobald man in einem Helium-Atom zwei Elektronen im Grundzustand beobachten würde, die denselben Spin aufweisen. Ob die Theorie um das zusätzliche Gesetz erweitert werden kann, ist demnach grundsätzlich eine empirische Frage.

Für die folgenden Überlegungen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall einer endlichen Symmetriegruppe. Wir bilden den "Kern" der Symmetrie als

$$K := [\{ \varphi - U \varphi \mid \varphi \in \mathcal{H} \wedge U \in \mathcal{G} \}]$$

wobei [...] die Bildung der linearen Hülle bezeichnet. K ist demnach ein Unterraum von \mathcal{H} , und es gilt:

$$K = \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} \text{Bild}(I-U)$$

Wir bezeichnen einen Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ als symmetrisch, wenn für alle $U \in \mathcal{G}$ gilt:

$$U\varphi = \varphi$$

Damit definieren wir

$$\mathcal{H}' := \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \varphi \text{ symmetrisch} \}$$

als die Menge aller symmetrischen Vektoren aus \mathcal{H} . Es ist dann \mathcal{H}' ein Unterraum von \mathcal{H} , und man kann zeigen, dass gilt:

$$\mathcal{H}' = K^\perp \quad (\text{vgl. T.45.4})$$

Aus der Tatsache, dass das Bewegungsgesetz symmetrisch ist, lässt sich schließen, dass K und \mathcal{H}' Konstanten der Bewegung sind (vgl. T.45.5). Außerdem sind K und \mathcal{H}' selbst symmetrisch und mit allen symmetrischen Eigenschaften vertauschbar (vgl. T.45.6 und T.45.7).

Das neue Gesetz kann nun – wenn es denn im Einklang mit den empirischen Befunden steht – in die ursprüngliche Theorie integriert werden, indem man

das zusätzliche (deterministische) Axiom

$$\text{SYM} := \{ \langle \mathcal{H}' \rangle_0 \}$$

in die Theorie aufnimmt. Dazu sei

$$\text{AX}_+ := \text{AX} \cup \text{SYM}$$

das entsprechend erweiterte Axiomensystem und $\hat{\Delta}_+$ der zugehörige Möglichkeitsoperator. Wir gehen im folgenden davon aus, dass es sich bei dem zusätzlichen Axiom SYM um ein Gesetz handelt, welches sich empirisch bewährt hat, so dass die Aufnahme dieses Axioms in die Theorie sinnvoll ist.

Das durch das Axiom SYM ausgedrückte zusätzliche Gesetz hat zur Folge, dass mehr Dokumentbeziehungen anzunehmen sind, als dies ohne dieses Gesetz der Fall wäre. Für ein makroskopisches Subjekt können dann auch mehr Folgen von Ereignissen (von einem Zeitpunkt t aus) empirisch zugänglich sein.

Die t -Zugänglichkeit einer Folge von Ereignissen (E_j, t_j) beruht auf dem Bestehen von Dokumentbeziehungen der Form

$$(*) \quad \pi_A \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_D \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Der Begriff der t -Zugänglichkeit ist demnach immer nur in Bezug auf eine bestimmte Initialeigenschaft UR zu verstehen.

Das zusätzliche Gesetz besagt nun, dass man stets von dem Eintreten des möglichen Ereignisses $\langle \mathcal{H}' \rangle_0$ ausgehen kann. Eine Dokumentbeziehung zwischen A und D ist daher schon dann anzunehmen, wenn gilt:

$$(**) \quad \pi_A \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{\mathcal{H}'} \pi_{UR} = \pi_D \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{\mathcal{H}'} \pi_{UR}$$

Sind die betrachteten Ereignisse (E_j, t_j) symmetrisch, so sind (aufgrund der Symmetrie des Bewegungsgesetzes und der Initialeigenschaft) alle in (**) auftretenden Unterräume symmetrisch und folglich mit \mathcal{H}' vertauschbar. Es spielt dann keine Rolle, an welcher Stelle man den Faktor $\pi_{\mathcal{H}'}$ auf beiden Seiten der Gleichung einfügt (vgl. T.45.8). Ein Ereignis (E, t) wird dabei als symmetrisch bezeichnet, wenn die Eigenschaft E symmetrisch ist.

Mit der Definition

$$\text{UR}' := \text{UR} \cap \mathcal{H}'$$

ist die Gleichung (**) äquivalent zu

$$(***) \quad \pi_A \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR'} = \pi_D \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR'}$$

Diese Gleichung entspricht formal der Beziehung (*), wobei lediglich UR durch UR' ersetzt ist.

Eine Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) ist daher – wenn wir von dem Axiomensystem AX_+ ausgehen – schon dann für ein makroskopisches Subjekt von einem Zeitpunkt t aus empirisch zugänglich, wenn sie im Sinne unserer früheren formalen Definition *bezüglich* UR' (und nicht notwendigerweise auch bezüglich UR) t -zugänglich ist.

Bemerkung: Jede bezüglich UR t -zugängliche Folge von Ereignissen ist erst recht t -zugänglich bezüglich UR' (vgl. T.45.9).

Wir beschreiben nun eine zweite Möglichkeit, wie das zusätzliche Gesetz in die durch AX gegebene Theorie aufgenommen werden kann. Sie besteht darin, die Initialbedingung $\langle UR \rangle_0$ durch die stärkere Bedingung $\langle UR' \rangle_0$ zu ersetzen (oder von vornherein anzunehmen, dass $UR < \mathcal{H}'$ ist). Anstatt die Theorie durch die Aufnahme des zusätzlichen Axioms SYM formal zu erweitern, nimmt man also an, dass die Initialeigenschaft ein Teilraum von \mathcal{H}' ist.

Aus der Perspektive makroskopischer Subjekte sind die beiden beschriebenen Möglichkeiten empirisch gleichwertig, da für jede (in Bezug auf UR') t -zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) gilt (vgl. T.45.10):

$$\Diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_0 \wedge \langle UR \rangle_0) \Leftrightarrow \Diamond(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_0 \wedge \langle UR' \rangle_0)$$

Bemerkung: Wir gehen hier davon aus, dass sich die Perspektive makroskopischer Subjekte auf empirisch zugängliche Folgen aus symmetrischen Ereignissen beschränkt. Zum einen müssen Ereignisse, die zum empirischen Wissen eines Subjekts gehören, naturgemäß empirisch zugänglich sein. Zum andern können sie aber auch als symmetrisch angenommen werden, und zwar aus folgenden Gründen: Ausgangspunkt für das empirische Wissen eines Subjekts sind dessen unmittelbare Wahrnehmungen und Erinnerungen sowie vorhandene Aufzeichnungen. Dabei handelt es sich um makroskopische und somit (wegen $S \subset \mathcal{U}_{sym}$) um symmetrische Ereignisse. Da nun sowohl das Bewegungsgesetz als auch die Initialbedingung symmetrisch ist, kann aus diesem unmittelbaren empirischen Wissen allenfalls auf solche Ereignisse geschlossen werden, die ebenfalls symmetrisch sind. So ist es einem makroskopischen Subjekt zum Beispiel nicht möglich, empirische Kenntnis von einem *bestimmten* einzelnen Elektron zu haben, wenn die Initialbedingung, das Bewegungsgesetz sowie alle makroskopischen Eigenschaften symmetrisch sind bezüglich der Teilchentauschsymmetrie, welche gerade auf der Nichtunterscheidbarkeit der Elektronen beruht.

Nach der Aufnahme des durch SYM angegebenen zusätzlichen Gesetzes in die Theorie kann man nun übergehen zu einer Theorie auf dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' . Hierzu beschränkt man H auf diesen Hilbertraum durch:

$$H' := H|_{\mathcal{H}'}$$

Eine symmetrische Eigenschaft $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ geht dabei über in die Eigenschaft

$$A' := A \cap \mathcal{H}'$$

im reduzierten Modell. Da $\pi_{\mathcal{H}'}$ mit H vertauschbar ist (siehe T.45.11), ist H' ein (selbstadjungierter) Operator auf dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' (s. T.45.12). Er beschreibt das Bewegungsgesetz der reduzierten Theorie. Den Möglichkeitsoperator dieser Theorie bezeichnen wir mit $\hat{\diamond}'$.

Vom Standpunkt makroskopischer Subjekte erweist sich die so reduzierte Theorie als empirisch gleichwertig zu der durch AX_+ definierten, d.h. zu der um das Axiom SYM erweiterten Theorie. Es gilt nämlich die Äquivalenz

$$\hat{\diamond}'(\forall_j \langle E_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o) \Leftrightarrow \hat{\diamond}_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

für jede (bezüglich UR') t -zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) , vgl. T.45.13. Sie besagt, dass ein makroskopisches Subjekt (unter unserer Annahme, dass das Bewegungsgesetz, die Initialeigenschaft sowie alle makroskopischen Eigenschaften symmetrisch sind) empirisch keinen Unterschied feststellen kann zwischen der durch $\hat{\diamond}_+$ und der durch $\hat{\diamond}'$ gegebenen Theorie. Die um das zusätzliche Axiom

$$\text{SYM} = \{ \langle \mathcal{H}' \rangle_o \}$$

erweiterte Theorie ist in diesem Sinne "makroskopisch-empirisch" gleichwertig zu der auf den Hilbertraum \mathcal{H}' reduzierten Theorie.

Zusammenfassung

In einer klassischen Theorie wird eine Symmetrie beschrieben durch eine Gruppe von Bijektionen auf dem Phasenraum Z . Diese Symmetriegruppe definiert eine Äquivalenzrelation " \sim " auf Z . Sind alle interessierenden Eigenschaften symmetrisch und gilt dies auch für das Bewegungsgesetz, so kann man die Theorie stets äquivalent darstellen auf einem reduzierten Phasenraum, der gebildet wird als Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich der Relation " \sim ".

Im Fall der Quantentheorie wird eine Symmetrie beschrieben durch eine Gruppe \mathcal{G} unitärer Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Wir setzen hierbei voraus, dass der Hamiltonoperator H , die Initialeigenschaft UR sowie alle makroskopischen Eigenschaften gegenüber \mathcal{G} symmetrisch sind.

Anders als im klassischen Fall ist die Darstellung einer symmetrischen Theorie auf einem reduzierten Hilbertraum erst dann möglich, wenn man die Theorie um ein zusätzliches Gesetz erweitert hat. Bezeichnet \mathcal{H}' den Unterraum der bezüglich \mathcal{G} symmetrischen Elemente von \mathcal{H} , so kann dieses Gesetz entweder

als zusätzliches Axiom

$$\text{SYM} := \{ \langle \mathcal{H}' \rangle_0 \}$$

mit der Definition

$$\text{AX}_+ := \text{AX} \cup \text{SYM}$$

in die Theorie eingeführt werden, oder dadurch, dass die Initialeigenschaft UR ersetzt wird durch

$$\text{UR}' := \text{UR} \cap \mathcal{H}'$$

Aus der Perspektive makroskopischer Subjekte sind diese beiden Möglichkeiten – unter den oben genannten Voraussetzungen – empirisch gleichwertig.

Dabei ist zu beachten, dass die Hinzunahme des neuen Gesetzes auch zu zusätzlichen Dokumentbeziehungen führt.

Ob es zulässig ist, dieses zusätzliche Gesetz in die Theorie aufzunehmen, ist – wie das Beispiel des Pauli-Verbots im Falle der fermionischen Symmetrie zeigt – grundsätzlich eine empirische Frage.

Nach Einführung des zusätzlichen Axioms SYM kann die Theorie auch auf dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' dargestellt werden. Dabei wird jede symmetrische Eigenschaft $A \in \mathcal{H}$ ersetzt durch die entsprechende Eigenschaft

$$A' := A \cap \mathcal{H}'$$

der auf \mathcal{H}' definierten Theorie, und das Bewegungsgesetz wird beschrieben durch den auf \mathcal{H}' beschränkten Hamiltonoperator

$$H' := H|_{\mathcal{H}'}$$

Das zugehörige Axiomensystem bezeichnen wir als AX' .

Zwischen der durch AX' auf \mathcal{H}' und der durch AX_+ auf \mathcal{H} gegebenen Theorie kann ein makroskopisches Subjekt empirisch keinen Unterschied feststellen.

Der wesentliche Unterschied zwischen der ursprünglichen (durch AX gegebenen) und der auf \mathcal{H}' definierten Theorie liegt somit darin, dass letztere das der Symmetriegruppe \mathcal{G} entsprechende Gesetz SYM implizit mitumfasst. In diesem Punkt unterscheidet sich die Quantentheorie wesentlich von der klassischen: Dort bedarf es nicht der Gültigkeit eines zusätzlichen Gesetzes, wenn man eine symmetrische Theorie darstellen will auf einem reduzierten Phasenraum.

46. Anmerkungen zu Symmetrien in der Quantentheorie

Anmerkung 1

Im Falle einer symmetrischen Theorie kann man das Axiomensystem AX auf symmetrische Eigenschaften beschränken, indem man überall \mathcal{U} durch \mathcal{U}_{sym} ersetzt. Die Axiome MON , SEC und SG werden dabei entsprechend eingeschränkt zu MON_{sym} , SEC_{sym} und SG_{sym} . Im einzelnen werden definiert:

$$\begin{aligned} MON_{\text{sym}} &:= \{ \langle A, t \rangle_o \rightarrow \langle B, t \rangle_o \mid A, B \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge A < B \wedge t \in T \} \\ SEC_{\text{sym}} &:= \{ \neg(\forall_j \langle A_j, t \rangle_o) \mid A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge \perp_j A_j \wedge t \in T \} \\ SG_{\text{sym}} &:= \{ \langle A, 0 \rangle_o \leftrightarrow \langle U_t A, t \rangle_o \mid A \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge t \in T \} \end{aligned}$$

Mit

$$AX_{\text{sym}} := MON_{\text{sym}} \cup SEC_{\text{sym}} \cup SG_{\text{sym}}$$

erhält man das auf symmetrische Eigenschaften eingeschränkte Axiomensystem, und es sei \Diamond_{sym} der zugehörige Möglichkeitsoperator. Offensichtlich gilt

$$AX_{\text{sym}} \subset AX$$

Somit ist die durch \Diamond_{sym} gegebene Theorie höchstens so stark wie die durch \Diamond gegebene.

Der Übergang von AX zu AX_{sym} kann sogar zu einer echten Abschwächung der Theorie führen. Anhand einfacher Beispiele (vgl. Anmerkung 2) lässt sich zeigen, dass es aus symmetrischen Eigenschaften gebildete empirische Materialien M gibt, welche unter dem Axiomensystem AX unmöglich, unter AX_{sym} jedoch möglich sind, für die also gilt:

$$\neg \Diamond(M) \wedge \Diamond_{\text{sym}}(M)$$

Dies zeigt, dass der formale empirische Gehalt (und damit auch der logische Gehalt) der Theorie schwächer werden kann, wenn man von der ursprünglichen Theorie mit dem Axiomensystem AX übergeht zu der Theorie mit dem nur auf symmetrische Eigenschaften bezogenen Axiomensystem AX_{sym} , und zwar auch dann, wenn man sich nur auf symmetrische (d.h. aus symmetrischen Eigenschaften gebildete) empirische Materialien bezieht.

Allerdings betrifft dies nicht den empirischen Gehalt, soweit er für ein makroskopisches Subjekt von Bedeutung ist. Für eine (bezüglich UR) t -zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) gilt nämlich (vgl. T.46.1):

$$\Diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \Leftrightarrow \Diamond(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Dies besagt, dass ein makroskopisches Subjekt empirisch keinen Unterschied feststellen kann zwischen der durch das Axiomensystem AX und der durch AX_{sym} gegebenen Theorie.

Ausgehend von dem auf symmetrische Eigenschaften beschränkten Axiomensystem AX_{sym} kann man analog zu AX_+ definieren

$$AX_{\text{sym},+} := AX_{\text{sym}} \cup \text{SYM}$$

und den zugehörigen Möglichkeitsoperator $\diamond_{\text{sym},+}$ einführen. Das Axiomensystem $AX_{\text{sym},+}$ erhält man auch, indem man AX_+ auf symmetrische Eigenschaften beschränkt. Somit gilt (in Analogie zu der Beziehung zwischen AX_{sym} und AX):

$$AX_{\text{sym},+} \subset AX_+$$

Man kann zeigen, dass auch die durch $AX_{\text{sym},+}$ gegebene Theorie echt schwächer sein kann als die durch AX_+ gegebene (vergleiche T.46.12). Es gilt aber wiederum die Aussage, dass ein makroskopisches Subjekt empirisch keinen Unterschied feststellen kann zwischen der durch das Axiomensystem AX_+ und der durch $AX_{\text{sym},+}$ gegebenen Theorie. Es gilt nämlich für jede (bezüglich UR') t-zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) die Äquivalenz (vergleiche T.46.2):

$$\diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o) \Leftrightarrow \diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

Die reduzierte Theorie erweist sich, sofern man sich nur auf symmetrische empirische Materialien bezieht, als empirisch gleichwertig zu der durch $\diamond_{\text{sym},+}$ definierten, d.h. zu der um das Axiom SYM erweiterten und auf symmetrische Axiome beschränkten Theorie. Insbesondere gilt für beliebige $A_j \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ und $t_j \in T$:

$$\diamond'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_o) \Leftrightarrow \diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o) \quad (\text{vgl. T.46.3})$$

Anmerkung 2

Um ein Beispiel zu konstruieren für ein empirisches Material M aus symmetrischen Eigenschaften, welches unter dem Axiomensystem AX unmöglich, unter AX_{sym} jedoch möglich ist, betrachten wir ein System aus zwei nicht unterscheidbaren "Quanten", die jeweils nur zwei verschiedene Zustände aufweisen können. Jedes dieser "Quanten" kann beschrieben werden mittels des Hilbertraums

$$\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}^2$$

mit der Orthonormalbasis $(e_j)_j$ für $j \in \{1,2\}$. Für das betrachtete Gesamtsystem erhalten wir den Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

mit der Orthonormalbasis

$$e_{jk} := e_j \otimes e_k \quad (\text{für } j,k \in \{1,2\})$$

Für die bosonische "Teilchentausch"-Symmetrie erhält man als Kern den ein-dimensionalen Unterraum

$$K := [e_{12} - e_{21}] \quad (\text{vgl. T.46.4})$$

In \mathcal{H} kann man dann eine Orthonormalbasis $(b_j)_j$ so wählen, dass gilt:

$$K = [b_1 + b_2 + b_3]$$

Mit

$$A := [b_2 - b_1, b_4]$$

$$B := [b_3 - b_1, b_4]$$

$$C := [b_3 - b_2]$$

definieren wir drei Unterräume von \mathcal{H} , wobei A und B nicht miteinander vertauschbar sind (vgl. T.46.5). Da A, B und C Teilräume von K^\perp sind (vgl. T.46.6), handelt es sich um symmetrische Eigenschaften, d.h. es gilt:

$$A, B, C \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \quad (\text{vgl. T.46.7})$$

Wir betrachten nun das empirische Material

$$M := \langle A \rangle_o \wedge \langle B \rangle_o \wedge \langle C \rangle_o$$

Mit $[b_3]^\perp$, $[b_2]^\perp$ und $[b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp$ gibt es drei Oberräume von A, B bzw. C, die paarweise vertauschbar sind und als Durchschnitt den Nullraum ergeben (vgl. T.46.8 und T.46.9). Aufgrund der Axiome MON und SEC ist das (symmetrische) empirische Material M daher unmöglich, d.h. es gilt:

$$\neg \hat{\diamond}(M)$$

Man kann zeigen, dass es in \mathcal{H} keine paarweise vertauschbaren, *symmetrischen* Oberräume von A, B und C gibt, deren Durchschnitt der Nullraum ist. Gäbe es nämlich derartige Oberräume D_A , D_B und D_C , so erhielte man mit

$$E_A := D_A \cap K^\perp$$

$$E_B := D_B \cap K^\perp$$

$$E_C := D_C \cap K^\perp$$

ebenfalls paarweise vertauschbare, symmetrische Oberräume von A, B und C, deren Durchschnitt der Nullraum ist. Dies ist aber nicht möglich, da es wegen $\dim A = \dim B = 2$ und $\dim K^\perp = 3$ in K^\perp (mit Ausnahme von K^\perp selbst) überhaupt keine echten Oberräume von A oder B gibt (vgl. T.46.10). Das empirische Material M ist folglich in der auf AX_{sym} basierenden Theorie nicht mehr unmöglich, d.h. es gilt:

$$\diamond_{\text{sym}}(M) \quad (\text{vgl. T.46.11})$$

Das Beispiel zeigt, dass der formale empirische Gehalt (und damit auch der logische Gehalt) der Theorie schwächer werden kann, wenn man von der ursprünglichen Theorie mit dem Axiomensystem AX übergeht zu der Theorie mit dem nur auf symmetrische Eigenschaften bezogenen Axiomensystem AX_{sym} . Dies gilt auch dann, wenn man sich nur auf symmetrische empirische Materialien bezieht.

47. Die Modellierung konkreter physikalischer Objekte

Subsysteme des Hilbertraums des Universums können dazu dienen, physikalische Objekte darzustellen. Sie selbst sind jedoch keine konkreten physikalischen Objekte im üblichen Sinne, wie z.B. ein Stein oder ein Proton. Vielmehr handelt es sich um abstrakte mathematische Objekte, vergleichbar etwa mit Teilmengen oder Unterräumen. Derartigen Objekten kommt eine ewige Existenz zu. Ein "Quant" ist in diesem Sinne ein spezielles Subsystem und kein (konkretes) physikalisches Objekt.

Im Gegensatz zu den (abstrakten) Subsystemen haben konkrete physikalische Objekte stets eine bestimmte "Lebensdauer". Sie sind darüber hinaus stets "lokal", d.h. sie befinden sich in einem beschränkten Raumbereich. Dies ist im Grunde nichts anderes als eine Frage der Definition des Begriffs "Objekt": Ein Eiswürfel ist ein solches Objekt, aber wenn er verdampft ist, kann per definitionem nicht mehr von einem "Objekt" die Rede sein. Auch ein Proton, aufgefasst als ein konkretes physikalisches Objekt, ist immer lokal. Ein nicht-lokales Proton stellt in diesem Sinne kein konkretes Objekt dar.

"Ewige Existenz" kommt nur den Subsystemen zu, als abstrakten Konstrukten der Theorie. Die Vorstellung, dass das Universum aus "ewigen" Atomen oder Elementarteilchen besteht, kann in der Quantentheorie nicht aufrechterhalten werden. Dies gilt nicht erst in der Quantenfeldtheorie, sondern ebenso in der Quantenmechanik.

Konkrete physikalische Objekte werden in der Quantenmechanik durch bestimmte Subsysteme dargestellt. Man kann z.B. ein Proton (das als ein physikalisches Objekt irgendwo auftreten kann, z.B. in einer Ionenfalle) durch ein entsprechendes Subsystem Q (ein "Proton-Quant") darstellen. Jeder Eigenschaft des Protons (z.B. einer Ortseigenschaft der Form $x \in \Delta x$) entspricht dann ein Unterraum A' des Hilbertraums \mathcal{H}_Q und somit auch ein Unterraum

$$A_{Q,\Delta x} := \alpha_Q(A')$$

von \mathcal{H} .

Da sich jedes andere Proton-Quant ebensogut zur Darstellung des konkreten Protons eignet, erhält man so verschiedene Unterräume $A_{Q,\Delta x}$ von \mathcal{H} , welche die Tatsache darstellen, dass sich im Raumbereich Δx ein Proton aufhält. Die eindeutige Modellierung dieser Tatsache erfolgt dann durch Bildung der direkten Summe dieser Unterräume, d.h. durch

$$A_{\Delta x} := \oplus \{ A_{Q,\Delta x} \mid Q \text{ ist ein Proton-Quant} \}$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch wesentlich komplexere (konkrete) physikalische Objekte darstellen mit Hilfe von Subsystemen des Hilbertraums des Universums, die aus vielen Quanten zusammengesetzt sind. Einer Eigenschaft

eines solchen Objekts entspricht dann ein Unterraum von \mathcal{H} . Indem man die an der Modellierung des Universums beteiligten Quanten gleicher Art in jeder möglichen Weise permutiert, erhält man viele verschiedene Unterräume, mit denen eine bestimmte Eigenschaft des Objekts dargestellt werden kann. Die Modellierung dieser Eigenschaft als *ein* Unterraum von \mathcal{H} erfolgt dann wiederum durch Bildung der direkten Summe dieser Unterräume.

Auch das bloße Vorhandensein eines Objekts einer bestimmten Art ist eine Eigenschaft des Universums. Die beschränkte Lebensdauer des Objekts ergibt sich daraus, dass diese Eigenschaft zu bestimmten Zeiten gegeben ist und zu anderen nicht. Dies gilt für mikroskopische Objekte ebenso wie für makroskopische.

Diese Überlegungen zeigen auch, dass in der Quantentheorie keine physikalischen Objekte als solche modelliert werden. Gegenstand der Modellierung kann hier stets nur ein Objekt zusammen mit seinen Eigenschaften sein. (Der "Mann ohne Eigenschaften" existiert in der Quantentheorie nicht.)

Man hat hier eine gewisse Analogie zu einer reinen (klassischen) Feldtheorie, in der Objekte einer bestimmten Art etwa als "Wellenberge" mit entsprechender Form darzustellen wären. Jeder Eigenschaft eines solchen Objekts entspräche dann eine Eigenschaft des Feldes. Auch das bloße Vorhandensein des Objekts als solches würde durch eine Eigenschaft des Feldes dargestellt. Die beschränkte Lebensdauer des Objekts ergäbe sich daraus, dass diese Eigenschaft nur zu bestimmten Zeiten gegeben wäre. Diese Analogie darf allerdings nicht dahingehend interpretiert werden, dass die Quantentheorie sich auf eine klassische Feldtheorie zurückführen lasse.

Die Tatsache, dass ein Objekt nicht in eindeutiger Weise aus Quanten "zusammengesetzt" ist, verweist auf eine Symmetrie, die für die Quantenmechanik charakteristisch ist, die "Teilchentausch"-Symmetrie nicht unterscheidbarer Quanten. Bei diesen Quanten kann es sich um Bosonen oder um Fermionen handeln.

Wir wollen annehmen, dass es N_b verschiedene Arten von Bosonen und N_f Arten von Fermionen im Universum gibt. Wenn nun σ eine beliebige Permutation gleichartiger Quanten bezeichnet, so wird σ beschrieben durch je eine Permutation σ_b für jede Bosonenart ($1 \leq b \leq N_b$) und je eine Permutation τ_f für jede Fermionenart ($1 \leq f \leq N_f$). Durch σ wird – ähnlich wie bei unserem Vorgehen im vorletzten Kapitel – ein unitärer Operator U_σ auf \mathcal{H} festgelegt.

Mit

$$k_\sigma := \sum_f \text{sgn}(\tau_f)$$

wird der Operator

$$V_\sigma := (-1)^{k_\sigma} U_\sigma$$

definiert, welcher den für die Vertauschung zweier Fermionen typischen Vorzeichenwechsel beinhaltet.

Mit

$$\mathcal{G} := \{ V_\sigma \mid \sigma \text{ ist eine Permutation gleichartiger Quanten} \}$$

erhalten wir dann eine Symmetriegruppe aus unitären Operatoren auf \mathcal{H} . Hierzu definieren wir mit

$$\mathcal{H}' := \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \forall_{U \in \mathcal{G}} U\varphi = \varphi \}$$

die Menge aller bezüglich \mathcal{G} symmetrischen Elemente von \mathcal{H} .

Wir haben dargelegt, wie die Modellierung von Eigenschaften konkreter physikalischer Objekte durch Unterräume A von \mathcal{H} erfolgt. Die dabei gebildeten Unterräume sind gegenüber der Vertauschung gleichartiger Quanten symmetrisch.

Wenn beispielsweise die Modellierung eines Protons durch ein bestimmtes Proton-Quant Q erfolgen kann, so gilt mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$A_{\Delta x} = \bigoplus_{\sigma} V_\sigma(A_{Q, \Delta x})$$

Hierbei durchläuft V_σ alle Elemente der (endlichen) Gruppe \mathcal{G} . Ähnliches gilt für jedes beliebige $A < \mathcal{H}$, welches das Vorhandensein eines konkreten physikalischen Objekts mit bestimmten Eigenschaften darstellt.

Wegen der Ununterscheidbarkeit gleichartiger Quanten ist davon auszugehen, dass der Hamiltonoperator H , die Initialeigenschaft UR sowie alle makroskopischen Eigenschaften $S \in \mathcal{S}$ bezüglich \mathcal{G} symmetrisch sind.

Ob nun das zu der Symmetriegruppe \mathcal{G} gehörende Gesetz

$$\text{SYM} := \{ \langle \mathcal{H}' \rangle_0 \}$$

als ein zusätzliches Axiom angenommen werden kann, ist grundsätzlich eine empirische Frage.

Wenn wir davon ausgehen, dass sich die Annahme dieses Gesetzes empirisch bewährt hat (dass also z.B. das von der fermionischen Symmetrie implizierte Pauli-Verbot mit den empirischen Befunden übereinstimmt), so können wir das Axiomensystem AX um das neue Gesetz SYM erweitern zu

$$AX_+ := AX \cup \text{SYM}$$

An der Modellierung der Eigenschaften des Universums als Unterräume von \mathcal{H} ändert sich hierdurch nichts.

Man kann nun aber auch übergehen zu dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' und den Hamiltonoperator H auf \mathcal{H}' beschränken. Eine symmetrische Eigenschaft A

des Universums, die das Vorhandensein eines physikalischen Objekts mit einer bestimmten Objekteigenschaft beschreibt, geht dabei über in die Eigenschaft

$$A' := A \cap \mathcal{H}'$$

im reduzierten Modell.

48. Quantenfeldtheorie

Wir haben uns in den bisherigen Ausführungen auf die Quantenmechanik beschränkt, da sie die einfachste Form einer Quantentheorie ist. Unsere Aussagen bezogen sich dabei auf das quantenmechanische Modelluniversum. Im Rahmen dieser Theorie lassen sich viele Eigenschaften des realen Universums nicht beschreiben, z.B. das Auftreten elektromagnetischer Felder und somit auch die Existenz des Lichts. Außerdem steht die Quantenmechanik nicht im Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie. Sinnvoll ist daher die Betrachtung der Quantenfeldtheorie (QFT), der wir uns nun zuwenden wollen.

Anders als die Quantenmechanik entspricht die QFT der speziellen Relativitätstheorie, und sie erlaubt es, Felderscheinungen in die Betrachtung einzubeziehen. Gegenstand der QFT ist aber immer noch nicht das reale Universum, für das ja auch die allgemeine Relativitätstheorie gilt, sondern lediglich ein quantenfeldtheoretisches Modelluniversum, das auf dem Minkowski-Raum basiert und in dem beispielsweise die Wirkungen der Gravitation nicht korrekt beschrieben werden können.

Die QFT zeichnet sich dadurch aus, dass sie Partikel und Felder in einem einheitlichen Ansatz darstellt. Dies steht im Gegensatz zur klassischen Physik, in der man die Existenz von (über die gesamte Zeitachse stabil bleibenden) elementaren Teilchen voraussetzt und die zwischen ihnen wirksamen Kräfte durch Felder beschreibt. Während also der Dualismus von "Welle und Teilchen" in der klassischen Physik am Anfang der Theoriebildung steht, ergeben sich in der Quantentheorie sowohl wellenartige als auch teilchenartige Phänomene aus den gleichen grundlegenden Prinzipien.

Es ist zunächst festzustellen, dass in der QFT grundsätzlich dieselben Deutungsprobleme auftreten wie in der Quantenmechanik. Die mit dem Kochen-Specker'schen No-Go-Theorem einhergehenden Probleme (Inkonsistenzen der deterministischen Gesetze der Quantentheorie) treten auch in der QFT auf. Gleiches gilt für die Probleme mit der Bell'schen Ungleichung hinsichtlich der Existenz bestimmter Wahrscheinlichkeitsmaße. Beides ergibt sich allein schon aus der Tatsache, dass es sich bei der Quantenmechanik um einen Randfall der QFT handelt, nämlich um den Fall, in dem der "Teilchenzahl"-Operator auf einen bestimmten Wert festgelegt ist.

Konkret führt die Annahme einer allgemeinen Wertbestimmtheit der numerischen Observablen (value definiteness) in der QFT ebenso wie in der Quantenmechanik zu Widersprüchen. Während sich die fehlende Wertbestimmtheit in der Quantenmechanik allerdings auf numerische Größen wie die Orte und Impulse von Teilchen bezieht, geht es in der QFT um die Wertbestimmtheit von solchen Größen wie der Feldstärke an einem Punkt des Raumes oder der Änderung dieser Feldstärke mit der Zeit.

Insbesondere kann die fehlende Wertbestimmtheit in Bezug auf die Orte und Impulse von Teilchen in der Quantentheorie nicht dadurch behoben werden, dass man das Auftreten von Teilchen als ein Geschehen im Rahmen einer Feld-dynamik auffasst, bei der die Feldgrößen zu jeder Zeit und an jedem Ort einen definierten Wert haben (wie dies in klassischen Feldtheorien angenommen wird).

Wie bei der Quantenmechanik schreibt man einem System auch in der QFT einen Zustand zu und versucht, ein Ereignis der Form $L \in \Delta L$ zu beobachten, wobei L eine numerische Observable ist. Gefragt wird dann nach der Wahrscheinlichkeit für eine solche Beobachtung. Dabei bestehen in der QFT dieselben Unklarheiten wie in der Quantenmechanik hinsichtlich des Zustandsbegriffs, der Wertbestimmtheit der Observablen, der Rolle von Beobachtungen und Messungen sowie der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Auch in der QFT stellt sich die Frage nach der Notwendigkeit einer Quantenlogik sowie die Frage nach der Unverträglichkeit der physikalischen Theorie mit dem ontologischen Realismus, d.h. mit der Annahme, dass es eine reale Welt gibt, die unabhängig davon existiert, ob sie durch Subjekte beobachtet wird oder nicht.

Aus diesen Gründen wollen wir nun erörtern, ob und inwieweit sich die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungen der genannten Probleme auch auf die QFT anwenden lassen. Dazu fassen wir diese Lösungswege hier noch einmal kurz zusammen.

Das mit dem Kochen-Specker-Theorem einhergehende No-Go-Problem der deterministischen Gesetze der Quantenmechanik haben wir gelöst, indem wir das physikalische "tertium non datur" (als eines der Axiome) aufgegeben haben. Damit verbunden ist die Aufgabe der Wertbestimmtheit (value definiteness), d.h. der Annahme, dass jede numerische Observable zu jeder Zeit einen bestimmten Wert aufweist. Zugleich bedeutet dies auch die Aufgabe der Vorstellung, das Universum bestehe aus "ewigen", stets lokalen Atomen bzw. Elementarteilchen. An die Stelle des "numerischen Realismus" tritt der Realismus der Fakten, an die Stelle der Wertbestimmtheit eine "Wahrheitswert-Bestimmtheit" (truth value definiteness), welche besagt, dass jede mögliche Eigenschaft zu jeder Zeit (und damit jedes mögliche Ereignis) einen Wahrheitswert hat. Jedes mögliche Faktum hat dann, als logische Kombination möglicher Ereignisse, ebenfalls einen Wahrheitswert. Auf diese Weise wird am ontologischen Realismus festgehalten, und auch die klassische Logik (insbesondere das logische "tertium non datur") wird beibehalten.

Um das Problem der Bell'schen Ungleichung zu lösen, haben wir in Anlehnung an die modallogischen Begriffe der Notwendigkeit und der Möglichkeit einen allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt. Hierbei fungieren der Notwendigkeitsgrad ν und der Möglichkeitsgrad μ als die grundlegenden Größen. Für dieses Konzept der Wahrscheinlichkeit sind schwächere Axiome anzunehmen als die für den Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff

charakteristische Additivität. Da für v und μ keine Bell'sche Ungleichung gilt, lässt sich der so gebildete allgemeine (nicht Kolmogoroff'sche) Wahrscheinlichkeitsbegriff auch im Rahmen der Quantentheorie widerspruchsfrei auf die Menge aller möglichen Fakten anwenden. Der (übliche) Wahrscheinlichkeitsbegriff im Sinne von Kolmogoroff kann auf dieser Basis definiert werden als Limes relativer Häufigkeiten, und hieraus ergibt sich seine Additivität. Er kann jeweils nur angewendet werden auf die Ergebnisse eines makroskopisch beobachtbaren, wiederholbaren Experiments, d.h. auf die Art von Situationen, für die er ursprünglich auch konzipiert wurde.

Um die Tatsache zu berücksichtigen, dass das Geschehen im Universum durch eine Zunahme der Entropie geprägt ist, haben wir außerdem eine Initialbedingung $\langle UR \rangle$ angenommen. Durch diese Bedingung wird u.a. der Zeitpfeil in die Theorie eingeführt. Auf dieser Basis lässt sich zu bestimmten Bedingungen für jedes Subsystem des Universums ein Quantenzustand definieren. Als Bedingung kann man hier das Wissen eines Subjekts einsetzen. Damit lässt sich erklären, wie es zu einer Änderung des für ein Subjekt relevanten (bedingten) Quantenzustands kommen kann, wenn das Subjekt eine Messung vornimmt oder eine Beobachtung macht.

Wir fragen nun, ob es unter Verwendung dieser Lösungsansätze möglich ist, auch die QFT als eine ontologisch realistische Theorie zu formulieren, die auf der klassischen Logik basiert und die außerdem den empirischen Gehalt hat, den wir von der QFT erwarten.

Um diese Frage beantworten zu können, stellen wir die formalen Voraussetzungen, unter denen die genannten Lösungsansätze angewendet werden können, hier noch einmal kurz zusammen.

- Zur Beschreibung des Universums wird von einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} ausgegangen, d.h. von einem Hilbertraum, der eine endliche oder abzählbare Orthonormalbasis besitzt.
- Die Eigenschaften des Universums werden modelliert als abgeschlossene lineare Unterräume von \mathcal{H} . Auf dieser Grundlage wird die Menge der möglichen Fakten gebildet.
- Ausgehend von einem selbstadjungierten Operator H auf \mathcal{H} , dem Hamiltonoperator, wird das Zeitverhalten des Universums beschrieben durch ein deterministisches Bewegungsgesetz, die Schrödingergleichung.
- Das Skalarprodukt auf \mathcal{H} wird verwendet, um den Spuroperator tr zu definieren. Auf dieser Basis erfolgt die Definition eines äußeren Maßes μ auf der Menge der möglichen Fakten. Die daraus ableitbaren bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot | \cdot)$ legen die von der Theorie anzugebenden Möglichkeitsgrade fest.

- Eine spezielle Eigenschaft des Universums wird als Initialeigenschaft angenommen und durch einen Unterraum UR von \mathcal{H} dargestellt. (UR kann als endlich-dimensional angenommen werden.)

Für die angegebenen Lösungswege gibt es also im wesentlichen nur zwei Voraussetzungen: Zum einen müssen die Eigenschaften des Universums modelliert werden können als (abgeschlossene) Unterräume eines separablen Hilbertraums \mathcal{H} . Zum andern wird ein deterministisches Bewegungsgesetz benötigt, das durch einen (selbstadjungierten) Hamiltonoperator H auf \mathcal{H} bestimmt ist.

Wir müssen uns also fragen, ob diese beiden Voraussetzungen erfüllt sind (bzw. ob sie sich erfüllen lassen) für relevante Quantenfeldtheorien, insbesondere für nicht-abelsche Eichtheorien wie z.B. das Standardmodell.

Die Lektüre der Literatur zur QFT legt zunächst den Schluss nahe, dass die beiden genannten Voraussetzungen ohne weiteres erfüllt sind. Regelmäßig werden dort gewisse Feldoperatoren vorausgesetzt, womit mehr oder weniger implizit angenommen wird, dass diese Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} definiert sind. Auf dieser Basis lässt sich dann der Hamiltonoperator als ein selbstadjungierter Operator auf \mathcal{H} einführen und die Schrödingergleichung ableiten.

Ebenso wie in der Quantenmechanik ergibt sich so in der QFT für das Universum als Ganzes (zu einem festen Lorentz-Koordinatensystem) ein deterministisches Bewegungsgesetz. Diesbezüglich gibt es also keinen Unterschied zwischen der QFT und der Quantenmechanik. Dabei spielt es keine Rolle, dass bei der Herleitung des Bewegungsgesetzes häufig der Lagrange-Formalismus im Vordergrund steht.

Bemerkung: Üblicherweise steht in der Quantenmechanik ein bestimmtes Quantensystem im Zentrum der Überlegungen, und die Schrödingergleichung wird auf ein solches System angewendet. Im Gegensatz dazu haben wir das quantenmechanische Modelluniversum als Ganzes zum Gegenstand der Betrachtung gemacht und hierfür die Schrödingergleichung als allgemein gültiges Bewegungsgesetz formuliert. Für die QFT ist dieses Vorgehen von vornherein plausibel, da sie Quantenfelder beschreibt, die über den gesamten Raum ausgeht sind.

Es hat also den Anschein, als könnten wir die für die Quantenmechanik beschriebenen Lösungswege problemlos auf die QFT übertragen. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass in den grundlegenden Texten zur QFT die erforderlichen Feldoperatoren meist ohne eine präzise mathematische Grundlage eingeführt werden und dass mit den auf dieser Basis aufgestellten Gleichungen in einer bloß formalen Weise gerechnet wird. Unklar bleibt dabei, ob und wie die jeweiligen Herleitungen mathematisch gerechtfertigt werden können. Anders als bei der Quantenmechanik fehlt es für eine präzise Fundierung der QFT überhaupt an der erforderlichen mathematischen Theorie.

So wird der zugrundeliegende Hilbertraum in der QFT im allgemeinen nicht präzise definiert, wohingegen in der Quantenmechanik die Definition von \mathcal{H} als Hilbertraum aus quadratisch integrierbaren Funktionen möglich und üblich ist. Auch führt die lediglich formale Definition eines Hamiltonoperators in der QFT zu der Frage, welche Rolle hierbei die in dieser Theorie typischerweise auftretenden Divergenzen spielen und wie sich diese Divergenzen mit einem mathematisch klar definierbaren Verfahren beheben lassen. Derartige Divergenzen entstehen als Infrarot-Divergenzen aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Raumes und als Ultraviolett-Divergenzen aufgrund der unendlichen Feinheit des Raum-Kontinuums. Zusätzliche Probleme bei der Definition eines Hilbertraumes sowie eines Hamiltonoperators ergeben sich im Zusammenhang mit der Eichsymmetrie bei nicht-abelschen Eichtheorien.

Vor allem stellt sich also zunächst die Frage, ob man in der QFT stets von einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} ausgehen kann, d.h. ob (und wie) sich die für die QFT relevanten Operatoren auf einem solchen Hilbertraum darstellen lassen.

Im Falle der Quantenmechanik eines Systems aus N Teilchen (ohne Spin) im dreidimensionalen Raum kann der Hilbertraum definiert werden als

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

Dieser Hilbertraum ist darstellbar als das $3N$ -fache Tensorprodukt des Raumes

$$\mathcal{H}_1 := \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

mit sich selbst. Die Theorie hat daher $3N$ und somit endlich viele Freiheitsgrade. Ebenso wie \mathcal{H}_1 ist dann auch \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum.

Anders verhält es sich mit der QFT. Hier müsste man den Hilbertraum formal als unendliches Tensorprodukt aus separablen Hilberträumen bilden. Im allgemeinen ist nicht zu erwarten, dass dies wieder einen separablen Hilbertraum ergibt.

Bemerkung: Da man in der QFT normalerweise von Operatoren $\Phi(\mathbf{x})$ ausgeht, wobei \mathbf{x} einen Punkt im Raum \mathbb{R}^3 bezeichnet, könnte der Anschein entstehen, man habe es mit einem überabzählbar unendlichen Tensorprodukt aus separablen Hilberträumen zu tun. Dies ist aber nicht so. Bei $\Phi(\mathbf{x})$ handelt es sich nicht um eine Abbildung, die jedem Raumpunkt \mathbf{x} einen Operator zuordnet, sondern um eine operatorwertige Distribution. Ebenso, wie man durch Fourier-Transformationen von der Orts- in die Impuls-Darstellung übergehen kann, kann man auch zu einer diskreten Darstellung der Operatoren als $\Phi(n)$ (mit $n \in \mathbb{N}$) übergehen, indem man eine abzählbare Orthonormalbasis $(h_n)_n$ des Raumes

$$\mathcal{H}_3 := \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

zugrunde legt und definiert:

$$\Phi(n) := \int \Phi(\mathbf{x}) h_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Eine solche Orthonormalbasis $(h_n)_n$ kann beispielsweise mit Hilfe von Hermite-Polynomen gebildet werden. An die Stelle der operatorwertigen Distribution $\Phi(\mathbf{x})$ tritt damit eine "operatorwertige Folge", d.h. eine einfache Folge $\Phi(n)$ von Operatoren. Dies zeigt, dass in der QFT "nur" von einer abzählbar unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden auszugehen ist.

Im Auftreten unendlich vieler Freiheitsgrade in der QFT liegt der wesentliche Grund für die Probleme bei der Angabe eines separablen Hilbertraumes, auf dem die für die QFT relevanten Operatoren dargestellt werden können. Zugleich führt dies auch zu den oben genannten Divergenzen, die einer präzisen Definition des Hamiltonoperators entgegenstehen können.

Dennoch ist die Suche nach einem separablen Hilbertraum für die Darstellung der Operatoren der QFT nicht von vornherein zum Scheitern verurteilt. In bestimmten Fällen (namentlich dann, wenn die QFT über eine sogenannte zweite Quantisierung eingeführt wird) gelingt es, einen separablen Hilbertraum (den sogenannten Fockraum) zu bilden, auf dem die erforderlichen Operatoren definiert werden können.

Man geht in diesem Fall aus von der Darstellung eines Systems aus n Teilchen mit einem separablen Hilbertraum \mathcal{H}_n . Die Identifikation der voneinander nicht unterscheidbaren Teilchen führt zu dem Quotientenraum \mathcal{F}_n . Dies ist ebenfalls ein separabler Hilbertraum. Gibt man nun den Parameter n frei und bildet den zugehörigen Fockraum \mathcal{F} als direkte Summe dieser Hilberträume, so ergibt sich wiederum ein separabler Hilbertraum. Hierauf können die Feldoperatoren in der gewünschten Weise definiert werden. Auf diese Weise erhält man eine QFT, der ein separabler Hilbertraum zugrunde liegt.

Allerdings ist dieses Vorgehen nicht in allen Fällen möglich. In einer Theorie mit mehreren Feldern, zwischen denen es Wechselwirkungen gibt (und nur solche Theorien sind letztlich relevant), kann der Grundzustand (das "Vakuum") nicht ohne weiteres als ein Element des Fockraums angenommen werden. Probleme ergeben sich außerdem in Eichtheorien, da bei einer Eichfixierung auf der Basis eines separablen Hilbertraums nicht notwendigerweise wieder ein solcher Hilbertraum entstehen muss. Ob sich in diesen Fällen auf andere Weise ein separabler Hilbertraum angeben lässt, ist eine offene Frage.

Aber auch wenn es für relevante Quantenfeldtheorien, insbesondere für nicht-abelsche Eichtheorien mit wechselwirkenden Feldern, möglich sein sollte, einen passenden Hilbertraum \mathcal{H} zu definieren, bleibt doch das Problem, hierauf einen selbstadjungierten Hamiltonoperator H zu konstruieren, und zwar so, dass die mit der unendlichen Anzahl der Freiheitsgrade einhergehenden Divergenzen entweder gar keine Rolle spielen oder aber im Wege einer mathe-

matisch exakt durchführbaren Renormierung behoben werden können. Solange noch nicht einmal klar ist, welcher Hilbertraum dabei zugrunde gelegt werden kann, lässt sich dieses Problem ebenfalls nicht mit der erforderlichen Präzision lösen.

Fassen wir zusammen: In bestimmten einfachen Fällen kann der Hilbertraum einer QFT als Fockraum gebildet werden und man kann darauf die erforderlichen Feldoperatoren definieren. In diesem Fall liegt der QFT ein separabler Hilbertraum zugrunde. In weniger einfachen Fällen ist die Bildung eines geeigneten separablen Hilbertraums jedoch nicht so leicht möglich. Dies gilt insbesondere auch für nicht-abelsche Eichtheorien. Für den allgemeinen Fall (bis hin zum Standardmodell) ist die Frage, ob eine Darstellung der Theorie auf einem separablen Hilbertraum möglich ist, noch nicht abschließend geklärt. Solange diese Klärung noch nicht erfolgt ist, bleibt auch die Frage offen, ob und wie sich der Hamiltonoperator H auf dem Hilbertraum widerspruchsfrei konstruieren lässt.

Zu der Frage, ob sich die von uns für eine Deutung der Quantenmechanik im Sinne des ontologischen Realismus angegebenen Lösungswege auch auf relevante Quantenfeldtheorien (wie z.B. das Standardmodell) anwenden lassen, sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

Entweder gelingt die Darstellung relevanter Quantenfeldtheorien mittels eines separablen Hilbertraumes \mathcal{H} und eines darauf definierten selbstadjungierten Hamiltonoperators H , der das Bewegungsgesetz beschreibt. In diesem Fall lassen sich die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungswege eins zu eins auf die QFT übertragen, und man erhält eine ontologisch realistische Fassung der QFT.

Oder aber die Darstellung der QFT gelingt so nicht, und man benötigt für eine präzise Darstellung dieser Theorie eine andere formal-mathematische Konstruktion. In diesem Fall müssten die Lösungswege entsprechend angepasst werden. Ob und wie dies möglich ist, kann aber erst dann entschieden werden, wenn eine überzeugende Lösung für das Problem einer präzisen mathematischen Fundierung der QFT vorliegt.

Solange die Frage einer mathematisch präzisen Darstellung der QFT nicht geklärt ist und wir folglich nicht entscheiden können, ob und wie sich die von uns angegebenen Lösungsprinzipien auf die QFT anwenden lassen, kann man sich damit behelfen, das Universum (genauer: das quantenfeldtheoretische Modelluniversum) im Rahmen einer QFT zu beschreiben, die eine sehr große, aber doch endliche Anzahl von Freiheitsgraden aufweist. Dies wollen wir im folgenden Kapitel diskutieren.

49. Quantenfeldtheorie mit endlich vielen Freiheitsgraden

Wir wollen hier einen Lösungsweg diskutieren, der unabhängig ist von der Klärung der Frage, ob sich die QFT auf der Basis eines separablen Hilbertraums und eines selbstadjungierten Hamiltonoperators in mathematisch präziser Weise darstellen lässt. Ausgangspunkt hierzu ist die folgende allgemeine Überlegung:

Wenn das Universum modellierbar ist durch ein (im Großen oder im Kleinen) unendliches Modell, so kann es immer auch modelliert werden durch ein (sehr großes bzw. sehr feines) endliches Modell, und zwar so, dass der Unterschied empirisch nicht feststellbar ist. Diese Aussage gilt ganz allgemein und hat nichts mit den besonderen Eigenheiten der QFT zu tun. Sie gilt für die klassische Physik (die Mechanik ebenso wie die Feldtheorie) genauso wie für die Quantentheorie.

Konkret lassen sich z.B. kontinuierliche Größen, deren Werte in der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen liegen, bei der Modellierung ersetzen durch Größen mit Werten in einem (sehr) großen und (sehr) feinen, aber endlichen Zahlengitter. In einem solchen Modell müssen dann die in der Physik häufig vorkommenden Differentialgleichungen durch analoge Differenzgleichungen ersetzt werden.

Der hauptsächliche Nachteil eines derartigen Vorgehens liegt darin, dass eine solche endliche und diskrete Theorie alles andere als "elegant" ist. In den resultierenden Modellen fehlen im allgemeinen gewisse Symmetrien, und bestimmte Rechenmethoden sind nicht anwendbar. Z.B. können analytische Verfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen nicht genutzt werden. Entsprechende Verfahren für die Behandlung von Differenzgleichungen stehen meist nicht zur Verfügung, so dass man in der Praxis auf numerische Berechnungen angewiesen ist. Derartige Berechnungen scheitern dann aber oft an dem zu hohen Rechenaufwand. Letztlich ist dies jedoch keine prinzipielle Frage einer adäquaten Modellierung der Realität, sondern "nur" ein praktisches Problem.

Unter der Voraussetzung, dass das Universum in einem unendlich ausgedehnten Modell zutreffend darstellbar ist, kann empirisch grundsätzlich nicht entschieden werden, ob ein ausreichend groß gewähltes endliches Modell oder das unendliche Modell der Realität "besser" entspricht. Wenn z.B. der Raum tatsächlich unendlich ausgedehnt wäre, so gäbe es grundsätzlich keine Möglichkeit, dies mit empirischen Mitteln festzustellen. Man müsste immer damit rechnen, dass der Raum eben nur so groß ist, dass wir seine Beschränktheit nicht erkennen können, weil unsere Sinnesorgane (sowie alle unsere Messapparate, wie z.B. Teleskope) nicht weit genug reichen.

Zwar können wir mit empirischen Mitteln feststellen, dass der Raum mindestens eine gewisse Ausdehnung haben muss, und durch eine Verbesserung unserer technischen Möglichkeiten kann die dadurch gegebene untere Grenze für

die Raumausdehnung weiter hinausgeschoben werden. Damit ändert sich aber nichts daran, dass der Raum letztlich doch endlich sein könnte.

Entsprechendes gilt für das unendlich Kleine. Unter der Voraussetzung, dass das Universum in einem kontinuierlichen Modell zutreffend darstellbar ist, kann empirisch grundsätzlich nicht entschieden werden, ob ein (ausreichend fein gewähltes) diskretes Modell oder das kontinuierliche Modell der Realität besser entspricht. Ist z.B. der Raum tatsächlich kontinuierlich aufgebaut, so besteht nicht die Möglichkeit, dies empirisch festzustellen. Wir müssten stets mit der Möglichkeit rechnen, dass wir es mit einem sehr feinen Gitter zu tun haben, das wir nur deshalb nicht als solches erkennen, weil unsere Augen (sowie sämtliche Messapparate) einfach zu grob dafür sind.

Die Natur, soweit wir sie erkennen können, unterscheidet nicht zwischen einem unendlich ausgedehnten Kontinuum und einem großen und feinen Gitter. Der Unterschied liegt nur in der von uns vorgenommenen Modellierung. Selbst wenn wir annehmen wollen, dass die "Welt an sich" entweder so oder so gestaltet ist, so haben wir doch keine Möglichkeit, dies anhand empirischer Beobachtungen zu erkennen.

Fassen wir zusammen: Aus unseren Überlegungen folgt ganz allgemein, dass das Konzept des Unendlichen in der Physik grundsätzlich entbehrlich ist, was die korrekte Modellierung der Realität angeht. Allerdings ist die Modellierung mit kontinuierlichen und unendlich ausgedehnten Strukturen (wie es z.B. die Menge der reellen Zahlen ist) eleganter und sie bietet praktische Vorteile. So hat man mehr Symmetrien und zusätzliche (analytische) Rechenverfahren zur Verfügung. Aus diesem Grunde bevorzugt man, sofern die Möglichkeit dazu besteht, die Modellierung der Realität mit Strukturen, die im Großen wie im Kleinen unendlich sind. Empirisch ist jedoch die Darstellung mit einem ausreichend großen und feinen, aber endlichen Modell gleichwertig.

Wenn wir diese allgemeinen Überlegungen auf die QFT anwenden, so bedeutet dies, dass wir die Modellierung des Universums auch vornehmen können mittels einer QFT, die eine sehr große, aber doch endliche Anzahl von Freiheitsgraden aufweist. Beispielsweise können wir den Raum durch ein sehr großes und feines, aber endliches Gitter ersetzen und die Existenz von Feldoperatoren nur auf den Punkten dieses Gitters annehmen.

In der QFT entspricht die Beschränkung auf ein Raumintervall einer Einschränkung der möglichen Orte und die Beschränkung auf ein Gitter einer Einschränkung der möglichen Impulse. Die Beschränkung auf ein endliches Gitter entspricht daher einer Einschränkung sowohl des Ortes als auch des Impulses.

Im übrigen ist eine Beschränkung von Ort und Impuls keineswegs unplausibel. Eine Beschränkung des Raumes kann allein schon deshalb akzeptiert werden, weil der reale Raum wegen der allgemeinen Relativitätstheorie als gekrümmt und im Sinne der gegenwärtigen kosmologischen Vorstellungen (Urknall) als endlich anzunehmen ist. Die spezielle Relativitätstheorie und demzu-

folge auch die QFT, welche als speziell relativistische Theorie auf einem unendlich ausgedehnten Minkowski-Raum beruht, stellt ohnehin nur eine Approximation an diesen gekrümmten Raum (in einem endlichen Bereich) dar. Es kommt daher auch nicht darauf an, ob der Raum im Modell der QFT als unendlich groß angenommen wird oder nicht.

Die Beschränkung der Impulse ist ebenfalls plausibel. Das zu beschreibende Universum besitzt sicherlich nur eine endliche Gesamtenergie. Infolgedessen ist auch die kinetische Energie beschränkt. Die Existenz bzw. die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beliebig hoher Impulse (und damit beliebig hoher kinetischer Energien) kann in einem solchen Universum praktisch keine Rolle spielen.

Man kann also die "kontinuierliche" QFT approximieren durch eine endliche QFT, d.h. durch eine QFT mit endlich vielen Freiheitsgraden, insbesondere durch eine QFT auf einem endlichen Gitter. Anders als bei den üblichen quantenfeldtheoretischen Gitterrechnungen, bei denen man ein möglichst kleines Gitter zugrunde legen muss, damit praktische Rechnungen überhaupt möglich werden, nehmen wir hier ein extrem feines und großes Gitter an, um der Kontinuumstheorie so nahe zu kommen, dass empirisch kein Unterschied feststellbar ist. Man denke z.B. (in passenden Maßeinheiten) an eine Gitterkonstante von 10^{-1000} und an eine Ausdehnung des Gitters von 10^{1000} .

Die Erfolge praktischer Berechnungen anhand von Gittermodellen zeigen, dass durch die Beschränkung auf ein endliches Gitter keine wesentlichen Eigenheiten der QFT verloren gehen. Dies gilt mindestens solange, wie man es mit einem Universum mit beschränkter Gesamtenergie zu tun hat und man sich auf die Betrachtung von solchen Ereignissen im Universum beschränkt, die einerseits lokal sind (d.h. sie beziehen sich nur auf einen räumlich und zeitlich beschränkten Ausschnitt des Universums) und andererseits "grob" sind (d.h. sie beziehen sich nicht auf allzu feine räumliche oder zeitliche Unterschiede, etwa auf den Unterschied zwischen den Feldstärken an den Orten \mathbf{x}_0 und $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$, wobei $\Delta\mathbf{x}$ sehr klein ist).

Bemerkung: Im Rahmen praktischer Gitterrechnungen wird häufig der Minkowski-Raum insgesamt durch ein Gitter ersetzt, d.h. es wird nicht nur der Raum, sondern auch die Zeit diskretisiert. Alternativ kann man auch (passend zur Hamilton-Formulierung der QFT) die Diskretisierung nur in Bezug auf den Raum durchführen. In diesem Fall wird für die Zeitachse keine Diskretisierung vorgenommen; die Zeit bleibt ein kontinuierlicher Parameter.

Der Vorteil einer QFT auf einem endlichen Gitter (und allgemein einer QFT mit endlich vielen Freiheitsgraden) liegt darin, dass der resultierende Hilbertraum auch im Fall nicht-abelscher Eichtheorien separabel ist und dass das Problem der Ultraviolett- bzw. Infrarot-Divergenzen gar nicht erst auftritt. Eine Renormierung ist demnach nicht erforderlich; dieses Problem entfällt vollständig.

Auf eine solche Gittertheorie (oder allgemeiner: auf jede endliche QFT) kann man, da ihr ein separabler Hilbertraum \mathcal{H} und ein selbstadjungierter Hamiltonoperator H zugrunde liegt, die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungswege eins zu eins übertragen. Damit erhält man eine ontologisch realistische Fassung der QFT, die auf der klassischen Logik beruht.

Wie bei jeder anderen diskreten Modellierung hat man jedoch den Nachteil, dass in einer Gitter-QFT gewisse Symmetrien fehlen, z.B. die speziell-relativistische Kovarianz. Eine derartige Symmetrie kann in einer Gittertheorie nicht als präzise Gesetzmäßigkeit gelten. Sie gilt stattdessen nur näherungsweise, und zwar umso genauer, je feiner und größer man das Gitter macht.

Außerdem hat man wie bei jeder diskreten, endlichen Theorie den Nachteil, dass die Theorie wenig elegant ist und dass bestimmte analytische Rechenmethoden nicht zur Verfügung stehen. Die Anwendung auf konkrete Situationen kann damit sehr kompliziert und teilweise wegen des zu hohen Aufwandes ganz undurchführbar werden.

Im Fall der QFT kommt es darüber hinaus zu bestimmten Gitteranomalien, insbesondere zu den sogenannten "Fermionen-Verdopplungen". Gemeint sind damit nicht Verdopplungen von Fermionen, sondern scheinbare Verdopplungen der Fermionen-*Arten*. Letztere treten in der Gitter-QFT dann auf, wenn man das Bewegungsgesetz in einfacher Analogie zur Kontinuumstheorie formuliert. Sie können allerdings vermieden werden durch eine entsprechende Abänderung dieses Gesetzes, z.B. durch Einführung eines Wilson-Terms.

Für den speziellen (aber relevanten) Fall der Eichtheorien tritt ein weiteres Problem hinzu. Die Eichsymmetrie ist ursprünglich lokal formuliert, d.h. für jeden Punkt des Raumes bzw. der Raumzeit. In der Gittertheorie kann sie nur noch für die Gitterpunkte angenommen werden, und es stellt sich die Frage, ob dies ausreicht. Aufgrund der praktischen Erfolge der Gitterrechnungen ist aber zu vermuten, dass dies letztlich kein Problem darstellt.

Fassen wir zusammen: Grundsätzlich kann die Modellierung der Realität in der Physik stets auch ohne Verwendung des Unendlichen (im Großen und im Kleinen) erfolgen. In diesem Sinne kann die QFT auch mit einer (sehr) hohen, aber endlichen Anzahl von Freiheitsgraden formuliert werden, speziell als Theorie auf einem sehr großen und feinen Gitter. Eine solche Gitter-QFT hat dieselben Nachteile wie jede andere diskrete, endliche Theorie: Sie ist wenig elegant, einige ihrer Symmetrien gelten nicht exakt, sondern nur näherungsweise (hier z.B. die Lorentz-Kovarianz), und bestimmte analytische Rechenverfahren sind nicht anwendbar. Andererseits erhält man aber auf diesem Wege eine Modellierung mit einem separablen Hilbertraum und einem darauf definierten Hamiltonoperator. Damit können die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungswege eins zu eins auf die QFT übertragen werden, und man gelangt zu einer Darstellung der QFT als einer ontologisch realistischen Theorie, die auf der klassischen Logik beruht.

Wir wollen hier noch auf die Frage eingehen, wie eine auf dem Kontinuum definierte QFT in mathematisch präziser Weise formuliert werden könnte, wenn sich herausstellt, dass eine solche präzise Formulierung nicht möglich ist auf der Basis eines separablen Hilbertraums und eines darauf definierten Hamiltonoperators.

Nach unseren Überlegungen kann die QFT auf einem sehr großen und feinen, aber endlichen Gitter formuliert werden. Ein solches Gitter ist charakterisiert einerseits durch die Gitterkonstante a , die den Abstand zwischen den Gitterpunkten angibt, und andererseits durch die Gitterlänge L . Durch die Forderung, dass das Universum ausreichend genau modelliert werden soll, sind die Parameter a und L aber keineswegs eindeutig bestimmt. Vielmehr gibt es Grenzen a_0 und L_0 , so dass für alle $a \leq a_0$ und $L \geq L_0$ gilt: Das durch a und L beschriebene Gitter reicht aus, um das Universum mit hinreichender Genauigkeit zu modellieren.

Man hat zur Beschreibung des Universums also nicht eine bestimmte endliche QFT, sondern eine ganze Klasse derartiger Theorien zur Verfügung. Es ist daher naheliegend, die Modellierung des Universums nicht durch eine einzelne endliche QFT zu realisieren, sondern durch eine Folge von endlichen QFTs, die eine zunehmende Anzahl von Freiheitsgraden aufweisen, beispielsweise durch eine Folge von Gittertheorien mit den Parametern a_n und L_n , wobei die Folgen a_n und L_n monoton gegen 0 bzw. ∞ konvergieren.

Man hat in diesem Fall eine Folge \mathcal{H}_n von separablen Hilberträumen mit darauf definierten Hamiltonoperatoren H_n , und jede Eigenschaft A des Universums wird durch eine Folge von Unterräumen $A_n \subset \mathcal{H}_n$ dargestellt. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen, in welcher Beziehung derartige Unterräume A_n zueinander stehen müssen, damit sie zur Darstellung einer Eigenschaft des Universums geeignet sind.

Eine QFT mit unendlich vielen Freiheitsgraden wäre in diesem Sinne per definitionem nichts anderes als eine "konvergente" Folge aus endlichen QFTs, d.h. aus QFTs mit je endlich vielen Freiheitsgraden. (Genau genommen wäre sie eine Äquivalenzklasse von solchen Folgen.) Voraussetzung hierfür ist, dass man einen passenden Konvergenzbegriff für Folgen endlicher QFTs einführt. Auf diese Weise kann man zu einer mathematisch präzisen Formulierung der QFT auf dem Kontinuum gelangen.

Man hat hier eine gewisse Analogie zu dem Verhältnis, das beispielsweise zwischen den reellen und den rationalen Zahlen besteht. Jede reelle Zahl ist bekanntlich Limes einer konvergenten Folge rationaler Zahlen. Auf der Basis dieser Tatsache lässt sich die Menge der reellen Zahlen definieren, indem man festlegt, dass eine reelle Zahl nichts anderes ist als eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen aus rationalen Zahlen.

Eine entsprechende Analogie besteht zu einer der möglichen Definitionen Dirac'scher δ -Funktionen. Eine solche kann aufgefasst werden als Äquivalenz-

klasse von (in bestimmtem Sinne konvergenten) Folgen von "echten" Funktionen. Typisch für diese Konstruktion ist, dass die so definierten δ -Funktionen zwar keine echten Funktionen sind, dass sie aber einige Eigenschaften von den echten Funktionen übernehmen. Beispielsweise lassen sie sich zur Bildung gewisser Integrale verwenden. Der Begriff der Funktion wird so in sinnvoller Weise verallgemeinert.

Bezogen auf die QFT benötigen wir nur, dass sich die Kontinuumstheorie anwenden lässt auf ein Universum mit beschränkter Gesamtenergie (was sich durch passende Wahl der Initialbedingung ausdrücken lässt) und auf die Betrachtung von lokalen, groben Eigenschaften im oben diskutierten Sinne. Da alle von uns empirisch beobachtbaren Eigenschaften lokal und grob sind, hat die Theorie dann den erforderlichen empirischen Gehalt.

Entscheidend ist dabei nicht, ob sich im Limes ein Hilbertraum oder ein Skalarprodukt ergibt. Es kommt auch nicht darauf an, dass die auf den Hilberträumen \mathcal{H}_n gegebenen Hamiltonoperatoren H_n selbst in irgendeinem Sinne konvergieren. Im wesentlichen genügt es, wenn sich die bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot)$ für mögliche Fakten in passender Weise über eine Limesbildung definieren lassen. (Hierfür sollte dann die exakte Gültigkeit der Lorentz-Kovarianz gezeigt werden können.)

Wir wollen diesen Gedankengang hier nicht im einzelnen weiter verfolgen. Zweck dieser Überlegung war es nur anzudeuten, wie sich auf der Basis von endlichen QFTs eine mathematisch präzise Formulierung der QFT auf dem Kontinuum gewinnen ließe, wenn sich endgültig herausstellen sollte, dass sich die Darstellung einer solchen Theorie mit einem separablen Hilbertraum und einem selbstadjungierten Hamiltonoperator nicht realisieren lässt.

Anmerkung

Eine QFT, die "auf einem Gitter" definiert ist, muss nicht notwendigerweise so interpretiert werden, dass dabei der Raum selbst die Form eines Gitters hat. Wenn man von den operatorwertigen Distributionen $\Phi(\mathbf{x})$ (Feldoperatoren) und $\Pi(\mathbf{x})$ (kanonische Impulse) ausgeht und einen endlichen Raumbereich (entsprechend einem Gitter G mit den Gitterpunkten $g \in G$) aufteilt in kleine Würfel $I(g)$, so kann man für jeden dieser Würfel definieren:

$$\Phi(g) := \int_{I(g)} \Phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

und

$$\Pi(g) := \int_{I(g)} \Pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Damit erhält man eine endliche Menge von Operatoren und auf dieser Basis eine endliche QFT. Dies bedeutet, dass man sich auf die Betrachtung der Freiheitsgrade beschränkt, die durch die $\Phi(g)$ und $\Pi(g)$ beschrieben werden. Es bedeutet aber nicht, dass der Raum selbst diskret aufgebaut sein muss.

50. Zusammenfassung zur Quantenfeldtheorie

Viele Eigenschaften des realen Universums, z.B. das Auftreten elektromagnetischer Felder und insbesondere auch die Existenz des Lichts, lassen sich im Rahmen der Quantenmechanik nicht beschreiben. Daher ist es wichtig, dass wir die Quantenfeldtheorie (QFT) in unsere Überlegungen zur Deutung der Quantentheorie einbeziehen. Gegenstand unserer Diskussion ist dabei das quantenfeldtheoretische Modelluniversum, welches im Einklang mit der speziellen Relativitätstheorie steht, jedoch keine allgemein-relativistischen Effekte (wie z.B. die Gravitation) darstellen kann.

Da es sich bei der Quantenmechanik um einen Randfall der QFT handelt (den Fall, in dem die "Teilchenzahl" auf einen bestimmten Wert festgelegt ist), treten in der QFT grundsätzlich dieselben Deutungsprobleme auf wie in der Quantenmechanik. Man trifft auch hier auf das Kochen-Specker'sche No-Go-Theorem sowie auf die Bell'sche Ungleichung, und es stellt sich die Frage, ob die QFT mit dem ontologischen Realismus und mit der klassischen Logik verträglich ist.

Zu klären ist daher, ob sich die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungsprinzipien auch auf die QFT anwenden lassen. Um diese Lösungswege eins zu eins auf die QFT übertragen zu können, benötigen wir im wesentlichen zwei Voraussetzungen: Zum einen müssen die Eigenschaften des Universums darstellbar sein als (abgeschlossene) lineare Unterräume eines separablen Hilbertraumes \mathcal{H} , und zum andern muss es auf \mathcal{H} einen (selbstadjungierten) Hamiltonoperator H geben, der das Bewegungsgesetz beschreibt.

Für relevante Quantenfeldtheorien, insbesondere auch für die nicht-abelschen Eichtheorien (zu denen auch das Standardmodell zählt), fehlt bislang überhaupt ein präzises mathematisches Fundament. In der Literatur zur QFT wird zwar formal so gerechnet, als habe man es mit Operatoren auf Hilberträumen zu tun; jedoch ist die Frage, ob eine mathematisch präzise Darstellung auf einem separablen Hilbertraum möglich ist und der Hamiltonoperator darauf widerspruchsfrei definiert werden kann, bislang nicht geklärt.

Der hauptsächliche Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass man es in der QFT mit (abzählbar) unendlich vielen Freiheitsgraden zu tun hat, während z.B. die Anzahl der Freiheitsgrade in der Quantenmechanik von N spinfreien Teilchen $3 \cdot N$ beträgt und somit endlich ist.

Aus den genannten Gründen ist es zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht entscheidbar, ob und wie sich die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungswege auf die QFT übertragen lassen. Als Ausweg aus dieser Situation bietet sich die folgende Überlegung an:

Es ist eine allgemeine Tatsache, dass das Unendliche (sowohl das unendlich Große als auch das unendlich Kleine) in der Physik grundsätzlich entbehrlich ist. Wenn die Beschreibung des Universums möglich ist durch ein unendlich

ausgedehntes und kontinuierliches Modell, so kann die Darstellung stattdessen auch mit einem sehr großen und sehr feinen, aber endlichen Modell erfolgen, ohne dass empirisch ein Unterschied erkennbar wäre.

Man bevorzugt normalerweise eine unendliche und kontinuierliche Modellierung, da sie eleganter ist, die erhaltene Theorie mehr Symmetrien aufweist und man damit über analytische Rechenmethoden verfügt, die sonst nicht zur Verfügung stünden. Dies besagt aber nicht, dass die "Welt an sich" unendlich ausgedehnt oder kontinuierlich ist; eine solche Aussage lässt sich mit empirischen Mitteln auf gar keine Weise verifizieren.

Wendet man diese Überlegung auf die QFT an, so ergibt sich, dass das Universum auch beschrieben werden kann mittels einer endlichen QFT (d.h. einer QFT mit endlich vielen Freiheitsgraden), speziell mit einer QFT, deren Operatoren auf einem sehr großen und feinen, aber endlichen Gitter definiert sind.

Die darin liegende Beschränkung auf einen Raum mit endlicher Ausdehnung ist nicht unplausibel, da der Raum nach unseren gegenwärtigen kosmologischen Vorstellungen ohnehin als beschränkt anzusehen ist.

Die Beschränkung auf ein Gitter entspricht in der QFT einer Beschränkung der Impulse. Auch dies ist – in einem Universum mit beschränkter Gesamtenergie – nicht unplausibel. Im übrigen muss dies nicht so verstanden werden, dass der Raum selbst die Form eines Gitters hat. Stattdessen kann man sich vorstellen, dass die auf den Gitterpunkten definierten Feldoperatoren $\Phi(g)$ jeweils eine Mittelung der Feldoperatoren $\Phi(\mathbf{x})$ über ein kleines Raumsegment $I(g)$ darstellen, das den Punkt g umgibt.

Wie bei jeder endlichen, diskreten Modellierung liegen die Nachteile einer Gitter-QFT darin, dass die Theorie wenig elegant ist, einige ihrer Symmetrien allenfalls näherungsweise gelten und bestimmte analytische Rechenverfahren nicht zur Verfügung stehen.

Allerdings erhält man auf diesem Wege auch im Fall nicht-abelscher Eichtheorien eine Modellierung mit einem separablen Hilbertraum und einem darauf definierten Hamiltonoperator. Damit können die für die Quantenmechanik entwickelten Lösungswege eins zu eins auf die QFT übertragen werden.

So gelangt man zu einer Darstellung der QFT als einer ontologisch realistischen Theorie, die auf der klassischen Logik beruht. Darüber hinaus hat diese Theorie den empirischen Gehalt, den wir von der QFT erwarten.

Um die Nachteile zu beseitigen, die mit der Modellierung auf einem Gitter verbunden sind, kann man den folgenden Weg beschreiten:

Zunächst stellt man fest, dass die das Gitter beschreibenden Parameter (die Gitterkonstante a und die Gitterlänge L) nicht eindeutig bestimmt sind durch die Forderung, dass die Modellierung des Universums mit ausreichender Genauigkeit erfolgen soll. Vielmehr ergeben sich für diese Parameter nur je eine obere bzw. untere Grenze a_0 bzw. L_0 .

Naheliegender ist es daher, die Modellierung nicht durch eine einzelne Gitter-QFT, sondern durch eine ganze Folge derartiger QFTs vorzunehmen, wobei die Gitterparameter (monoton) gegen 0 bzw. ∞ konvergieren.

Eine QFT auf dem Kontinuum wäre dann per definitionem nichts anderes als eine "konvergente" Folge aus Gitter-QFTs. (Genau genommen wäre sie eine Äquivalenzklasse von solchen Folgen.) Voraussetzung hierfür ist, dass man einen passenden Konvergenzbegriff für Folgen von Gitter-QFTs einführt.

Bemerkung: Dieses Vorgehen steht in Analogie zu der bekannten Definition reeller Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus rationalen Zahlen.

Entscheidend ist dabei nicht, ob sich im Limes ein Hilbertraum und hierauf ein Hamiltonoperator ergibt. Im wesentlichen genügt es, wenn sich die bedingten Möglichkeitsmaße $\mu(\cdot)$ für mögliche Fakten in passender Weise über eine Limesbildung definieren lassen.

So ließe sich auf der Basis von endlichen QFTs eine mathematisch präzise Formulierung der QFT auf dem Kontinuum gewinnen, die das Universum in ontologisch realistischer Weise beschreibt.

51. Die Kovarianz der Quantenfeldtheorie

Das in Kapitel 2 diskutierte allgemeine Modell physikalischer Theorien beruht auf dem Konzept der absoluten Zeit. Es ist für die klassische Mechanik ebenso geeignet wie für eine nicht relativistische Quantentheorie. In diesem Modell wird die Menge der Ereignisse festgelegt als

$$\mathcal{E} := \mathcal{U} \times T$$

wobei \mathcal{U} die Menge der Eigenschaften des Universums darstellt.

In dem genannten Modell ist es im allgemeinen nicht möglich, eine relativistische, d.h. eine Lorentz-kovariante Theorie wie die QFT in sinnvoller Weise darzustellen. Um dies zu sehen, betrachten wir den Lorentz-Boost Λ_v , welcher den Übergang zu dem Koordinatensystem K' beschreibt, das sich gegenüber dem ursprünglichen System K mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt. Außerdem betrachten wir ein Ereignis, das in den beiden Koordinatensystemen als (A, t) bzw. als (A', t') dargestellt werden soll.

Die Zeitkoordinate müsste sich in diesem Fall transformieren gemäß

$$t' = \gamma (t - vx/c^2)$$

wobei

$$\gamma := 1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

den Lorentz-Faktor bezeichnet. Die Koordinate x , welche hierbei benötigt wird, ist durch A jedoch gar nicht festgelegt; A beschreibt eine Eigenschaft des Universums, und derartige Eigenschaften sind im allgemeinen nicht auf einen Punkt im Raum konzentriert.

Wenn wir die QFT im Kontext eines allgemeinen Modells physikalischer Theorien betrachten wollen, müssen wir das oben angegebene Modell erweitern. Dazu stellen wir zunächst fest, dass der Begriff der "Eigenschaft des Universums" auf der Tatsache beruht, dass sich Ereignisse zeitlich verschieben lassen. Findet ein Ereignis E statt, so gibt es zu jedem Zeitintervall Δt stets ein mögliches Ereignis $E_{\Delta t}$, welches sich von E nur dadurch unterscheidet, dass es zu einem anderen Zeitpunkt stattfindet. Eine mögliche Eigenschaft des Universums entspricht dann einer Klasse von Ereignissen, die durch zeitliche Verschiebungen auseinander hervorgehen. Auf dieser Grundlage können wir sagen: Jedes Ereignis E besteht darin, dass eine Eigenschaft A zu einem Zeitpunkt t gegeben ist.

Nun lassen sich Ereignisse aber auch im Raum $R = \mathbb{R}^3$ verschieben. Zu einem Ereignis E und einer räumlichen Verschiebung $\Delta \mathbf{x} \in R$ gibt es ein verschobenes Ereignis $E_{\Delta \mathbf{x}}$. Entsprechendes gilt für Eigenschaften: Ist A eine Eigenschaft, so gibt es die um $\Delta \mathbf{x}$ verschobene Eigenschaft $A_{\Delta \mathbf{x}}$. Wir können damit Klassen von

Eigenschaften bilden, die wir als "lokalisierte Eigenschaften" oder als "Ereignistypen" bezeichnen können. Eine Eigenschaft des Universums besteht dann darin, dass ein Ereignistyp an einem bestimmten Ort vorliegt.

Zusammengefasst bedeutet dies: Ein Ereignis besteht darin, dass ein Ereignistyp an einem Ort und zu einem Zeitpunkt gegeben ist. Als Beispiel betrachte man das Ereignis, dass an einer bestimmten Stelle im Raum ein Tisch steht. Hier bezeichnet "Tisch" den Ereignistyp. Dass dieser Tisch an einem bestimmten Ort x steht, stellt eine mögliche Eigenschaft des Universums dar. Wenn der Tisch an diesem Ort zum Zeitpunkt t steht, so handelt es sich um ein Ereignis.

Bemerkung: Die Tatsache, dass der Tisch an einem bestimmten Ort steht, bedeutet nicht, dass es sich um ein auf einen Punkt im Raum beschränktes Ereignis handelt. Ereignistypen sind in diesem Sinne also nicht lokal. Streng genommen sind Ereignisse, die sich zu einer bestimmten Zeit abspielen, auch nicht auf einen bestimmten Punkt der Zeitachse beschränkt.

Formal müssen wir demnach unterscheiden:

\mathcal{T} = Menge der Ereignistypen

\mathcal{P} = Menge der Eigenschaften

\mathcal{E} = Menge der Ereignisse

Mit dem Raum $R = \mathbb{R}^3$, der Zeitachse T sowie dem Minkowski-Raum

$$M := R \times T$$

gilt dann:

$$\mathcal{P} = \mathcal{T} \times R$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \times T$$

$$= \mathcal{T} \times R \times T$$

$$= \mathcal{T} \times M$$

Für die nicht relativistische Quantenmechanik gilt damit

$$\mathcal{P} = \mathcal{U}$$

$$= \{ A \mid A < \mathcal{H} \}$$

sowie

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \times T$$

$$= \mathcal{U} \times T$$

In der QFT hingegen ist

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}$$

und

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \times R \times T$$

Ein Ereignis hat in der QFT demnach die Form

$$E = (A, \mathbf{x}, t)$$

mit $A \in \mathcal{H}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{T}$. Durch den Lorentz-Boost Λ_v wird E transformiert zu $E' = (A', \mathbf{x}', t')$ mit:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma (t - v x / c^2) \\ x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ A' &= U(\Lambda_v) A \end{aligned}$$

Dabei seien $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sowie $\mathbf{x}' = (x', y', z')$, und $U(\Lambda_v)$ bezeichne den zu Λ_v gehörenden unitären Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Hiermit ist das Modell im Sinne der Kovarianz formuliert.

Bemerkung: Allgemein bezeichnet U die "Darstellung" der Poincaré-Gruppe in der Gruppe der unitären Operatoren auf dem Hilbertraum. Diese Darstellung wird so gebildet, dass für alle t die Gleichung

$$U(\Lambda_t) = U_t$$

gilt. Dabei ist Λ_t jene Poincaré-Transformation, welche eine Verschiebung um den Wert t auf der Zeitachse bewirkt, und U_t ist in der üblichen Weise definiert als

$$U_t := e^{-itH/\hbar}$$

Implizit hängt die Definition von U damit bereits vom Bewegungsgesetz ab. Auch die Definition von A' zu gegebenem A ist somit indirekt abhängig vom Bewegungsgesetz.

Der ontologische Realismus der Theorie besteht nun in der Annahme, dass der wahre Weltablauf ω_0 eine Teilmenge von \mathcal{E} ist:

$$\begin{aligned} \omega_0 &\subset \mathcal{E} \\ &= \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \end{aligned}$$

In dem angegebenen Modell kann man die Axiome MON und SEC für die QFT ebenso definieren wie im Fall der nicht relativistischen Quantenmechanik. Das Bewegungsgesetz muss jedoch ersetzt werden durch zwei Gesetze, die sich (in entsprechender Notation) folgendermaßen formulieren lassen:

Das Translationsgesetz

$$TG := \{ \langle A, \mathbf{0}, t \rangle_0 \leftrightarrow \langle V_{\mathbf{x}} A, \mathbf{x}, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{H} \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge t \in \mathbb{T} \}$$

Hierzu sei $\Lambda_{\mathbf{x}}$ jene Poincaré-Transformation, welche eine Verschiebung um den

Vektor \mathbf{x} im Raum bewirkt, und $V_{\mathbf{x}} := U(\Lambda_{\mathbf{x}})$ sei der zugehörige unitäre Operator auf dem Hilbertraum.

Das Bewegungsgesetz (die Schrödingergleichung)

$$\text{SG} := \{ \langle A, \mathbf{x}, 0 \rangle_0 \leftrightarrow \langle U_t A, \mathbf{x}, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{H} \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge t \in \mathbb{T} \}$$

Der Operator U_t stimmt hier mit $U(\Lambda_t)$ überein. Damit nimmt das Bewegungsgesetz die gleiche Form an wie das Translationsgesetz.

Die beiden Gesetze können zusammengefasst werden zu dem Feldgesetz

$$\text{FG} := \{ \langle A, \mathbf{o}, 0 \rangle_0 \leftrightarrow \langle U_t V_{\mathbf{x}} A, \mathbf{x}, t \rangle_0 \mid A \in \mathcal{H} \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \wedge t \in \mathbb{T} \}$$

Dabei sind die beiden Operatoren U_t und $V_{\mathbf{x}}$ miteinander vertauschbar. Mit den angegebenen Gesetzen erweist sich die Theorie als kovariant gegenüber der Gruppe aller Poincaré-Transformationen. Für jedes Element Λ der Poincaré-Gruppe erfolgt dabei die Transformation eines Ereignisses (A, \mathbf{x}, t) zu (A', \mathbf{x}', t') mittels:

$$(\mathbf{x}', t') = \Lambda(\mathbf{x}, t)$$

sowie

$$A' = U(\Lambda) A$$

Hierbei ist $U(\Lambda)$ der zu Λ gehörende unitäre Operator auf \mathcal{H} .

Bemerkung: Wie wir angemerkt haben, beschreibt ein Ereignistyp im allgemeinen kein auf einen Punkt im Raum konzentriertes Ereignis. Wenn wir in der QFT jeden Unterraum A des Hilbertraums als Ereignistyp zulassen, so kann sich A grundsätzlich auch auf den gesamten Raum beziehen.

Bemerkung: Die Zeit ist in einer relativistischen Theorie nicht absolut, und zwar auch insofern nicht, als sie bei einer Transformation Λ_v um den Lorentz-Faktor γ gestreckt wird. Diese Tatsache allein würde es aber noch nicht notwendig machen, das Modell in dem hier beschriebenen Sinne zu erweitern. Nur weil der transformierte Parameter t' darüber hinaus von den räumlichen Koordinaten abhängig ist, ist diese Erweiterung erforderlich.

Bemerkung: Wenn wir die QFT in einem festen Koordinatensystem betrachten, d.h. mit "verabsolutierter Zeit" und mit einem bestimmten räumlichen Nullpunkt \mathbf{o} , so können wir zu der Modellierung mit $\mathcal{E} = \mathcal{U} \times \mathbb{T}$ übergehen. Hierzu gehen wir von der Gültigkeit des Translationsgesetzes aus. Wegen

$$\langle A, \mathbf{o}, t \rangle = \langle V_{\mathbf{x}} A, \mathbf{x}, t \rangle$$

kann man jedes Ereignis (B, \mathbf{x}, t) mit $(V_{-\mathbf{x}} B, \mathbf{o}, t)$ identifizieren und sich somit auf die Betrachtung von Ereignissen der Form

$$(A, t) := (A, \mathbf{o}, t)$$

beschränken. Damit wird jedes Ereignis dargestellt als Vorhandensein einer Eigenschaft A zu einem Zeitpunkt t . Im Falle einer Beschränkung auf ein bestimmtes Koordinatensystem können daher alle Überlegungen, die für die Quantenmechanik gelten, auf die QFT übertragen werden. Insbesondere gibt es – und zwar nur im Falle eines festen Koordinatensystems – zu jedem Zeitpunkt einen deterministischen Zustand, der das Universum beschreibt.

Bemerkung: Der Raum wird in einer relativistischen Theorie ebenso behandelt wie die Zeit in einer nicht relativistischen Theorie. In diesem Sinne wird die Zeit T bei der Parametrisierung der Ereignisse durch die Raumzeit $M = R \times T$ ersetzt.

Bemerkung: In der QFT ist die Raumzeit weder ein Bereich, in dem sich klassische Massepunkte befinden können, noch Träger realer klassischer Felder, die punktweise auf ihr definiert sind. Ihre Rolle ist vielmehr die eines Parameterbereichs, mit dem die Verschiebbarkeit gleichartiger Ereignisse im Raum und in der Zeit dargestellt wird.

Im folgenden wollen wir noch auf die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Konzept der relativistischen Kovarianz einerseits und der Nichtlokalität der realen Ereignisse in der Quantentheorie eingehen.

Die klassische Feldtheorie stellt eine lokal-realistische Theorie dar. In dieser Theorie sind die Feldstärken als reale physikalische Größen zu interpretieren, und jedes mögliche Ereignis ist nur von diesen Feldstärken abhängig. Kovarianz des Bewegungsgesetzes BG bedeutet in diesem Fall, dass dieses Gesetz unabhängig davon gilt, wie das Feld transformiert wird. Formal kann man dies z.B. für den Fall eines Skalarfeldes folgendermaßen ausdrücken:

Es sei Φ ein auf dem Minkowski-Raum M definiertes skalares Feld und Λ eine Koordinatentransformation auf M . Ferner sei Φ' das durch

$$\Phi'(\mathbf{x}',t') = \Phi(\mathbf{x},t)$$

definierte Feld, wobei (\mathbf{x}',t') für $\Lambda(\mathbf{x},t)$, also für die transformierten Koordinaten steht. Es muss dann gelten:

$$(*) \quad BG(\Phi') \Leftrightarrow BG(\Phi)$$

In der QFT ist die Realität jedoch nicht lokal. Zwar mag eine Beziehung $(*)$ für bestimmte Feldoperatoren $\Phi(\mathbf{x},t)$ gelten, aber diese sind nicht als die realen physikalischen Größen zu interpretieren. Das gilt allein schon deshalb, weil Φ eine operatorwertige Distribution ist und damit $\Phi(\mathbf{x},t)$ zu gegebenem \mathbf{x} und t selbst kein Operator ist. Echte Operatoren lassen sich hingegen bilden als

$$L(t) := \int g(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

mit einer "Testfunktion" g auf dem Raum R . Mit $L(t) \in \Delta L$ wird dann ein Ereignis zum Zeitpunkt t beschrieben. Ein derartiges Ereignis ist nicht lokal im Sinne einer Beschränkung auf einen Punkt im Raum.

Das Bewegungsgesetz wird in der QFT durch die unitären Operatoren U_t beschrieben. Kovarianz – bezogen auf die realen Ereignisse – bedeutet hier, dass es eine geeignete Darstellung U der Poincaré-Gruppe in der Gruppe der unitären Operatoren auf dem Hilbertraum gibt,

- die für alle t die Gleichung $U(\Lambda_t) = U_t$ erfüllt und insofern dem Bewegungsgesetz entspricht,
- und die es erlaubt, die Ereignistypen $A \in \mathcal{U}$ so zu transformieren, dass die Formulierung der Gesetze der Theorie invariant ist gegenüber Koordinatentransformationen.

Um Kovarianz im ursprünglichen Sinne, d.h. als Kovarianz des Bewegungsgesetzes gegenüber Koordinatentransformationen, wie man sie in Theorien mit lokaler Realität hat, handelt es sich hier nicht, da die Transformation der realen (und deshalb nicht-lokalen) Ereignisse keine bloße Transformation der raumzeitlichen Koordinaten darstellt. Insbesondere wird ein Ereignistyp $A \in \mathcal{U}$ durch einen Lorentz-Boost Λ_v zu $A' = U(\Lambda_v)A$ transformiert. Es findet also eine Transformation der Ereignisse statt, die – wie schon die Definition von U – bereits vom Bewegungsgesetz abhängig ist.

Im Falle einer nicht-lokalen Realität, d.h. im Falle nicht-lokaler Ereignisse, ist dies unvermeidlich. Hierzu betrachte man folgendes Beispiel: Es befinde sich – aus der Perspektive eines bestimmten Koordinatensystems – am Ort \mathbf{x} zur Zeit t ein Tisch. Zwischen dem rechten und dem linken Ende des Tisches besteht hier Gleichzeitigkeit; dies ist das Konzept eines ausgedehnten Körpers. Aus der Perspektive eines bewegten Koordinatensystems kann dasselbe Phänomen nicht mehr beschrieben werden als eines, das genau zu einem Zeitpunkt stattfindet. Derselbe Tisch stellt nun ein Phänomen dar, welches zugleich unterschiedliche Zeitpunkte betrifft. Eine Zuordnung zu einem zeitbestimmten, d.h. auf einen einzelnen Zeitpunkt bezogenen Phänomen kann nur erfolgen, indem ein (lokales) Bewegungsgesetz vorausgesetzt wird. Nur so kann ein räumlich ausgedehntes Ereignis (A, \mathbf{x}, t) "zur Zeit t " in ein Ereignis (A', \mathbf{x}', t') zur Zeit t' transformiert werden.

Aus diesem Grunde ist es unvermeidlich, dass das Bewegungsgesetz Eingang in die Definition des zu einem Ereignistyp A gehörenden transformierten Ereignistyps A' findet. Die bloße Transformation des Minkowski-Raumes (d.h. die punktweise Transformation der Paare (\mathbf{x}, t)) reicht nicht aus um festzulegen, wie ein $A \in \mathcal{U}$ auf ein $A' \in \mathcal{U}$ zu transformieren wäre. Der transformierte Ereignistyp A' wird daher mittels eines Operators $U(\Lambda_v)$ festgelegt, der bereits in Abhängigkeit vom Bewegungsgesetz definiert ist.

Fassen wir zusammen: In einer Theorie mit lokaler Realität kann die Koordinatentransformation der realen Größen allein aufgrund der Transformation der Raumzeit-Punkte (\mathbf{x}, t) festgelegt werden. Das Bewegungsgesetz ist dann

kovariant, wenn das auf diese Größen bezogene Gesetz unabhängig ist von den möglichen Transformationen der Koordinaten. In einer Theorie mit nicht-lokaler Realität (und dazu gehört die QFT) kann es eine solche Kovarianz nicht geben, da die realen (nicht-lokalen) Ereignisse nicht ohne implizite Verwendung des Bewegungsgesetzes transformiert werden können.

Kovarianz ist dann zwar eine mögliche formale Eigenschaft theoretischer Größen, die – wie z.B. ein Wirkungsintegral – auf der Basis lokaler Größen definiert sind, aber dies ist keine Kovarianz des Bewegungsgesetzes, welches sich auf die realen Ereignisse bezieht (und beziehen muss). Man kann sagen, dass in diesem Fall die Theorie kovariant ist, nicht aber das Bewegungsgesetz. Konkret äußert sich die Kovarianz der Theorie darin, dass es eine Darstellung der Poincaré-Gruppe gibt, welche einerseits mit dem Bewegungsgesetz übereinstimmt und die andererseits die Transformation der realen Ereignisse erlaubt, so dass das auf diese Ereignisse bezogene Gesetz invariant ist gegenüber Koordinatentransformationen.

Anmerkung 1

Wir haben festgestellt, dass Ereignisse in der QFT grundsätzlich nicht als lokal anzusehen sind. Darunter ist zu verstehen, dass sie sich nicht nur auf einen einzelnen Punkt im Raum oder in der Zeit beziehen, dass sie also nicht "punkt-lokal" sind. Ein Ereignis kann jedoch beschränkt sein auf ein endliches Gebiet G in der Raumzeit. Die Auswirkungen eines solchen Ereignisses sind dann stets beschränkt auf den Zukunfts-Lichtkegel dieses Gebietes. Dabei ist der Lichtkegel eines Gebietes G definiert als die Vereinigungsmenge der Lichtkegel aller Punkte, die zu diesem Gebiet gehören. In der QFT ist somit die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung – wie in jeder relativistischen Theorie – beschränkt durch die Lichtgeschwindigkeit.

Anmerkung 2

Durch die Gleichung $\mathcal{E} = \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ wird suggeriert, ein Ereignis *sei* ein Tripel (A, \mathbf{x}, t) mit $A \in \mathcal{U}$ und $(\mathbf{x}, t) \in M = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Tatsächlich ist ein Ereignis aber eine abstrakte Entität, welche in jedem Koordinatensystem durch ein anderes derartiges Tripel dargestellt wird. Formal kann man diesen Zusammenhang wie folgt beschreiben:

Es bezeichne \mathcal{E} die Menge der Ereignisse im Universum und \mathcal{K} die Menge der Koordinatensysteme. Zu zwei Koordinatensystemen K und K' aus \mathcal{K} sei $\Lambda_{K, K'}$ die Poincaré-Transformation auf dem Minkowski-Raum, die den Übergang von K zu K' beschreibt. Es ist demnach:

$$\Lambda_{K, K'} : M \rightarrow M$$

Ferner bezeichne $K(E)$ die Darstellung des Ereignisses $E \in \mathcal{E}$ im Koordinaten-

system K (für alle $K \in \mathcal{K}$ und $E \in \mathcal{E}$). Somit ist

$$K : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times T$$

Mit der Definition

$$\begin{aligned} (A, \mathbf{x}, t)_K &:= K^{-1}(A, \mathbf{x}, t) \\ &\in \mathcal{E} \end{aligned}$$

können wir die Darstellungen desselben Ereignisses in verschiedenen Koordinatensystemen zueinander in Beziehung setzen mit der folgenden Aussage:

Für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ und $(A, \mathbf{x}, t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} \times T$ gilt mit

$$A' = U(\Lambda_{K, K'})A$$

und

$$(\mathbf{x}', t') = \Lambda_{K, K'}(\mathbf{x}, t)$$

die Gleichung

$$(A', \mathbf{x}', t')_{K'} = (A, \mathbf{x}, t)_K$$

Das Feldgesetz wird dann (in entsprechender Notation) für jedes Koordinatensystem K formuliert als:

$$FG_K := \{ \langle A, \mathbf{o}, 0 \rangle_{\mathbf{o}, K} \leftrightarrow \langle U_t V_{\mathbf{x}} A, \mathbf{x}, t \rangle_{\mathbf{o}, K} \mid A < \mathcal{H} \wedge \mathbf{x} \in \mathbb{R} \wedge t \in T \}$$

Der Nachweis der Kovarianz erfolgt, indem die Identität

$$\bigcap (FG_{K'}) = \bigcap (FG_K) \quad (\text{für alle } K, K' \in \mathcal{K})$$

gezeigt wird.

Bemerkung: Der Beweis der Kovarianz beruht im wesentlichen auf der Beziehung

$$U(\Lambda_{t'}) U(\Lambda_{\mathbf{x}'}) U(\Lambda) = U(\Lambda) U(\Lambda_t) U(\Lambda_{\mathbf{x}})$$

Dabei steht (\mathbf{x}', t') für $\Lambda(\mathbf{x}, t)$, und Λ ist eine homogene Lorentz-Transformation. Diese Beziehung ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass U eine Gruppenisomorphie ist und dass für die Transformationen auf dem Minkowski-Raum in analoger Weise gilt:

$$\Lambda_{t'} \Lambda_{\mathbf{x}'} \Lambda = \Lambda \Lambda_t \Lambda_{\mathbf{x}}$$

Bemerkung: Der Nachweis der Kovarianz muss nicht nur für das Feldgesetz erfolgen. Allerdings sind die Axiome MON und SEC sowie das äußere Maß μ so definiert, dass sie gegenüber jeder unitären Transformation des Hilbertraums invariant sind. Daher ist die Kovarianz hierfür leicht nachzuweisen.

52. Das teilchenförmige Verhalten des Quantenfeldes

Wir haben an mehreren Stellen darauf hingewiesen, dass es in der Quantenwelt keine klassischen Teilchen gibt, d.h. Teilchen, die man sich als verkleinerte Exemplare makroskopischer Kugeln oder als Massepunkte vorstellen könnte. In diesem Kapitel wollen wir diskutieren, welche Rolle den "Teilchen" in der QFT zukommt.

Wir betrachten hier ein bestimmtes Quantenfeld Φ . Dabei kann es sich entweder um ein Bosonenfeld oder um ein Fermionenfeld handeln.

In der \mathbf{x} -Darstellung haben wir formal zu jedem Punkt \mathbf{x} im Raum und zu jedem Zeitpunkt $t \in T$ einen Feldstärke-Operator $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Die \mathbf{x} -Darstellung hilft uns hier allerdings nicht weiter; wir benötigen vielmehr eine gemischte \mathbf{x} - \mathbf{p} -Darstellung. Um eine solche Darstellung zu konstruieren, legen wir ein kleines Intervall Δx zugrunde. Hierzu bilden wir die halboffenen Intervalle der Form

$$M_j := [j \cdot \Delta x, (j+1) \cdot \Delta x) \quad (\text{für alle } j \in \mathbb{Z})$$

sowie die Raumwürfel

$$M_{\mathbf{j}} := M_{j_1} \times M_{j_2} \times M_{j_3} \quad (\text{für alle } \mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3) \in \mathbb{Z}^3)$$

Durch die $M_{\mathbf{j}}$ wird der Raum \mathbb{R}^3 in disjunkte Teilwürfel aufgeteilt.

Zu jedem $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$ und $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ definieren wir – beschränkt auf den Würfel $M_{\mathbf{j}}$ – die "Wellenfunktion"

$$\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(\mathbf{x}) := e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / \Delta x} / (\sqrt{\Delta x})^3 \quad (\text{für alle } \mathbf{x} \in M_{\mathbf{j}})$$

Auf der Komplementmenge – d.h. für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus M_{\mathbf{j}}$ – hat diese Funktion den Wert Null.

Die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ stellt näherungsweise sowohl den Ort

$$\mathbf{x}_{\mathbf{j}} := \mathbf{j} \cdot \Delta x$$

als auch den Impuls

$$\mathbf{p}_{\mathbf{k}} := \mathbf{k} \cdot 2\pi \hbar / \Delta x$$

dar. Der Ortsunschärfe Δx entspricht dabei gemäß der Unschärferelation eine Impulsunschärfe von

$$\Delta p \approx \hbar / \Delta x$$

Die Genauigkeit, mit der hier zugleich der Ort und der Impuls dargestellt werden kann, ist somit durch die Unschärferelation vorgegeben.

Die Menge aller $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ bildet eine Orthonormalbasis des Hilbertraums der Wellenfunktionen

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3} := \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

Mit der Transformation

$$\Phi(\mathbf{j},\mathbf{k},t) := \int \varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

erhalten wir die gewünschte \mathbf{x} - \mathbf{p} -Darstellung des betrachteten Quantenfeldes. Hierbei ist $\Phi(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ der Feldstärkeoperator zu der Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ und zum Zeitpunkt t .

Es sei nun $A(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ der zugehörige Anzahloperator. Er entspricht der Anzahl jener "Teilchen", die durch die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ zu beschreiben sind und sich somit näherungsweise an dem Ort $\mathbf{x}_{\mathbf{j}}$ befinden und den Impuls $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ haben.

Bemerkung: Wenn wir ein Feld betrachten, das zusätzliche Freiheitsgrade aufweist (etwa Spin-Freiheitsgrade), so besteht der Feldstärkeoperator Φ aus mehreren Komponenten, entsprechend den möglichen Ausprägungen dieser Freiheitsgrade in der für sie jeweils gewählten Darstellung. Der Anzahloperator $A(\mathbf{a},\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ entspricht dann der Anzahl der "Teilchen", die nicht nur durch die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ zu beschreiben sind, sondern auch die Ausprägung \mathbf{a} der weiteren Eigenschaften haben, wie z.B. einen bestimmten Spin.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ sei $B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ der Unterraum, welcher der Aussage

$$A(\mathbf{j},\mathbf{k},t) \in \{m\}$$

entspricht, das heißt der Eigenraum des Operators $A(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ zum Eigenwert m . Es ist dann

$$\langle B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t) \rangle$$

das mögliche Faktum, dass der Teilchenzahloperator zu der Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ zum Zeitpunkt t den Wert m hat. Ist dieses mögliche Faktum eingetreten, so können wir sagen, es gebe genau m "Teilchen", die durch die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ charakterisiert sind.

Wenn wir annehmen, dass (zu einem fest gegebenen Zeitpunkt t) das physikalische "tertium non datur" für jeden der Unterräume $B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ erfüllt ist, dass also das mögliche kontingente Faktum

$$N_{\varphi}(t) := \forall_m \forall_{\mathbf{j}} \forall_{\mathbf{k}} [\langle B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t) \rangle \vee \langle B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t)^\perp \rangle]$$

realisiert ist, so existiert zu jedem $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^3$ und $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$ genau ein $m(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$, so dass mit dem Index $m = m(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ das mögliche Faktum $\langle B(m,\mathbf{j},\mathbf{k},t) \rangle$ gegeben ist. In diesem Fall gibt es also zur Zeit t und zu jedem \mathbf{j} und \mathbf{k} genau $m(\mathbf{j},\mathbf{k},t)$ "Teilchen" mit der Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$.

Unter der Voraussetzung $N_\varphi(t)$ gilt demnach: Bezeichnet B den Unterraum, der der Aussage $A(\mathbf{j}, \mathbf{k}, t) \in \{m\}$ entspricht, und ist das mögliche Faktum $\langle B \rangle$ gegeben, so befinden sich zum Zeitpunkt t im Raumbereich M_j (also ungefähr am Ort \mathbf{x}_j) genau m "Teilchen", die annähernd den Impuls \mathbf{p}_k haben.

Bemerkung: Im Falle eines fermionischen Feldes kann der Anzahloperator $A(\mathbf{j}, \mathbf{k}, t)$ zunächst jeweils nur die Werte Null oder Eins annehmen. Falls eine Summierung über innere Freiheitsgrade vorgenommen wird, sind aber auch höhere Werte möglich. Bei bosonischen Feldern hingegen sind höhere Werte von vornherein nicht ausgeschlossen. Häufig wird man aber Felder betrachten, bei denen die Teilchendichte in einem bestimmten Raumgebiet R eher gering ist. In dieser Situation gibt es in dem betrachteten Raumsegment insgesamt nur sehr wenige "Teilchen". Als Anzahl $A(\mathbf{j}, \mathbf{k}, t)$ tritt dann in den meisten Fällen der Wert Null, nur sehr selten der Wert Eins und noch viel seltener ein höherer Wert auf.

Von klassischen Teilchen unterscheiden sich die beschriebenen "Teilchen" im Quantenfeld zunächst dadurch, dass sie nicht einen bestimmten Ort und Impuls aufweisen, sondern durch eine Wellenfunktion charakterisiert sind, die nur annähernd einem Ort und einem Impuls entspricht.

Wichtiger ist jedoch der folgende Unterschied: Die hier beschriebenen "Teilchen" treten auf im Rahmen einer bestimmten Darstellung des Quantenfeldes. Würden wir eine andere Orthonormalbasis $\psi_{\mathbf{j}', \mathbf{k}'}$ des Hilbertraums der Wellenfunktionen

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3} = \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

zugrunde legen, so würden wir einen anderen Aspekt des Quantenfeldes (d.h. eine andere Teilmenge von \mathcal{U}) betrachten und völlig andere Anzahloperatoren erhalten. Selbst wenn wir für diese Darstellung ebenfalls das physikalische "tertium non datur" in der Form $N_\psi(t)$ annehmen und damit sicherstellen, dass auch in dieser Darstellung zu jedem \mathbf{j}' und \mathbf{k}' genau $m'(\mathbf{j}', \mathbf{k}', t)$ "Teilchen" mit der Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{j}', \mathbf{k}'}$ existieren, so stünden doch die Werte $m'(\mathbf{j}', \mathbf{k}', t)$ mit den Werten $m(\mathbf{j}, \mathbf{k}, t)$ in keinem unmittelbaren Zusammenhang.

Bemerkung: Die Betrachtung einer bestimmten Darstellung des Quantenfeldes stellt eine Beschränkung auf einen Teilaspekt dieses Feldes dar. Man beschränkt sich dabei auf eine Teilmenge der vorhandenen Freiheitsgrade, konkret auf eine Teilmenge innerhalb der Menge der selbstadjungierten Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Dies bedeutet eine Beschränkung auf die Betrachtung einer (sehr kleinen) Teilmenge \mathcal{U}' der Menge \mathcal{U} , d.h. der Menge aller Eigenschaften des Universums.

Selbst wenn wir in einem Raumsegment R nur genau *ein* "Teilchen" haben (wenn also der Gesamtteilchenzahl-Operator einen Wert hat und dieser gleich

Eins ist), so haben wir für dieses "Teilchen" doch in jeder der beiden Darstellungen jeweils eine andere Wellenfunktion.

Die Vorstellung, ein solches "Teilchen" habe in *jeder* möglichen Darstellung genau eine Wellenfunktion, würde uns allerdings nach dem Kochen-Specker'schen Theorem in einen Widerspruch führen. Andererseits gibt es aber auch kein Kriterium, nach dem wir eine bestimmte Darstellung als die "richtige" oder die "wahre" festlegen könnten.

Wir müssen also akzeptieren, dass das "Teilchen" nur in einigen Darstellungen eine Wellenfunktion hat, und dass es zwischen diesen Wellenfunktionen keinen direkten, sondern allenfalls einen probabilistischen Zusammenhang gibt: Ist genau eines der Ereignisse $\langle B(1, \mathbf{j}, \mathbf{k}, t) \rangle$ gegeben und gilt dasselbe für die Ereignisse $\langle B'(1, \mathbf{j}', \mathbf{k}', t) \rangle$, welche in analoger Weise zu den Wellenfunktionen $\psi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ gebildet werden, so ergeben sich Übergangswahrscheinlichkeiten von dem Ereignis

$$\langle B(1, \mathbf{j}, \mathbf{k}, t) \rangle$$

zu jedem der möglichen Ereignisse

$$\langle B'(1, \mathbf{j}', \mathbf{k}', t) \rangle$$

Beispiel: Die Wellenfunktionen $\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ wurden auf der Basis eines räumlichen Intervalls Δx gebildet. Wenn nun die Wellenfunktionen $\psi_{\mathbf{j}', \mathbf{k}'}$ in ganz analoger Weise definiert werden auf der Basis des Intervalls

$$\Delta x' = 2 \cdot \Delta x$$

so kann ein "Teilchen", welches in der ersten Darstellung die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ hat, in der zweiten Darstellung nur eine Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{j}', \mathbf{k}'}$ haben, bei der der Index

$$\mathbf{j}' = (j'_1, j'_2, j'_3)$$

zu dem gegebenen

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$$

festgelegt ist durch:

$$j'_i = j_i/2 \quad (\text{für } i \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } j_i \text{ gerade})$$

$$j'_i = (j_i - 1)/2 \quad (\text{für } i \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } j_i \text{ ungerade})$$

Für alle \mathbf{k} und \mathbf{k}' ergibt sich zum Zeitpunkt t eine Übergangswahrscheinlichkeit $p_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}')$ von $\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ zu $\psi_{\mathbf{j}', \mathbf{k}'}$ (genauer: von $\langle B(1, \mathbf{j}, \mathbf{k}, t) \rangle$ zu $\langle B'(1, \mathbf{j}', \mathbf{k}', t) \rangle$). Die damit gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{\mathbf{k}}$ ist im wesentlichen auf die Indizes in der Nähe von $\mathbf{k}' = 2 \cdot \mathbf{k}$ konzentriert.

Ein weiterer Unterschied zu klassischen Teilchen besteht in dem unterschiedlichen Verhalten über die Zeit hinweg. Innerhalb einer bestimmten Darstellung wollen wir annehmen, dass außer $N_\varphi(t)$ auch die entsprechende Bedingung $N_\varphi(t')$ zu einem anderen Zeitpunkt t' gegeben ist. Da sich unsere Betrachtung auf eine bestimmte Darstellung des Quantenfeldes und innerhalb dieser Darstellung nur auf bestimmte Operatoren (die Anzahloperatoren) bezieht, können wir nur einen probabilistischen Zusammenhang zwischen den die "Teilchen" zu verschiedenen Zeitpunkten charakterisierenden Wellenfunktionen herstellen. Diese Zufälligkeit ist eine Folge der Beschränkung auf einen bestimmten Teilaspekt des Quantenfeldes. Deterministisch lässt sich das Quantenfeld nur dann beschreiben, wenn wir *alle* seine Eigenschaften (und somit alle Unterräume des Hilbertraums des Universums) in die Betrachtung einbeziehen.

Nur dann, wenn ein solches "Teilchen" eine sehr große Masse M hat, bestimmt die ursprüngliche Wellenfunktion sowohl den Ort \mathbf{x} als auch die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$ mit großer Genauigkeit. In diesem Fall wird die neue Wellenfunktion (im Falle einer ungestörten, "freien" Bewegung) mit hoher Wahrscheinlichkeit eine jener Wellenfunktionen sein, die näherungsweise einen Ort \mathbf{x}' und einen Impuls \mathbf{p}' beschreiben, für die die klassischen Gleichungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot (t' - t) / M$$

und

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}$$

gelten. Damit erklärt es sich, dass die Bewegung vereinzelter massereicher "Teilchen" nahezu klassisch beschrieben werden kann.

Bemerkung: Je größer die Masse des betrachteten "Teilchens" ist, desto weniger hängt die quasi-klassische Bewegung davon ab, in welcher Darstellung das "Teilchen" beschrieben wird. Mit anderen Worten: Ist die Teilchenmasse sehr groß, so liefern verschiedene Darstellungen nahezu dieselbe (quasi-) klassische Beschreibung.

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass wir es in einem Raumbereich R mit mehreren "Teilchen" zu tun haben, dass also der Gesamtteilchenzahl-Operator für R einen Wert $N > 1$ hat. In diesem Fall stellt sich die Frage nach der Identität dieser "Teilchen", und zwar in doppelter Hinsicht.

Da der Zusammenhang zwischen den teilchenförmigen Erscheinungen im Quantenfeld zu verschiedenen Zeitpunkten nur probabilistisch ist, kann man ein bestimmtes "Teilchen" (etwa eines, das durch die Wellenfunktion $\varphi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}$ charakterisiert ist) nicht eindeutig einem von jenen "Teilchen" zuordnen, die in derselben Darstellung zu einem anderen Zeitpunkt vorhanden sind. Ebenso kann man ein bestimmtes "Teilchen" nicht eindeutig einem von jenen "Teil-

chen" zuordnen, die in einer anderen Darstellung zum selben Zeitpunkt vorhanden sind. Die Identität der "Teilchen" ist daher problematisch sowohl über den Zeitablauf hinweg als auch in Bezug auf die verschiedenen Darstellungen.

Es stellt sich daher die Frage: Wann kann man sinnvollerweise von der Identität eines "Teilchens" über die Zeit hinweg (oder über verschiedene Darstellungen hinweg) sprechen? Wann können wir die einzelnen "Teilchen" unterscheiden und einander von Zeitpunkt zu Zeitpunkt oder von Darstellung zu Darstellung zuordnen?

Ein Fall, in dem wir die Möglichkeit haben, "Teilchen" des Quantenfeldes mit einer gewissen Berechtigung als "Individuen" anzusehen, liegt vor, wenn die "Teilchen" räumlich weit voneinander entfernt sind, d.h. wenn es sich um "vereinzelte Teilchen" handelt. Je vereinzelter die "Teilchen" dabei sind, desto eher sind wir berechtigt, sie als "Individuen" zu betrachten.

Liegen N vereinzelte "Teilchen" im Raumgebiet R vor, so können wir den Raumbereich aufteilen in disjunkte Teilbereiche

$$R = R_1 \cup \dots \cup R_N$$

so dass sich im Innern jedes dieser Bereiche genau ein "Teilchen" befindet. Dies besagt, dass der Anzahloperator für jeden der Bereiche R_j den Wert Eins hat. In diesem Fall gilt für jeden dieser Bereiche das, was oben über einzelne "Teilchen" gesagt wurde: Jedem "Teilchen" (in einer bestimmten Darstellung) kann ungefähr ein Ort und ein Impuls zugeordnet werden, und die Bewegung des "Teilchens" erfolgt grundsätzlich probabilistisch, jedoch im Falle einer großen Masse näherungsweise "klassisch".

Von individuell sich bewegenden "Teilchen" können wir sprechen, wenn "Teilchen" so weit voneinander entfernt sind, dass sich von Zeitpunkt zu Zeitpunkt mit hoher Wahrscheinlichkeit ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den einzelnen Teilchen-Ereignissen im Quantenfeld ergibt. Ähnlich verhält es sich, wenn wir versuchen, individuelle Wellen auf einer Wasseroberfläche zu identifizieren. Dass sich "eine" bestimmte Welle von einem Ort zu einem anderen bewegt habe, können wir insbesondere dann sagen, wenn diese Welle einen räumlich weitgehend isolierten Prozess darstellt.

Ausreichend vereinzelte "Teilchen" lassen sich in dieser Weise als individuelle Objekte ansehen. Das Bewegungsgesetz sieht in diesem Fall vor, dass die Wellenfunktionen dieser "Teilchen" darüber entscheiden, mit welcher Wahrscheinlichkeit den "Teilchen" zu einem späteren Zeitpunkt eine bestimmte neue Wellenfunktion zugeordnet ist.

Bemerkung: Sind "Teilchen" in diesem Sinne vereinzelt, so besteht die Teilchen-Individualität nicht nur über die Zeit hinweg, sondern auch über verschiedene Darstellungen.

Bemerkung: Ist die Teilchendichte in einem Raumbereich R insgesamt gering, so werden die "Teilchen" mit hoher Wahrscheinlichkeit "vereinzelte" sein.

Ein anderer Fall, in dem man von einem individuellen "Teilchen" sprechen kann, liegt vor, wenn sich das "Teilchen" (als einziges seiner Art) in einer "Falle" befindet, etwa in einer Ionenfalle, oder wenn es in einer Kristallstruktur gefangen ist. Auch in diesem Fall besteht eine Identität des "Teilchens" über die Zeit hinweg.

Dasselbe gilt auch dann, wenn wir es mit verschiedenen *Arten* von "Teilchen" zu tun haben, d.h. wenn die "Teilchen" durch zusätzliche eindeutige Charakteristika ausgezeichnet sind, die sich – aufgrund der vorhandenen Umgebungsbedingungen – über die Zeit hinweg nicht ändern. Als Charakteristika kommen z.B. eine Spineigenschaft oder ein Impuls in Frage.

Bemerkung: Auch im Falle einer sehr kurzen Zeitdifferenz (oder wenn wir zwei sehr ähnliche Darstellungen betrachten) können wir von einer annähernden Identität der "Teilchen" über die Zeit bzw. über die verschiedenen Darstellungen ausgehen, da sich in diesem Fall Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben, die sehr nahe bei Null bzw. Eins liegen.

In allen genannten Fällen können wir von der Identität eines Teilchens "mit sich selbst" über die Zeit hinweg sprechen. Allerdings bedeutet dies nicht, dass es sich tatsächlich um klassische, "selbstidentische" Teilchen handelt. Genau genommen handelt es sich immer nur um ein teilchenförmiges Verhalten des Quantenfeldes, welches sich annähernd so beschreiben lässt, als wenn hier tatsächlich selbstidentische Teilchen vorlägen. Man kann sagen, das Quantenfeld verhält sich "Teilchenidentitäts-förmig". Die Eindeutigkeit der Zuordnung und damit die jeweilige Teilchenidentität ist in jedem Fall nur mit hoher Wahrscheinlichkeit gegeben.

Zusammenfassend müssen wir also feststellen, dass es genau genommen im Quantenfeld *keine* Teilchenidentität gibt, sondern nur ein identitätsförmiges Verhalten, das unter bestimmten Voraussetzungen auftritt.

Unsere Überlegungen zeigen somit, dass es problematisch ist, in der QFT überhaupt von "Teilchen" in einem konkreten Sinn zu sprechen. Allenfalls kann man sagen, dass das Quantenfeld, wenn man sich auf einen bestimmten Aspekt des Feldes (d.h. auf eine bestimmte Teilmenge \mathcal{U}' der Menge \mathcal{U} aller Eigenschaften) beschränkt und wenn darüber hinaus bestimmte Bedingungen gegeben sind, ein teilchenförmiges Verhalten zeigt. Merkmale dieses teilchenförmigen Verhaltens sind:

- dass jeder einzelne Teilchenzahloperator (in einer gegebenen Darstellung des Quantenfeldes) stets nur einen ganzzahligen, nicht-negativen Wert haben kann,
- dass der Operator der Gesamtteilchenzahl in einem Raumbereich R unter bestimmten Umständen über die Zeit einen konstanten Wert hat (Erhaltung der Teilchenzahl),

- dass die Teilchenzahlen sich bei der Aufteilung eines Raumbereichs R in Teilbereiche R_j additiv verhalten
- und dass die von einer Menge vorhandener "Teilchen" ausgehenden Wirkungen (z.B. elektrische oder magnetische Kräfte aufgrund der Ladung oder gravitative Kräfte aufgrund der Masse der "Teilchen") proportional sind zur Teilchenzahl.

Klassische Teilchen gibt es im Quantenfeld nicht. Unter bestimmten Voraussetzungen zeigt das Quantenfeld jedoch ein teilchenförmiges Verhalten, das in speziellen Fällen (näherungsweise) "klassisch" beschrieben werden kann. Dabei werden den Teilchen numerische Größen wie Ort und Impuls zugeordnet und ihre Bewegung wird deterministisch beschrieben.

"Teilchen" im Quantenfeld müssen im Grunde genommen verstanden werden als Anregungszustände dieses Feldes, nicht aber als reale Teilchen. Dies bedeutet auch, dass die "Teilchen" des Quantenfeldes nicht im klassischen Sinne "selbstidentisch" sind. Genau genommen gibt es im Quantenfeld keine Teilchenidentität, sondern nur ein teilchenförmiges und unter bestimmten Umständen identitätsförmiges Verhalten. Durch die Tatsache, dass das Quantenfeld keine Teilchen im eigentlichen Sinne enthält, wird allerdings der Realismus der Theorie nicht in Frage gestellt.

Bemerkung: Ein klassisches Feld zeigt nur dann ein diskretes, teilchenförmiges Verhalten, wenn es in irgendeiner Form von außen beschränkt ist, z.B. im Falle von stehenden Wellen. Hingegen ist das teilchenförmige Verhalten bestimmter Aspekte des Quantenfeldes diesem inhärent.

Bemerkung: Die Teilchenförmigkeit des Quantenfeldes ist zugleich die Grundlage für die Existenz makroskopischer Objektstrukturen.

Bemerkung: Im Zusammenhang mit der QFT spricht man gelegentlich von "Quantenteilchen" bzw. "quantum particles". Diese Redeweise ist nur dann gerechtfertigt, wenn man sich darüber im Klaren ist, dass es sich hier nicht wirklich um Teilchen handelt, sondern um teilchenförmige Ereignisse, die im Rahmen eines bestimmten Teilaspektes des Quantenfeldes auftreten.

Bemerkung: Dass wir auf die Existenz realer Teilchen in der Quantentheorie verzichten müssen, führt zu einer "Logik", die ohne physikalische Objekte im klassischen Sinne auskommt. Dies ist allerdings keine "Quantenlogik", sondern eine "Logik", wie sie jeder reinen Feldtheorie eigen ist.

53. Anmerkungen zur Quantenfeldtheorie

Anmerkung 1

Ein klassisches Feld ist eine Abbildung

$$F : M \rightarrow W$$

Dabei ist M die Raumzeit (der Minkowski-Raum) und W der Wertebereich des Feldes. Im Falle eines einfachen skalaren Feldes ist $W = \mathbb{R}$, bei einem Vektorfeld $W = \mathbb{R}^3$ und bei einem 4er-Vektorfeld $W = \mathbb{R}^4$. Mehrere solche Felder $F_j : M \rightarrow W_j$ lassen sich zu *einem* Feld $F : M \rightarrow W$ zusammenfassen, indem man W als das kartesische Produkt der einzelnen Wertebereiche definiert.

Auch eine Theorie klassischer Teilchen kann mittels eines Feldes

$$F : M \rightarrow W$$

dargestellt werden. Im Falle von N nicht unterscheidbaren Teilchen wird dazu $W = \{0, \dots, N\}$ gesetzt. Für jedes $(\mathbf{x}, t) \in M$ gibt $F(\mathbf{x}, t)$ die Anzahl der Teilchen an, die sich zur Zeit t am Ort \mathbf{x} befinden. Im Gegensatz zu den üblichen klassischen Feldern sind derartige "Anzahlfelder" nicht stetig.

Obwohl das Anzahlfeld F nur die Orte der Teilchen darstellt, kann man ein deterministisches Bewegungsgesetz formulieren. Durch die Orte, die die Feldfunktion F auf einem beliebigen (kleinen) Zeitintervall $[t, t']$ angibt, ist die erste Ableitung nach der Zeit (und somit der Impuls) zum Zeitpunkt t , damit aber auch die ganze weitere Entwicklung festgelegt.

Für den Fall von N individuellen, einzeln unterscheidbaren Teilchen wird $W = \{0, 1\}^N$ gesetzt. Zu $(\mathbf{x}, t) \in M$ ist die j -te Komponente von $F(\mathbf{x}, t)$ genau dann gleich 1, wenn sich das j -te Teilchen zur Zeit t am Ort \mathbf{x} befindet.

Wir wollen nun zeigen, dass ein Quantenfeld ebenfalls als eine Abbildung

$$F : M \rightarrow W$$

aufgefasst werden kann, wenn W passend definiert wird.

Zu einem topologischen Raum X bezeichnet man eine Teilmenge \mathcal{F} der Potenzmenge $\wp(X)$ als "Filter", wenn gilt:

- (a) $A \in \mathcal{F}$ und $A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ (Monotonie)
- (b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_j A_j \in \mathcal{F}$ (Durchschnitt-Stabilität)
- (c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (Nicht-Trivialität)

Es sei nun \mathcal{H} der Hilbertraum des zu beschreibenden Feldes und es sei $\mathcal{U} := \{A \mid A \subset \mathcal{H}\}$. Ein Filter ist hier in analoger Weise eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, für die gilt:

- (a) $A \in \mathcal{F}$ und $A < B < \mathcal{H} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
 (b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ und A_j paarweise vertauschbar $\Rightarrow \bigcap_j A_j \in \mathcal{F}$
 (c) $0 \notin \mathcal{F}$

Wird (b) durch die entsprechende Aussage für unendliche Folgen von Unterräumen, d.h. durch die Aussage

- (b') $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ und A_j paarweise vertauschbar $\Rightarrow \bigcap_j A_j \in \mathcal{F}$

ersetzt, so sprechen wir von einem σ -Filter.

Aus (b) und (c) kann man leicht auf die Eigenschaft

- (d) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \neg \perp_j A_j$

schließen. Umgekehrt kann von (d) aber nicht auf (b) und (c) geschlossen werden; in diesem Sinne ist (d) schwächer als (b) und (c).

Eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ wird als "schwacher" Filter bezeichnet, wenn \mathcal{F} anstelle von (b) und (c) nur die Eigenschaft (d) hat. Beziehen wir hier (d) auf unendliche Folgen von Unterräumen, d.h. ersetzen wir (d) durch die Aussage

- (d') $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \neg \perp_j A_j$

so sprechen wir von einem schwachen σ -Filter.

Die Eigenschaft (a) entspricht offenbar dem Monotonieprinzip. Ebenso entspricht (d') dem Ausschlussprinzip. Damit können wir den Wertebereich W des Quantenfeldes definieren als:

$$W := \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ ist schwacher } \sigma\text{-Filter auf } \mathcal{H} \}$$

Die Feldfunktion $F : M \rightarrow W$ ist (für den wahren Weltablauf ω_0) gegeben durch:

$$F(\mathbf{x}, t) := \{ A \in \mathcal{U} \mid (A, \mathbf{x}, t) \in \omega_0 \}$$

Das Quantenfeld ist somit ein Feld im "klassischen" Sinne mit einem eindeutig definierten, wenn auch komplexen und wenig anschaulichen Wertebereich. Der Bezug zur makroskopischen Realität wird wie folgt hergestellt: Ist A der Unterraum, der einem Ereignistyp "Tisch" entspricht, so steht zur Zeit t am Ort \mathbf{x} genau dann ein solcher Tisch, wenn $A \in F(\mathbf{x}, t)$ ist.

Bemerkung: Es besteht eine offensichtliche Eins-zu-eins-Beziehung zwischen dem Wertebereich W des Quantenfeldes und dem deterministischen Zustandsraum Z der Quantenmechanik.

Für eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ und einen Operator U sei

$$U(\mathcal{F}) := \{ UA \mid A \in \mathcal{F} \}$$

Damit gilt für das Quantenfeld F das Feldgesetz

$$F(\mathbf{x},t) = U_t V_{\mathbf{x}}(F(\mathbf{o},0)) \quad (\text{für alle } (\mathbf{x},t) \in M)$$

Mehrere Quantenfelder können zu *einem* Quantenfeld zusammengefasst werden, indem dessen Hilbertraum als das Tensorprodukt der Hilberträume der einzelnen Felder definiert wird.

Damit wird das Universum durch die QFT folgendermaßen beschrieben: Das Universum ist ein Quantenfeld. Ein solches bildet jeden Punkt der Raumzeit ab auf ein schwaches σ -Filter auf \mathcal{H} , dem Hilbertraum des Universums.

Anmerkung 2

So wie wir aus der Realität des Quantenfeldes ein teilchenförmiges Verhalten ableiten können, so können wir auch zeigen, dass sich das Quantenfeld unter bestimmten Umständen näherungsweise wie ein klassisches Feld verhält. Zum Beispiel verhält sich das Photonenfeld im Falle großer Wellenlängen und zugleich einer relativ hohen "Teilchendichte" wie ein klassisches elektromagnetisches Feld.

Eine solche quasi-klassische Approximation ist möglich unter den folgenden Voraussetzungen: Zum einen muss man sich auf bestimmte (makroskopische) Aspekte des Quantenfeldes, d.h. auf bestimmte Observable beschränken. Formal bedeutet dies die Beschränkung auf eine (i.a. extrem kleine) Teilmenge \mathcal{E}' innerhalb der Menge aller Ereignisse \mathcal{E} im Universum. Überhaupt stellt jede makroskopische Betrachtung eine solche Beschränkung auf einen Teilaspekt des Quantenfeldes und somit auf eine Teilmenge \mathcal{E}' von \mathcal{E} dar.

Zum ändern müssen wir von einer Bedingung ausgehen, in der das physikalische "tertium non datur" für eine bestimmte Menge von Ereignissen $N \subset \mathcal{E}$ angenommen wird. Zulässig ist diese Annahme immer dann, wenn sich der auf die Menge \mathcal{E}' bezogene empirische Gehalt der Theorie hierdurch nicht ändert. Dies betrifft den empirischen Gehalt sowohl der deterministischen Gesetze als auch des probabilistischen Gesetzes.

Bemerkung: Im Falle der klassischen Theorie können wir – im Sinne der "starken" Theorie – das physikalische "tertium non datur" allgemein voraussetzen. Im Falle der Quantentheorie hingegen können wir diese Annahme immer nur für eine Teilmenge $N \subset \mathcal{E}$ machen. Mit einer solchen Annahme erhalten wir einen "starken Kalkül" im Rahmen der im allgemeinen "schwachen" Theorie. Annehmbar ist das physikalische "tertium non datur" für die Menge N nur dann, wenn hierdurch kein Widerspruch zum Kochen-Specker'schen Theorem entsteht. Bei der Betrachtung makroskopischer Aspekte des Quantenfeldes tritt ein solcher Widerspruch typischerweise nicht auf.

Als dritte Voraussetzung ist das Vorhandensein bestimmter physikalischer Bedingungen zu nennen. So ist z.B. eine kontinuierliche Beschreibung des

elektromagnetischen Feldes nur dann möglich, wenn das Feld eine ausreichende Energiedichte aufweist. Bei geringer Energiedichte würde man hingegen stets nur einzelne Feldquanten beobachten können.

Sind nun die genannten Voraussetzungen gegeben, so gibt es zwei Arten der quasi-klassischen Approximation, einerseits die quasi-kontinuierliche Darstellung des Quantenfeldes und andererseits die quasi-deterministische Beschreibung seines Verhaltens. Hierauf wollen wir im folgenden eingehen.

Zum einen lässt sich die grundsätzlich gequantelte Struktur in einer quasi-kontinuierlichen Weise darstellen. Dies betrifft einerseits die Stetigkeit des Wertebereichs der betrachteten Feldfunktionen und andererseits die Kontinuität der zugrundeliegenden Raumstruktur.

So wie eine Wasseroberfläche als glatt erscheint, obwohl sie (nach der klassisch-mikroskopischen Theorie) tatsächlich aus einer zwar großen, aber endlichen Anzahl von diskreten Molekülen besteht, so kann auch das Quantenfeld kontinuierlich beschrieben werden, ohne dass sich an der Quantenrealität als solcher etwas ändert. Das Quantenfeld kann so als ein Feld erscheinen, das in stetiger Weise auf dem Raum \mathbb{R}^3 definiert ist.

Unabhängig von dieser möglichen Approximation durch ein stetiges Feld bleibt die Mikrostruktur des Quantenfeldes selbst dabei stets "gequantelt", d.h. sie zeigt weiterhin ein "korpuskuläres" Verhalten. So können bei einer genaueren Beobachtung einzelne Quanten registriert werden. Die stetigen klassischen Feldfunktionen stellen hier immer nur eine Approximation an das reale Quantenfeld dar.

Zum andern kann das Verhalten des Quantenfeldes quasi-deterministisch beschrieben werden. Aufgrund der Beschränkung auf einen Teilaspekt des Quantenfeldes haben wir zunächst eine probabilistische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung. Liegen die Übergangs-Wahrscheinlichkeiten jedoch sehr nahe bei Null bzw. Eins, so ergibt sich praktisch ein Determinismus.

Das klassisch-kontinuierlich approximierte Quantenfeld folgt im allgemeinen keinem deterministischen Bewegungsgesetz. Es ergibt sich vielmehr ein probabilistischer Zusammenhang. Ist eine Feldstärke-Funktion F zusammen mit den kanonischen Impulsen G zur Zeit t gegeben, so sind bestimmte mögliche Feldfunktionen zur Zeit t' mehr oder weniger wahrscheinlich.

Hieraus kann sich allerdings – unter bestimmten Umständen – ein nahezu deterministisches Verhalten ergeben. Dies ist dann der Fall, wenn die relevanten Übergangs-Wahrscheinlichkeiten nahezu gleich Eins sind. Falls man die Bewegung des (ungestörten) Feldes nur sehr grob betrachtet, kann es sich beinahe so verhalten, wie eine einfache klassische Feldtheorie es vorhersagen würde: Ist die Feldstärke zusammen mit den kanonischen Impulsen zur Zeit t gegeben, so erhält man diese Funktionen zu einem späteren Zeitpunkt t' über eine deterministische Feldgleichung.

Anmerkung 3

Wir wollen hier die Frage diskutieren, warum sich bestimmte makroskopische Vorgänge, wie zum Beispiel die Planetenbewegung, in einer deterministischen und reversiblen Weise beschreiben lassen. Dabei gehen wir zunächst vom klassischen Modell der Mikrowelt aus.

Aus klassisch-mikroskopischer Perspektive folgt die Bewegung des Universums einem deterministischen Gesetz. Zugleich wird durch das probabilistische Gesetz (geben durch das Lebesguemaß) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge aller Pfade im Zustandsraum angegeben (initialer Probabilismus).

Für makroskopische Eigenschaften ergeben sich hieraus im allgemeinen Fall Übergangswahrscheinlichkeiten für die Bewegung in der Zeit. Wir haben also einen makroskopischen Probabilismus der Bewegung.

Dieser Probabilismus ist eine Folge der Tatsache, dass wir uns auf eine "grobe" Betrachtung der Verhältnisse beschränken und dass demnach nicht alle Eigenschaften der beteiligten elementaren Teilchen (d.h. deren genaue Orte, Impulse usw.) festgelegt sind. Ein Beispiel für ein solches makroskopisch-probabilistisches Verhalten stellt die Brown'sche Bewegung dar.

Falls nun bestimmte Übergangswahrscheinlichkeiten sehr nahe bei Eins liegen, erhalten wir einen Quasi-Determinismus des zeitlichen Ablaufs. Ein solcher Quasi-Determinismus liegt zum Beispiel dann vor, wenn wir feststellen, dass sich eine vorhandene Temperaturdifferenz ausgleicht. Es handelt sich dabei um einen zeitlich gerichteten Prozess, der nahezu mit Sicherheit abläuft und insofern "quasi-deterministisch" ist.

Die Temperaturverteilung in einem Glas Wasser stellt eine makroskopische Größe dar. Der zunehmende Ausgleich der Temperaturdifferenzen, der mit einer Zunahme der Entropie einhergeht, findet nicht mit Sicherheit, aber doch mit einer extrem hohen Wahrscheinlichkeit (also "fast sicher") statt. Daher stellt die irreversible Zunahme der Entropie in diesem Fall einen quasi-deterministischen Vorgang dar.

Hat ein abgeschlossenes System sein thermodynamisches Gleichgewicht bereits erreicht, so findet (aus der gegebenen makroskopischen Perspektive) mit hoher Wahrscheinlichkeit keine weitere Veränderung statt. Hierin liegt dann der Quasi-Determinismus.

Wir betrachten nun ein System, das nur nahezu abgeschlossen ist. Hat dieses System sein inneres thermodynamisches Gleichgewicht erreicht, so beruht die weitere Entropiezunahme nur noch auf der Wechselwirkung mit der Umgebung. Im Falle des Fluges einer Kanonenkugel in der Atmosphäre der Erde besteht diese Wechselwirkung zum Beispiel in der Reibung mit der umgebenden Luft. Wenn wir nun ein nahezu abgeschlossenes System betrachten, so ist die Wechselwirkung mit der Umgebung zu vernachlässigen. In diesem Fall bekommt der quasi-deterministische Vorgang einen quasi-reversiblen Charakter.

Ein typisches Beispiel für einen solchen Prozess stellt die Bewegung der Planeten dar, die sich in einem annähernden Vakuum abspielt. Aus der klassisch-mikroskopischen Perspektive ist ein solcher Vorgang (der einen bestimmten makroskopischen Aspekt des Universums betrifft) niemals als vollständig deterministisch oder in präzisiertem Sinne als reversibel anzusehen. Es handelt sich lediglich um einen quasi-deterministischen Vorgang, der nahezu reversibel abläuft.

Aus der Perspektive der QFT erhalten wir genau dieselbe Argumentation. Wird das Quantenfeld vollständig, d.h. mit allen seinen Eigenschaften beschrieben, so folgt es einem deterministischen Bewegungsgesetz. Auch hier liegt demnach ein Determinismus auf der mikroskopischen Ebene vor. Darüber hinaus gilt in der QFT ein probabilistisches Gesetz, welches durch ein äußeres Maß μ auf der Menge der möglichen deterministischen Weltabläufe gegeben ist.

Durch die Beschränkung auf einen Teilaspekt des Feldes gelangen wir zu einer nur noch probabilistischen Beschreibung. Damit ergibt sich auch in der QFT ein Probabilismus auf makroskopischer Ebene. Unter bestimmten Umständen sind jedoch die relevanten Übergangswahrscheinlichkeiten "nahezu deterministisch", d.h. sie liegen nahe bei Null oder bei Eins. In diesem Fall erhalten wir quasi-deterministische Prozesse, die grundsätzlich irreversibel sind und mit einer Entropiezunahme einhergehen.

Hat ein System sein inneres thermodynamisches Gleichgewicht erreicht und sind die äußeren Wechselwirkungen vernachlässigbar klein, so bewegt sich das System in quasi-reversibler Weise. Ebenso wie im Falle der klassisch-mikroskopischen Theorie ist zum Beispiel die Planetenbewegung auch aus der Sicht der QFT als ein nahezu reversibler, quasi-deterministischer Prozess aufzufassen. Dieser Prozess betrifft einen bestimmten makroskopischen Aspekt des Quantenfeldes, d.h. er findet auf der makroskopischen Ebene statt.

Zusammenfassend können wir feststellen: Makroskopische Vorgänge, die als deterministische und reversible Prozesse erscheinen, sind aus der Perspektive der QFT (ebenso wie im Falle der klassisch-mikroskopischen Theorie) niemals als vollständig deterministisch oder in präzisiertem Sinne als reversibel anzusehen. Ein derartiger Vorgang betrifft stets einen bestimmten makroskopischen Teilaspekt des Universums. Auch wenn er als ein deterministisch notwendiger Prozess erscheint, findet er tatsächlich doch nur mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit statt. Es handelt sich hierbei um einen quasi-reversiblen und quasi-deterministischen Prozess.

Anmerkung 4

Unsere Überlegungen zum teilchenförmigen sowie zum klassisch-feldförmigen Verhalten des Quantenfeldes zeigen folgendes: Aus dem Konzept der realistischen QFT ergibt sich, dass es keine bestimmte Grenze gibt, an der ein Übergang von einem quantentheoretisch zu beschreibenden zu einem klassischen

Verhalten stattfindet. Vielmehr verhält sich das Quantenfeld unter bestimmten Voraussetzungen so, dass es in guter Näherung mit einer quasi-klassischen Beschreibung dargestellt werden kann.

Bei einer solchen quasi-klassischen Beschreibung handelt es sich um die Approximation eines (makroskopischen) Teilaspekts des Quantenfeldes durch eine makroskopisch-klassische Theorie. Letzteres bedeutet, dass die Beschreibung mittels kontinuierlicher Größen und im Sinne des Determinismus erfolgt. Es bedeutet aber nicht, dass auch das klassisch-mikroskopische Modell zugrunde gelegt wird, also die Annahme, das Universum bestehe aus unveränderlichen ("ewigen") elementaren Teilchen sowie stetigen Feldern, die an jedem Punkt des Raumes und zu jedem Zeitpunkt eine definierte Feldstärke aufweisen. Auch wenn die Möglichkeit einer makroskopisch-klassischen Approximation besteht, so bleibt doch das reale Quantenfeld stets "gequantelt" und es verhält sich, solange wir nicht alle seine Eigenschaften zugleich einbeziehen, probabilistisch.

Es gibt demnach hier keine Grenze, bei der objektiv ein Übergang stattfindet von einem gequantelten zu einem kontinuierlichen Verhalten des Quantenfeldes oder von einem quantentheoretischen Probabilismus zu einem klassischen Determinismus. Auch gibt es keine Grenze für den Übergang von einer phänomenalistisch zu beschreibenden Quantenwelt (in der der Vorgang der Beobachtung oder der Messung eine entscheidende Rolle spielt) zu einer realistisch darzustellenden klassischen Welt. Es gibt lediglich mehr oder weniger gute approximative Beschreibungen des realen Quantenfeldes. Die Vorstellung von einer "klassischen Welt" ist hingegen einfach nur Folge einer unzutreffenden Modellierung des realen Universums.

Anmerkung 5

Wir haben festgestellt, dass das Quantenfeld einerseits unter bestimmten Voraussetzungen ein annähernd teilchenförmiges Verhalten zeigt und dass es sich andererseits unter bestimmten Umständen näherungsweise wie ein klassisches Feld verhält.

Auf der makroskopischen Ebene erhalten wir daher einen Dualismus aus Teilchen und Feldern. Aus diesem Grunde ist die Vorstellung von einer Welt, die aus klassischen Objekten und Feldern besteht, für makroskopische Subjekte besonders anschaulich. In dem Versuch, eine anschauliche Vorstellung von den mikroskopischen Verhältnissen zu erhalten, hat die Physik das makroskopisch Anschauliche auf das Mikroskopische übertragen. Auf diese Weise entstand das Modell der klassischen Mikrophysik.

Zwar zeigt das Quantenfeld, wenn man es unter einem bestimmten Aspekt und unter bestimmten Bedingungen betrachtet, ein objektförmiges und ein makroskopisch-feldförmiges Verhalten. Allerdings ist es naiv zu fordern, dass die Mikrowelt anschaulich vorstellbar sein müsse und aus diesem Grunde als eine verkleinerte Form des Makroskopischen aufzufassen ist, mit Atomen anstelle

von Billardkugeln und mikroskopisch feinen Feldern anstelle der beobachtbaren makroskopisch-feldförmigen Erscheinungen.

Der klassisch-mikroskopische Ansatz ist durch Experimente empirisch widerlegt. Damit wird allerdings nicht der Realismus oder gar die Logik in Frage gestellt. Es kommt vielmehr nur darauf an, eine explizite – wenn auch nicht anschauliche – Modellierung des Realen vorzunehmen und somit eine abstrakte, d.h. nicht anschauliche Ontologie anzugeben. Die Modellierung muss dabei in präziser Weise erfolgen, da sie sonst – eben aufgrund der fehlenden Anschaulichkeit – nicht wirklich verstanden werden kann.

Dadurch, dass es im Quantenfeld keine eigentlichen Teilchen gibt und auch keine klassischen Felder, wird nicht der Realismus in Frage gestellt, sondern lediglich das klassisch-mikroskopische Modell.

Anmerkung 6

Die heutige Praxis der Quantenphysik beinhaltet eine Vielzahl approximativer Methoden bzw. Kalküle, die durch eine halbklassische Argumentation charakterisiert sind. Derartige Kalküle können in einem Verfahren von Versuch und Irrtum entwickelt werden. Dies gelingt auch dann, wenn die Physik nicht über eine konsistente Theorie der Quantenrealität verfügt. Gelangt man mit einem solchen Kalkül zu Ergebnissen, die sich anschließend im Experiment bestätigen, so wird damit auch die "Gültigkeit" des Kalküls bestätigt.

Die Physik kann daher auch ohne eine präzise formulierte Theorie, allein aufgrund praktischer Erfahrung erkennen, wann eine bestimmte halbklassische Argumentation möglich ist und wann nicht. Hierzu hat sich eine gewisse Intuition entwickelt, die es erlaubt zu entscheiden, wann ein bestimmter Kalkül anwendbar ist, d.h. wann er zu korrekten Ergebnissen führt.

Es gibt somit grundsätzlich zwei Wege, wie sich Aussagen über die Anwendbarkeit eines bestimmten Kalküls bzw. eines Formalismus gewinnen lassen: zum einen durch Ableitung des Formalismus aus einer allgemeinen Theorie, zum andern mit dem beschriebenen Verfahren von Versuch und Irrtum.

Sinnvoller ist es in jedem Fall, derartige Formalismen und approximative Methoden aus einer allgemeinen Theorie abzuleiten. Hierzu fehlt jedoch der bisherigen Quantentheorie eine präzise Beschreibung der Quantenrealität. Entscheidend für die Ableitung eines approximativen Kalküls ist es, dass man über eine Theorie verfügt, *an die* die Approximation erfolgen soll.

Die in diesem Text dargestellte realistische Quantentheorie (RQT) liefert ein abstraktes, aber präzises Modell der realen Quantenwelt. Sie ist darüber hinaus widerspruchsfrei, insbesondere im Hinblick auf die bekannten No-Go-Theoreme. Zur Ableitung von ("starken") Kalkülen aus der (im allgemeinen "schwachen") Theorie kann für eine Teilmenge N von \mathcal{E} das physikalische "tertium non datur" angenommen werden, sofern sich dadurch der empirische Gehalt der Theorie nicht verändert. Damit werden positive Schlussweisen ermöglicht und

es kann von der Wertbestimmtheit relevanter physikalischer Größen (z.B. Teilchenzahlen oder Feldstärken) ausgegangen werden. Auf dieser Basis lassen sich Bedingungen formulieren, unter denen bestimmte (in vielen Fällen approximative) Formalismen anwendbar sind.

Anmerkung 7

Ein wichtiges Beispiel für einen Kalkül im Sinne der letzten Anmerkung stellt – ausgehend von der QFT als der eigentlichen Theorie des realen Universums – die Quantenmechanik dar. Zum quantenmechanischen Kalkül gelangt man von der QFT durch mehrere Schritte.

Zunächst beschränkt man die Betrachtung auf eines oder mehrere der Quantenfelder, die das Universum beschreiben. Sodann ignoriert man jene Wechselwirkungen der betrachteten Felder, die zu einer Änderung der Gesamtteilchenzahlen bei diesen Feldern im Laufe der Zeit führen können. Die Vernachlässigung dieser Wechselwirkungen bedeutet den Übergang zu einer approximativen Betrachtung.

Nun fixiert man die Gesamtteilchenzahlen der Felder auf bestimmte feste Werte N_1, N_2, \dots . Dies entspricht der Beschränkung auf einen Unterraum $A_{N_1, N_2, \dots}$ des Hilbertraums, der diesen Teilchenzahlen entspricht. Auf diese Weise gelangt man zu einer Quantenmechanik.

In bestimmten Fällen kann man nun übergehen zu einer nicht-symmetrisierten Modellierung der betroffenen Felder. Dies gilt insbesondere dann, wenn jedes dieser Felder auf einem Fockraum \mathcal{F} basiert. Der Fockraum ist bekanntlich definiert als die direkte Summe

$$\mathcal{F} = \bigoplus_N \mathcal{S}_N$$

wobei \mathcal{S}_N durch Symmetrisierung bezüglich der Teilchentausch-Operationen aus \mathcal{H}_N entsteht und \mathcal{H}_N der Hilbertraum eines Systems aus N gleichartigen Teilchen der betrachteten Art ist.

Im einfachsten Fall ist

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{\mathbb{R}^3} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{R}^3}$$

mit N Faktoren und der Definition

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3} := \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

Der Raum \mathcal{S}_N kann dann als der Unterraum der symmetrischen Elemente von \mathcal{H}_N definiert werden. Während \mathcal{H}_N eine Menge von N individuellen Teilchen beschreibt, werden in \mathcal{S}_N nicht unterscheidbare (nicht-individuelle) Teilchen dargestellt.

Zu der nicht-symmetrischen Modellierung gelangt man nun, indem man von der Modellierung mittels \mathcal{S}_N übergeht zu der Modellierung in \mathcal{H}_N . Dieser Übergang ist möglich, sofern das auf \mathcal{S}_N operierende Bewegungsgesetz ableitbar ist von einer Schrödingergleichung auf \mathcal{H}_N , die in Bezug auf alle Teilchentausch-Operationen symmetrisch ist. Formal bedeutet dies: Wenn U_t den auf \mathcal{H}_N definierten Operator

$$U_t := e^{-itH/\hbar}$$

bezeichnet, so wird das Bewegungsgesetz auf \mathcal{S}_N durch die Restriktion von U_t auf den Unterraum \mathcal{S}_N dargestellt. Den Modellwechsel von \mathcal{S}_N zu \mathcal{H}_N kann man als "Individualisierung" der Teilchen bezeichnen.

Ist diese Individualisierung erfolgt, so erhält man eine Quantenmechanik, in der jedes physikalische Objekt durch ein Subsystem des Hilbertraums des Universums dargestellt werden kann, und man kann den quantenmechanischen Formalismus in der üblichen Weise hierauf anwenden. In dieser Möglichkeit, Objekte als Subsysteme darzustellen, liegt auch der Sinn der beschriebenen Individualisierung.

Bemerkung: Tritt in der QFT ein "Teilchen" auf, so lässt sich dies nicht ohne weiteres durch ein Subsystem des Hilbertraums beschreiben. Hingegen bildet in der QFT zum Beispiel die Begrenzung eines Feldes auf einen (gegebenenfalls auch sehr kleinen) Raumbereich ein Subsystem.

Bemerkung: In der QFT hat das Universum zur Zeit t und unter einer Bedingung \mathcal{G} einen Quantenzustand. Hieraus ergibt sich in der als Approximation verwendeten Quantenmechanik ebenfalls ein Quantenzustand des Universums sowie der entsprechende Quantenzustand für jedes Subsystem Q . Dieser (im allgemeinen gemischte) Zustand ist nicht zu verwechseln mit der Wellenfunktion, die einem im Quantenfeld auftretenden "Teilchen" zugeordnet werden kann. Bedingte Quantenzustände – als statistische Operatoren auf dem Hilbertraum eines Subsystems – sind Rechengrößen, mit denen Ergebniswahrscheinlichkeiten für Experimente vorhergesagt werden können. Eine Wellenfunktion ist hingegen ein Element des Hilbertraums

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}^3} = \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 < \infty \}$$

das einem "Teilchen", welches in einer Darstellung des Quantenfeldes auftritt, als eine seiner Eigenschaften zukommt.

54. Anmerkungen zu wissenschaftstheoretischen Aspekten

Wir wollen hier einige zusätzliche Anmerkungen formulieren zu bestimmten wissenschaftstheoretischen Aspekten, die für die Quantentheorie von Bedeutung sind. Im einzelnen betreffen diese Anmerkungen die folgenden Themen:

- 1) Logisch minimale, empirisch gleichwertige Theorien
- 2) Verschiedene Begriffe der Möglichkeit
- 3) Der allgemeine Begriff des deterministischen Zustands
- 4) Mikroskopischer Determinismus, initialer Probabilismus und makroskopischer Übergangsprabilismus
- 5) Die Notwendigkeit des Probabilismus als Verstetigung des Begriffs des Möglichen
- 6) Die Rolle der Normierung beim Begriff der Wahrscheinlichkeit
- 7) Der empirische Gehalt probabilistischer Gesetze
- 8) Das Denkbare, das theoretisch Mögliche und das Vorstellbare
- 9) Über die Wahrnehmbarkeit negativer Fakten
- 10) Abstrakte oder anschauliche Ontologie
- 11) Elemente der Theorie und kontingente Fakten
- 12) Die mathematische Methode in der Physik
- 13) Quantentheoretische Gleichungen und Modallogik
- 14) Die Parallelität zwischen Kants Phänomenen und der Welt an sich sowie Poppers Basissätzen und den allgemeinen Gesetzen

1) Logisch minimale, empirisch gleichwertige Theorien

Zu jeder Theorie, die (bei gegebener Modellierung der Eigenschaften des Universums) über ein Axiomensystem $AX \subset \mathcal{A}_0$ definiert ist, kann man eine logisch minimale Theorie angeben, die denselben empirischen Gehalt hat. Dazu sei:

$$AX' := \{ \neg F_{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{M} \text{ und } \neg \diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

Wie man leicht zeigen kann, gilt hierfür die Gleichung:

$$\text{EMP}_{AX'} = \text{EMP}_{AX}$$

Durch das Axiomensystem AX' wird (im Rahmen des gegebenen Modells) die logisch schwächste Theorie angegeben, welche denselben empirischen

Gehalt hat wie AX. Formal bedeutet dies: Für jedes Axiomensystem AX" mit

$$\text{EMP}_{\text{AX}''} = \text{EMP}_{\text{AX}}$$

gilt:

$$\text{LOG}_{\text{AX}'} \subset \text{LOG}_{\text{AX}''}$$

d.h. der logische Gehalt von AX" ist mindestens so groß wie der logische Gehalt von AX'.

Die durch AX' gegebene Theorie erlaubt keinen positiven Schluss der Form

$$E_1 \wedge \dots \wedge E_n \Rightarrow F$$

wobei die E_j ebenso wie F Ereignisse sind. Infolgedessen enthält die durch AX' gegebene Theorie auch kein deterministisches Bewegungsgesetz, da ein solches Gesetz positive Schlüsse der Form

$$\langle A, s \rangle_0 \Rightarrow \langle B, t \rangle_0$$

enthalten müsste.

Sofern also die durch AX gegebene Theorie deterministisch ist (im Sinne eines zeitübergreifenden Zusammenhangs), handelt es sich bei AX' um eine Theorie, die denselben empirischen Gehalt hat wie AX, aber nicht deterministisch ist. Es gibt demnach zu jeder deterministischen eine empirisch äquivalente nicht deterministische Theorie. Anders formuliert: Die Annahme eines zeitübergreifenden Determinismus hat keinen empirischen Gehalt.

2) Verschiedene Begriffe der Möglichkeit

In der Modallogik wird der Begriff der Möglichkeit, dargestellt durch das Symbol \Diamond , meist so behandelt, als wenn es nur eine Art von Möglichkeit gäbe. Für die praktische Anwendung dieses Begriffs ist es jedoch notwendig, verschiedene Arten von Möglichkeit zu unterscheiden. So ist es zum Beispiel logisch möglich, dass $2 + 3 = 7$ ist, da die Gleichung $2 + 3 = 5$ nicht allein aus den Gesetzen der Logik folgt. Mathematisch ist die genannte Gleichung jedoch nicht möglich. Formal gelten somit die Aussagen:

$$\Diamond_{\text{Logik}}(2 + 3 = 7)$$

und

$$\neg \Diamond_{\text{Math}}(2 + 3 = 7)$$

Ebenso ist das, was physikalisch unmöglich ist, nicht notwendigerweise auch mathematisch oder logisch unmöglich. Betrachten wir zum Beispiel ein Buch, dass auf einem Tisch liegt. Es ist dann vielleicht physikalisch unmöglich, dass

dieses Buch plötzlich (und ohne weiteren Anlass) um einen Meter nach oben springt, aber dies folgt nicht aus den Gesetzen der Logik oder der Mathematik allein. Wir haben somit die Aussagen:

$$\begin{aligned} & \diamond_{\text{Logik}}(\text{Buch springt}) \\ & \diamond_{\text{Math}}(\text{Buch springt}) \\ & \neg \diamond_{\text{Physik}}(\text{Buch springt}) \end{aligned}$$

Wenn wir das Konzept der bedingten Möglichkeit einführen, etwa durch

$$\diamond(A \mid B) :\Leftrightarrow \diamond(A \wedge B)$$

so können wir die Beziehungen zwischen den verschiedenen Möglichkeitsoperatoren folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \diamond_{\text{Math}}(A) & \Leftrightarrow \diamond_{\text{Logik}}(A \mid \text{Gesetze der Mathematik}) \\ \diamond_{\text{Physik}}(A) & \Leftrightarrow \diamond_{\text{Math}}(A \mid \text{Gesetze der Physik}) \\ & \Leftrightarrow \diamond_{\text{Logik}}(A \mid \text{Gesetze der Physik und der Mathematik}) \end{aligned}$$

In einer ähnlichen Weise müssen wir unterscheiden zwischen den in einem gegebenen Modell möglichen Fakten und den Fakten, die darüber hinaus auch physikalisch möglich sind in Bezug auf ein bestimmtes Axiomensystem AX . In diesem Sinne können wir mit den früher eingeführten Begriffen Ω_0 und \mathcal{A}_0 definieren:

$$\begin{aligned} \diamond_{\text{Modell}}(A) & :\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_0 \\ \diamond_{\text{Logik}}(A) & :\Leftrightarrow A \neq \emptyset \quad (\text{für alle } A \subset \Omega_0) \\ \diamond_{AX}(A) & :\Leftrightarrow \diamond_{\text{Logik}}(A \mid \Omega) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_0 \text{ und } AX \subset \mathcal{A}_0) \end{aligned}$$

Dabei entspricht

$$\begin{aligned} \Omega & = \bigcap (AX) \\ & = \bigcap_{B \in AX} B \\ & = \forall_{B \in AX} B \end{aligned}$$

der Aussage, dass alle Axiome aus AX erfüllt sind.

Bemerkung: Wir müssen hier den Operator \diamond_{Logik} für alle Mengen $A \subset \Omega_0$ definieren, da Ω kein Element von \mathcal{A}_0 sein muss.

Der Sinn eines physikalischen Axiomensystems AX besteht darin, eine bestimmte Teilmenge der im Modell möglichen Fakten als physikalisch unmöglich zu charakterisieren. In ähnlicher Weise beschreibt ein probabilistisches

Gesetz (angegeben durch eine Familie gradueller Möglichkeitsoperatoren \diamond_{ε} , die z.B. durch ein äußeres Maß definiert werden können), dass bestimmte im Modell mögliche Fakten sehr unwahrscheinlich sind.

3) Der allgemeine Begriff des deterministischen Zustands

Wir haben sowohl für die klassische Mechanik als auch für den Fall der Quantentheorie einen deterministischen Zustand definiert. Dieser Begriff kann grundsätzlich für jede beliebige Theorie (im Rahmen unseres allgemeinen Modells für ontologisch realistische physikalische Theorien mit klassischer Zeit) eingeführt werden. Ein deterministischer Zustand ist dabei eine Abbildung

$$z : \mathcal{U} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

die jeder Eigenschaft einen Wahrheitswert zuordnet. Charakteristisch für einen solchen Zustand ist, dass durch ihn alle Eigenschaften eines Systems determiniert sind.

Wenn wir die Menge dieser Abbildungen definieren als

$$Z_0 := \{ z \mid z : \mathcal{U} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\} \}$$

dann ist der Zustandsraum Z eine bestimmte Teilmenge von Z_0 . Im Falle der klassischen Mechanik ist Z die Teilmenge derjenigen Elemente von Z_0 , die dem Monotonieprinzip, dem Ausschlussprinzip sowie dem physikalischen "tertium non datur" entsprechen. Dieser Zustandsraum Z lässt sich mit dem Phasenraum \mathbb{R}^{6N} identifizieren. Im Falle der Quantentheorie ist Z die Menge der Elemente von Z_0 , die dem Monotonieprinzip und dem Ausschlussprinzip genügen. In beiden Fällen sind durch einen deterministischen Zustand $z \in Z$ alle Eigenschaften des Universums festgelegt.

Ein möglicher Weltablauf entspricht nun einem Pfad

$$p : T \rightarrow Z$$

im Zustandsraum, der dem jeweiligen Bewegungsgesetz genügt. D.h.: Wie im klassischen Fall, so kann auch in der Quantentheorie die Menge Ω der physikalisch möglichen Weltabläufe identifiziert werden mit der Menge aller Pfade im deterministischen Zustandsraum, für die das Bewegungsgesetz gilt.

Im Falle der Quantentheorie kann man ferner – wie auch in der klassischen Mechanik – jede Eigenschaft $A \in \mathcal{U}$ identifizieren mit

$$A' := \{ z \in Z \mid z(A) = \text{wahr} \}$$

und definieren:

$$\mathcal{U}' := \{ A' \mid A \in \mathcal{U} \}$$

Damit wird jede Eigenschaft des Universums dargestellt als Teilmenge des (deterministischen) Zustandsraumes.

Wie wir gesehen haben, ist die Menge der Eigenschaften des Universums im Fall der klassischen Physik darzustellen als Teilmenge der Potenzmenge des Phasenraumes:

$$\mathcal{U} \subset \wp(\mathbb{R}^{6N})$$

Konkret wird \mathcal{U} definiert als die Borelalgebra auf \mathbb{R}^{6N} .

Durch die Identifizierung jedes $A \in \mathcal{U}$ mit $A' \in \mathcal{U}'$ erhalten wir eine analoge Festlegung der Menge der Eigenschaften des Universums auch für den Fall der Quantentheorie. Auch für sie lässt sich (anstelle des Phasenraumes) ein deterministischer Zustandsraum Z einführen. Eine Eigenschaft des Universums, die zunächst einem Unterraum $A < \mathcal{H}$ entspricht, kann dann modelliert werden durch A' , also durch eine Teilmenge von Z . Somit entspricht die Menge der Eigenschaften des Universums – im Falle der Quantentheorie ebenso wie im Falle der klassischen Physik – einer bestimmten Teilmenge \mathcal{U}' der Potenzmenge des deterministischen Zustandsraumes:

$$\mathcal{U}' \subset \wp(Z)$$

Auch für ein Teilsystem Q des Universums kann ein deterministischer Zustand definiert werden als eine Abbildung, die jeder Eigenschaft von Q einen Wahrheitswert zuordnet. Im Falle der Quantentheorie ist jede solche Eigenschaft gegeben durch einen Unterraum des Hilbertraums von Q , während in der klassischen Mechanik jede Eigenschaft einer Teilmenge des Phasenraums des Teilsystems Q entspricht.

Ein Punkt im deterministischen Zustandsraum eines Teilsystems stellt eine vollständige Beschreibung dieses Systems dar. Dies gilt insbesondere auch für Quantensysteme. Im Gegensatz dazu handelt es sich bei einem Quantenzustand, d.h. bei einem probabilistischen Zustand des Systems, nicht um eine vollständige Beschreibung, und zwar auch dann nicht, wenn ein reiner Zustand vorliegt. Im Falle der klassischen Theorie hingegen entspricht ein reiner probabilistischer Zustand einer auf einen Punkt im Phasenraum entarteten Dichtefunktion und somit einem deterministischen Zustand, der das System vollständig beschreibt.

Für die deterministischen Zustände eines echten Teilsystems Q des Universums wird in der Regel niemals ein deterministisches Bewegungsgesetz in präziser Weise gelten. Daher legt der deterministische Zustand eines solchen Teilsystems auch niemals den Zustand desselben Systems zu einem späteren Zeitpunkt eindeutig fest.

Für die Quantentheorie gilt jedoch folgendes: Es sei Q ein Quantensystem und es seien Voraussetzungen gegeben, unter denen die Rückwirkung von Q

auf den Rest der Welt vernachlässigt werden kann. Der bedingte Quantenzustand von Q bezüglich dieser Voraussetzungen bewegt sich dann nach einer Schrödingergleichung (vgl. Kapitel 38). Die genannten Voraussetzungen werden beschrieben durch eine endliche Folge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ von Ereignissen, die wir mit der Initialbedingung zu der Grundbedingung

$$G := \bigvee_j \langle E_j, t_j \rangle \wedge \langle UR \rangle$$

zusammenfassen können. Wir setzen voraus, dass diese Ereignisse von jedem Zeitpunkt τ im Intervall $[s, t] \subset T$ aus empirisch zugänglich sind und dass die hierzu erforderlichen Dokumente nur Eigenschaften von Q^- (dem Rest der Welt) betreffen.

Für jedes $A < \mathcal{H}_Q$ und $t \in T$ bezeichne

$$\langle A, t \rangle_Q := \langle \alpha_Q(A), t \rangle$$

das Ereignis, dass Q zur Zeit t die Eigenschaft A hat. Es sei nun eine Eigenschaft $A < \mathcal{H}_Q$ gegeben. Mit dem Hamiltonoperator H_Q für das System Q definieren wir wie in Kapitel 38

$$U_{Q; \tau} := e^{-i\tau H_Q / \hbar} \quad (\text{für alle } \tau \in \mathbb{R})$$

und setzen

$$B := U_{Q; t-s} A$$

Wenn nun

$$N := \langle B, t \rangle_Q \vee \langle B^\perp, t \rangle_Q$$

das kontingente physikalische "tertium non datur" für das Ereignis (B, t) bezeichnet, so gilt für den Notwendigkeitsgrad ν , d.h. für den Grad der Wahrscheinlichkeit:

$$\nu(\langle B, t \rangle_Q \mid \langle A, s \rangle_Q \wedge G \wedge N) \approx 1$$

In diesem Sinne legen die Eigenschaften zur Zeit s die Eigenschaften zur Zeit t mit hoher Wahrscheinlichkeit fest. Mit anderen Worten: Der deterministische Zustand zur Zeit s bestimmt näherungsweise den Zustand zur Zeit t . Als praktisches Beispiel denke man etwa an die Spineigenschaften eines Elektrons, das sich auf dem Weg zwischen zwei Filtersystemen befindet.

Ganz ähnliche Überlegungen gelten im klassischen Fall, wenn man die Unterräume des Hilbertraums durch Teilmengen des Phasenraums, das Tensorprodukt (bei der Definition von α_Q) durch das kartesische Produkt und die Schrödingergleichung durch das klassische Bewegungsgesetz ersetzt.

Bemerkung: Statt einen Zustand z als Abbildung von \mathcal{U} in die Menge der Wahrheitswerte $\{\text{wahr, falsch}\}$ aufzufassen, können wir z auch als Menge der

tatsächlich vorhandenen Eigenschaften ansehen, d.h. als Teilmenge von \mathcal{U} . Es wäre dann $Z_0 = \wp(\mathcal{U})$ und $Z \subset Z_0$, analog zu der Definition $\Omega_0 := \wp(\mathcal{E})$ und der Beziehung $\Omega \subset \Omega_0$.

Bemerkung: Monotonie- und Durchschnittsprinzip können auf Z_0 formal eingeführt werden mittels

$$\text{MON}_0 := \left\{ \left\{ z \in Z_0 \mid z(A) = \text{wahr} \Rightarrow z(B) = \text{wahr} \right\} \mid A, B \in \mathcal{U} \right. \\ \left. \wedge A \subset B \right\}$$

und

$$\text{SEC}_0 := \left\{ \left\{ z \in Z_0 \mid \neg \forall_j (z(A_j) = \text{wahr}) \right\} \mid A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U} \wedge \perp_j A_j \right\}$$

Ähnlich erhält man für das physikalische "tertium non datur" im Falle der klassischen Mechanik

$$\text{NEG}_0 := \left\{ \left\{ z \in Z_0 \mid z(A) = \text{wahr} \vee z(A^-) = \text{wahr} \right\} \mid A \in \mathcal{U} \right\}$$

wobei A^- das Mengenkompiment $\mathbb{R}^{6N} \setminus A$ bezeichnet. Mit

$$\text{AX}_0 := \text{MON}_0 \cup \text{SEC}_0$$

für die Quantentheorie bzw.

$$\text{AX}_0 := \text{MON}_0 \cup \text{SEC}_0 \cup \text{NEG}_0$$

für die klassische Mechanik erhalten wir dann, analog zu den Beziehungen $\text{AX} \subset \wp(\Omega_0)$ und $\Omega := \bigcap(\text{AX})$, die Aussage

$$\text{AX}_0 \subset \wp(Z_0)$$

sowie die Definition

$$Z := \bigcap(\text{AX}_0)$$

Die Menge AX_0 entspricht jenen deterministischen Axiomen der Theorie, die sich nur auf jeden einzelnen Zeitpunkt beziehen, z.B. auf den Zeitpunkt 0.

In diesem Sinne können wir die Axiome MON, SEC und NEG allgemein als "Zustandsaxiome" bezeichnen, in Abgrenzung zum Bewegungsgesetz (BG bzw. SG). Zustandsaxiome verknüpfen die Eigenschaften des Universums miteinander unabhängig von der Zeit, während ein Bewegungsgesetz einen Zusammenhang über verschiedene Zeitpunkte herstellt.

4) Mikroskopischer Determinismus, initialer Probabilismus und makroskopischer Übergangprobabilismus

Sowohl im Falle der klassischen Mechanik als auch in der Quantentheorie haben wir ein deterministisches Bewegungsgesetz auf der mikroskopischen

Ebene, d.h. auf der Ebene einer vollständigen Beschreibung des Universums durch alle seine möglichen (binären) Eigenschaften. Außerdem haben wir ein probabilistisches Gesetz auf der Menge der möglichen Weltabläufe, d.h. auf der Menge der möglichen Pfade im deterministischen Zustandsraum. Aufgrund des Bewegungsgesetzes ist dies gleichwertig mit einem probabilistischen Gesetz auf der Menge der möglichen (deterministischen) Zustände zu einem bestimmten Zeitpunkt, etwa zum Zeitpunkt Null. Ein solches Gesetz kann als initiales probabilistisches Gesetz bezeichnet werden.

In beiden Fällen ergeben sich aus dem Determinismus der Bewegung zusammen mit dem initialen Probabilismus Übergangs-Wahrscheinlichkeiten auf der makroskopischen Ebene, d.h. auf der Ebene einer unvollständigen und groben Betrachtung des Universums. Im Falle der klassischen Theorie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem Ereignis $\langle B, s \rangle$ zu einem späteren Ereignis $\langle A, t \rangle$ in einfacher Weise gegeben durch:

$$P(\langle A, t \rangle | \langle B, s \rangle) = \lambda((\beta_t)^{-1}A \cap (\beta_s)^{-1}B) / \lambda((\beta_s)^{-1}B)$$

Im Falle der Quantentheorie haben wir zwar keine solche einfache Formel, es gilt jedoch grundsätzlich dasselbe: Aus dem mikroskopischen Determinismus zusammen mit dem initialen Probabilismus ergibt sich ein makroskopischer Übergangs-Probabilismus.

In beiden Fällen lassen sich damit zufällige Prozesse beschreiben, etwa Würfelexperimente oder Prozesse der Entropiezunahme. Beispielsweise lässt sich so die Tatsache verstehen, dass kaltes und heißes Wasser, wenn man es vermischt, lauwarmes Wasser ergibt, dass dieser Prozess aber nicht in der umgekehrten Richtung abläuft: Eine spontane Entmischung wäre hier extrem unwahrscheinlich.

Wenn wir z.B. im Falle der klassischen Mechanik mit LAU die Menge derjenigen Konstellationen im Phasenraum bezeichnen, die dem Vorhandensein von lauwarmem Wasser entsprechen, wenn analog H+K für "heißes und kaltes Wasser" steht und RB die Randbedingungen, d.h. die sonstigen Bedingungen der gegebenen Situation bezeichnet (einschließlich der Initialbedingung), so gelten für die Zeitpunkte $s < t$ die Beziehungen:

$$\begin{aligned} P(\langle H+K, t \rangle | \langle LAU, s \rangle \wedge RB) &\approx 0 \\ P(\langle LAU, t \rangle | \langle H+K, s \rangle \wedge RB) &\approx 1 \end{aligned}$$

Dies ergibt sich im wesentlichen daraus, dass es viel mehr Konstellationen im Phasenraum gibt, die dem Vorhandensein von lauwarmem Wasser entsprechen, als Konstellationen, bei denen heißes und kaltes Wasser vorhanden ist.

Zusammenfassend können wir feststellen: Sowohl im Falle der klassischen Theorie als auch in der Quantentheorie ergibt sich aus dem mikroskopischen Determinismus und dem initialen Probabilismus ein Übergangs-Probabilismus für makroskopische Eigenschaften.

Bemerkung: Die zu der Gleichung

$$P(\langle A, t \rangle \mid \langle B, s \rangle) = \lambda(\langle \beta_t \rangle^{-1} A \cap \langle \beta_s \rangle^{-1} B) / \lambda(\langle \beta_s \rangle^{-1} B)$$

analoge Aussage für den Fall der Quantentheorie lautet:

$$\mu(\langle A, t \rangle \mid \langle B, s \rangle) = \mu^0(\langle U_{-t} A \rangle \wedge \langle U_{-s} B \rangle) / \mu^0(\langle U_{-s} B \rangle)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_0)^0 &:= \{ \langle A, 0 \rangle_0 \mid A \in \mathcal{U} \} \\ &\subset \mathcal{R}_0 \end{aligned}$$

die Menge der möglichen Ereignisse zum Zeitpunkt 0,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_0)^0 &:= \mathcal{A}((\mathcal{R}_0)^0) \\ &\subset \mathcal{A}_0 \end{aligned}$$

die von $(\mathcal{R}_0)^0$ erzeugte σ -Algebra auf Ω_0 , d.h. die Menge der möglichen Fakten, die sich nur auf den Zeitpunkt 0 beziehen,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0 &:= \{ F \cap \Omega \mid F \in (\mathcal{A}_0)^0 \} \\ &\subset \mathcal{A} \end{aligned}$$

die Spuralgebra von $(\mathcal{A}_0)^0$ auf Ω sowie

$$\mu^0 := \mu|_{\mathcal{A}^0}$$

die Beschränkung von μ auf \mathcal{A}^0 . Das äußere Maß μ^0 beschreibt das initiale probabilistische Gesetz der Quantentheorie.

Bemerkung: Das Lebesguemaß λ ist symmetrisch bezüglich Translationen und Drehungen des räumlichen Koordinatensystems. Nach dem Liouville'schen Satz ist es auch invariant gegenüber Verschiebungen der Zeitachse. Aus diesem Grund lässt sich das initiale probabilistische Gesetz in sinnvoller Weise zugleich als Verteilung auf der Menge der Pfade im Phasenraum auffassen. Ähnliches gilt für das äußere Maß μ im Falle der Quantentheorie. Da der Ausdruck

$$\delta(A, B) := (\text{tr } \pi_A \pi_{B^\perp} \pi_A)^{1/2} \quad (\text{für } A, B < \mathcal{H})$$

invariant ist gegenüber unitären Transformationen des Hilbertraums und da jede räumliche Translation oder Drehung einer solchen unitären Transformation entspricht, ist auch μ symmetrisch in Bezug auf räumliche Koordinatentransformationen. Außerdem ist μ invariant gegenüber Verschiebungen der Zeitachse, so dass man auch hier das initiale probabilistische Gesetz sinnvollerweise als Verteilung auf der Menge der möglichen Weltabläufe (d.h. auf der Menge der Pfade im deterministischen Zustandsraum) auffassen kann.

5) Die Notwendigkeit des Probabilismus als Verstetigung des Begriffs des Möglichen

Die Begriffe "Wahr" und "Falsch" gehören zu den grundlegenden Konzepten, mit denen Aussagen bewertet werden können. In konkreten Fällen wissen wir aber oft nicht, ob eine gegebene Aussage wahr oder falsch ist. Mitunter wird daher die Ansicht vertreten, man brauche für diesen Fall etwas, das zwischen Wahr und Falsch liegt, und dies sei das Konzept der Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeit wäre demnach eine graduelle Form der Wahrheit. Wird sie im Kolmogoroff'schen Sinne als P dargestellt, so könnte man versuchen, hierfür symbolisch zu schreiben:

$$(*) \quad \text{Falsch} \leq P \leq \text{Wahr}$$

Es handelt sich hierbei allerdings um eine irrige Auffassung. Das Konzept einer "gradueller Wahrheit" steht im Widerspruch zu den Grundsätzen der Logik. Insbesondere ist die Aussage (*) nicht vereinbar mit der Tatsache, dass es sich bei der "Wahrscheinlichkeit" um einen modalen, d.h. um einen nicht extensionalen Begriff handelt.

Bemerkung: So wie die modalen Operatoren \diamond und \square aufgefasst werden können als Abbildungen von \mathcal{A}_0 in die Menge der beiden Wahrheitswerte $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$, so können wir auch die Operationen Wahr und Falsch verstehen als Abbildungen

$$\text{Wahr} : \mathcal{A}_0 \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

und

$$\text{Falsch} : \mathcal{A}_0 \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

Im Gegensatz zu \diamond und \square sind diese beiden Operationen jedoch extensional, da ihr Wert nur vom Wahrheitswert der jeweiligen Aussage im wahren Weltablauf ω_0 abhängt. Insbesondere gilt

$$\text{Wahr}(A) = \text{wahr} \Leftrightarrow \omega_0 \in A$$

$$\text{Falsch}(A) = \text{wahr} \Leftrightarrow \omega_0 \notin A$$

für alle $A \in \mathcal{A}_0$.

Tatsächlich steht "Wahrscheinlichkeit" für eine Form gradueller Notwendigkeit, d.h. sie liegt zwischen den Begriffen "Möglichkeit" und "Notwendigkeit". Die symbolische Aussage müsste daher eher lauten:

$$\diamond \leq P \leq \square$$

Wenn wir jedoch die Konzepte der Wahrscheinlichkeit, der Unwahrscheinlichkeit und der Häufigkeit in sinnvoller Weise voneinander unterscheiden, müssen

wir symbolisch schreiben:

$$(**) \quad \diamond \leq \mu \leq \nu \leq \square$$

Das Symbol " \leq " soll hier einen zunehmenden "Aussagewert" eines Elements $A \in \mathcal{A}_0$ darstellen. $\diamond(A)$ besagt nur, dass A überhaupt möglich ist. $\mu(A) > \varepsilon$ besagt zusätzlich, dass die Möglichkeit einen gewissen Grad hat usw. Die symbolische Formulierung (***) entspricht der formalen Implikation

$$\square(A) \Rightarrow \nu(A) > 1 - \varepsilon \Rightarrow \mu(A) > \varepsilon \Rightarrow \diamond(A)$$

wobei ε eine kleine positive Zahl ist. Wenn μ ein Möglichkeitsmaß ist, so lässt sich diese Implikation für jedes $A \in \mathcal{A}_0$ und für $0 < \varepsilon < 1/2$ formal beweisen.

Wie wir gesehen haben, tritt das Konzept des Wahrscheinlichen sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Quantentheorie auf, und es gibt in beiden Fällen ein Wahrscheinlichkeitsgesetz. Der hierzu eingeführte Begriff der Wahrscheinlichkeit (bzw. der Unwahrscheinlichkeit) stellt eine Verstärkung des Konzeptes der Notwendigkeit (bzw. der Unmöglichkeit) dar. Er operiert auf einem Kontinuum möglicher Ereignisse.

Voraussetzung hierfür ist, dass der Theorie ein kontinuierliches Modell zugrunde liegt. So ist in der klassischen Mechanik nicht nur der Phasenraum Z ein Kontinuum, sondern auch die Menge \mathcal{U} der Borel'schen Teilmengen von Z . Mit

$$\delta(A, B) := \lambda(A \Delta B) \quad (\text{für } A, B \in \mathcal{U})$$

kann eine passende (Pseudo-) Metrik auf \mathcal{U} definiert werden. In der Quantentheorie ist zunächst der Hilbertraum \mathcal{H} ein Kontinuum, sodann aber auch die Menge \mathcal{U} der abgeschlossenen linearen Unterräume von \mathcal{H} . Die Metrik hierzu ist definierbar als

$$\delta(A, B) := |\pi_A - \pi_B|$$

wobei die in Kapitel 23 definierte euklidische Norm verwendet wird. In beiden Fällen lassen wir zu, dass die Metrik auch den Wert "unendlich" annehmen kann.

Dass die Menge \mathcal{U} ein Kontinuum ist, können wir beschreiben mit der Aussage:

$$\forall_{A \in \mathcal{U}} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{B \in \mathcal{U}} [B \neq A \text{ und } \delta(A, B) < \varepsilon]$$

Da die Menge der Zeitpunkte ebenfalls ein metrischer Raum ist, erhalten wir auch eine Metrik auf dem kartesischen Produkt

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \times T$$

und auch \mathcal{E} wird damit zu einem Kontinuum. Dies gilt selbst dann, wenn wir T auf eine diskrete Menge von Zeitpunkten beschränken; es kommt hier also nicht darauf an, dass T selbst ein Kontinuum ist.

Wir betrachten nun die Menge aller n -Tupel von Ereignissen

$$((A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n)) \in \mathcal{E}^n$$

Es ist dann \mathcal{E}^n die Menge der empirischen Materialien vom Umfang n . Auch diese Menge ist ein Kontinuum, z.B. bezüglich der auf dem Produktraum erzeugten Summenmetrik. In \mathcal{E}^n können wir die Teilmenge jener n -Tupel der genannten Form bilden, für die gilt:

$$(***) \quad \neg \Diamond (\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o)$$

Dies sind jene empirischen Materialien vom Umfang n , die im Widerspruch zur Theorie stehen. Ihre Vereinigungsmenge entspricht dem empirischen Gehalt der Theorie.

Bemerkung: Wir identifizieren hier die empirischen Materialien nicht mit endlichen Mengen, sondern mit endlichen Folgen von Ereignissen. Für das Konzept des empirischen Gehalts von Theorien ist diese Unterscheidung ohne Bedeutung.

In dem Kontinuum \mathcal{E}^n kann es nun zwei mögliche empirische Materialien

$$\mathbf{A} = ((A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n)) \in \mathcal{E}^n$$

und

$$\mathbf{B} = ((B_1, t_1), \dots, (B_n, t_n)) \in \mathcal{E}^n$$

geben, welche sich nur geringfügig voneinander unterscheiden, wobei die Aussage (***) für \mathbf{A} gilt und für \mathbf{B} nicht. Die Aussage (***) geht also in ihr Gegenteil über, wenn die A_j geringfügig in passender Weise abgeändert werden.

Würden wir das Material \mathbf{A} beobachten, so stünde dieser empirische Befund im Widerspruch zur Theorie, die damit empirisch widerlegt wäre. Hätten wir jedoch nur das sehr ähnliche empirische Material \mathbf{B} beobachtet, so wäre dies nicht der Fall.

Da unsere empirischen Beobachtungen immer nur grob sind und eine endliche Genauigkeit haben, können wir uns in diesem Fall nicht sicher sein, ob aufgrund unserer Beobachtungen tatsächlich das empirische Material \mathbf{A} gegeben ist oder nur das Material \mathbf{B} . Davon aber hängt es ab, ob die Theorie widerlegt ist oder nicht. Die Folge hiervon wäre, dass die Theorie letztlich keinen ausreichenden empirischen Gehalt hat.

Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Einführung eines probabilistischen Gesetzes sowohl für die klassische Mechanik als auch für die Quantentheorie

notwendig ist um sicherzustellen, dass die Theorie einen ausreichenden empirischen Gehalt hat. Wir betrachten hierzu ein Beispiel, das wir zunächst im Rahmen der klassischen Theorie diskutieren.

Beispiel: Man betrachte eine Tasse, die auf einem Tisch steht. Können wir nun vorhersagen, dass diese Tasse nicht plötzlich und ohne weiteren Anlass um einen Meter nach oben springt? Da unsere Vorkenntnisse, die wir durch empirische Beobachtung der Welt gewonnen haben, uns nur ein grobes Wissen über das Universum geben, können wir uns nicht sicher sein. Wir wissen zwar, dass hier ein Tisch und darauf eine Tasse vorhanden ist, aber nicht, wo sich – im Sinne der klassischen Theorie – jedes einzelne Molekül befindet und welchen Impuls es hat. So können wir nicht ausschließen, dass es einen Pfad im Phasenraum des Universums gibt, der mit dem, was wir wissen, vereinbar ist und bei dem die thermische Bewegung gerade so verläuft, dass die Tasse die für ihren Sprung nach oben erforderliche Energie erhält. (Der umgekehrte Prozess, bei dem die Tasse herunterfällt und ihre Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird, ist ja auch jederzeit möglich.) Wir können also nicht ausschließen, dass die Tasse plötzlich nach oben springt, in voller Übereinstimmung mit dem deterministischen Bewegungsgesetz. Zwar könnten wir sagen, dass dies sehr unwahrscheinlich ist, aber in einer rein deterministischen Theorie steht uns kein Wahrscheinlichkeitsgesetz zur Verfügung, das diese Aussage begründen könnte.

Das Beispiel lässt sich formal wie folgt darstellen: Es seien

$$(B_1, t_1), \dots, (B_n, t_n)$$

die Voraussetzungen des "Experiments". Sie beschreiben das Vorhandensein des Tisches, der darauf ruhenden Tasse usw. Das Ereignis (A, t) beschreibe das mögliche Faktum, dass sich die Tasse zu dem (späteren) Zeitpunkt t einen Meter oberhalb der Tischplatte befindet.

Es ist dann

$$\mathbf{B} = ((B_1, t_1), \dots, (B_n, t_n), (A, t)) \in \mathcal{E}^{n+1}$$

ein empirisches Material, das aus makroskopischen Ereignissen besteht, die zu verschiedenen Zeiten stattfinden. Es gibt nun eine (kleine) Menge M von Pfaden im Phasenraum, die dem Bewegungsgesetz genügen und die, dargestellt als Elemente von Ω_0 , zu \mathbf{B} und somit zu allen $\langle B_j, t_j \rangle_0$ sowie zu $\langle A, t \rangle_0$ gehören. Das empirische Material \mathbf{B} ist demnach nicht unmöglich, sondern allenfalls sehr unwahrscheinlich.

Würden wir nun eines der B_j geringfügig abändern, so dass die Pfade aus der Menge M nicht mehr zu $\langle B_j, t_j \rangle_0$ gehören, so erhielten wir ein sehr ähnliches Material \mathbf{A} , welches der Bedingung (***) genügt und somit unmöglich ist, und zwar allein aufgrund der deterministischen Axiome der Theorie.

Wenn wir nun das Hochspringen der Tasse tatsächlich beobachtet hätten, so könnten wir aus unserer makroskopischen Perspektive nicht erkennen, ob das Material **A** oder nur **B** gegeben ist. Wir wüssten also nicht, ob die Theorie in diesem Fall widerlegt wäre oder nicht. Insofern hat die Theorie – ohne das probabilistische Gesetz – nicht den erforderlichen empirischen Gehalt, denn wir erwarten von ihr, dass sie uns die (ziemlich selbstverständliche) Vorhersage liefert, dass die Tasse nicht hochspringen wird.

Die Tatsache, dass es in dem beschriebenen Beispiel zu einem möglichen empirischen Material **B** ein weiteres, aber unmögliches Material **A** gibt, welches (auf der mikroskopischen Ebene) von dem ersteren verschieden ist, sich jedoch aus einer makroskopischen Perspektive nicht von ihm unterscheiden lässt, beruht auf der Vielzahl der inneren (mikroskopischen) Freiheitsgrade des betrachteten Systems und auf dem chaotischen Charakter des Bewegungsgesetzes. Selbst kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen können hier ausreichen, um zu völlig anderen Ergebnissen zu gelangen.

Diese Überlegungen zeigen, dass die klassische Theorie, wenn sie einen ausreichenden empirischen Gehalt haben soll, in jedem Fall einen Wahrscheinlichkeitsbegriff benötigt. Insbesondere benötigt sie das Konzept der Unwahrscheinlichkeit, das durch ein äußeres Maß μ (in diesem Fall durch $\mu := \lambda$) ausgedrückt werden kann. Unwahrscheinlichkeit, definiert auf einem Kontinuum möglicher Fakten, stellt hier eine stetige Erweiterung des Konzepts der Unmöglichkeit dar.

Eine solche stetige Erweiterung des Konzepts der Unmöglichkeit ist notwendig, da der Theorie ein kontinuierliches Modell zugrunde liegt, in dem bestimmte empirische Materialien aus einer makroskopischen Perspektive nicht von benachbarten Materialien unterschieden werden können, und da wegen der Chaotik des Bewegungsgesetzes kleine Änderungen der Anfangsbedingungen zu sehr verschiedenen Konsequenzen führen können.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für den Fall der Quantentheorie anstellen. Wenn wir das beschriebene Experiment beobachten wollen, müssen wir in diesem Fall annehmen, dass die betroffenen Ereignisse zu einer t' -zugänglichen Folge gehören. Unter der Initialbedingung UR sind diese Ereignisse dann dokumentiert durch das Vorliegen vertauschbarer Eigenschaften zum Zeitpunkt t' .

Die Theorie, ohne ihr probabilistisches Gesetz, kann ausgedrückt werden mittels des Möglichkeitsoperators \diamond^* , der durch

$$\diamond^*(F) :\Leftrightarrow \mu(F \cap \Omega) > 0 \quad (\text{für alle } F \in \mathcal{A}_0)$$

gegeben ist.

Wegen der empirischen Zugänglichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Diamond^*(\langle A, t \rangle_o \mid \forall_j \langle B_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR, 0 \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \Diamond^*(\langle A, t \rangle_o \wedge \forall_j \langle B_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR, 0 \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \mu(\langle A, t \rangle \wedge \forall_j \langle B_j, t_j \rangle \wedge \langle UR, 0 \rangle) > 0 \\ & \Leftrightarrow \text{tr } \pi_A W_t > 0 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} C_j & := U_{-t_j} B_j \quad (\text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}) \\ L & := \pi_{C_n} \dots \pi_{C_1} \pi_{UR} \end{aligned}$$

sowie

$$W_t := U_t L L^* (U_t)^{-1}$$

Wenn die Theorie – ohne ihr probabilistisches Gesetz – vorhersagen soll, dass die Tasse nicht in die Höhe springen wird, so muss also gelten:

$$\text{tr } \pi_A W_t = 0$$

Ändert man nun die Eigenschaften B_j nur geringfügig ab, so geht diese Aussage über in:

$$\text{tr } \pi_A W_t > 0$$

Der Sprung der Tasse wäre dann möglich.

Da es aus makroskopischer Perspektive nicht möglich ist, die Ereignisse $\langle B_j, t_j \rangle$ von den abgeänderten zu unterscheiden, kann man auch hier nicht sicher erkennen, ob das empirische Material im Widerspruch zu der auf die deterministischen Gesetze reduzierten Theorie steht. Ohne das probabilistische Gesetz hat die Theorie auch in diesem Fall keinen ausreichenden empirischen Gehalt.

Anmerkung

Es wird häufig ein Zusammenhang hergestellt zwischen der Existenz probabilistischer Gesetze in der Physik und der Frage der "Offenheit" der Zukunft. Es scheint sich so zu verhalten: Hätte man ein deterministisches Bewegungsgesetz und nicht nur ein probabilistisches, so wäre die Zukunft nicht "offen", sondern durch die Gesamtheit der gegenwärtigen und der in der Vergangenheit liegenden Fakten bereits festgelegt.

Diese Auffassung ist allerdings nicht aufrechtzuerhalten. In der Gültigkeit eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes liegt nicht der Grund dafür, dass die Zukunft "offen" ist, etwa im Gegensatz zu einer "faktischen" Vergangenheit.

Auch wenn es ein deterministisches Bewegungsgesetz gibt, so ist die Zukunft "offen", und zwar aus folgenden Gründen:

- Die Menge Ω_0 beinhaltet unendlich viele (im Modell mögliche) Weltabläufe.
- Die Teilmenge $\Omega = \Omega_{AX}$ schränkt dies zwar ein, sie enthält aber immer noch unendlich viele Möglichkeiten. Dabei ist in dem Axiomensystem AX auch das deterministische Bewegungsgesetz enthalten.
- Das empirische Wissen ist stets unvollständig. Es gibt für ein Subjekt mit einem solchen Wissen immer noch unendlich viele mögliche Weiterentwicklungen des Geschehens. Das Vorhandensein eines deterministischen Gesetzes (auf der mikroskopischen Ebene) ändert daran nichts.

Durch die Einführung des Konzepts der Unwahrscheinlichkeit werden die Möglichkeiten zusätzlich eingeschränkt; darin liegt die Rolle des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Durch ihn wird die "Offenheit" der Zukunft also nicht erst eingeführt, durch ihn ist die Zukunft vielmehr "weniger offen".

Im übrigen ist es auch falsch zu sagen, die Zukunft sei "prinzipiell offen". Offen ist sie nur für Subjekte mit eingeschränktem Wissen, nicht aber für den Laplace'schen Dämon. Umgekehrt gilt dasselbe aber auch für die Vergangenheit. Sie ist ebensowenig "faktisch" (außer für den Laplace'schen Dämon), da wir hierüber auch nur ein eingeschränktes Wissen haben und haben können.

Bezogen auf den wahren Weltablauf ω_0 (und das heißt: in einem logischen Sinne) sind Zukunft und Vergangenheit gleichermaßen faktisch, bei begrenztem Wissen jedoch sind sie beide prinzipiell "offen". Allerdings mag es sein, dass wir über die Vergangenheit mehr wissen als über die Zukunft. Dies aber ist nur eine Konsequenz der Entropiezunahme im Universum.

6) Die Rolle der Normierung beim Begriff der Wahrscheinlichkeit

Wir haben in Kapitel 12 zum Wahrscheinlichkeitsgesetz der klassischen Mechanik argumentiert, dass die fehlende Normierung des Lebesguemaßes λ keinen Mangel darstellt. Als Grund haben wir dabei angegeben, dass man in der Praxis niemals die absolute Wahrscheinlichkeit eines möglichen Faktums benötigt, sondern immer nur bedingte Wahrscheinlichkeiten, deren Normierung auf Eins durch die Quotientenbildung bei ihrer Definition erreicht wird. So dient ein Kolmogoroff'sches Wahrscheinlichkeitsmaß P stets dazu, ein bestimmtes Experiment zu beschreiben. Bei P handelt es sich daher um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, in deren Bedingung die experimentellen Voraussetzungen EB stehen:

$$P(\cdot) := \lambda(\cdot | EB)$$

Aufgrund dieser Definition ist P auf Eins normiert.

Es gibt aber noch einen weiteren Grund, warum die Normierung für den Wahrscheinlichkeitsbegriff im allgemeinen nicht von Bedeutung ist. Dies wollen wir hier diskutieren.

Die Forderung der Normierung eines Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitsmaßes P ergibt sich (wie auch die Forderung der Additivität) daraus, dass P als Limes relativer Häufigkeiten verstanden wird. Im allgemeinen Fall steht jedoch nicht der Begriff der Häufigkeit oder der Begriff der Wahrscheinlichkeit im Vordergrund, sondern der Begriff der Unwahrscheinlichkeit. Im Zentrum steht somit auch nicht der Notwendigkeitsgrad ν , sondern der Möglichkeitsgrad μ . Dies ist nicht nur deshalb so, weil die Axiome für μ einfacher zu formulieren sind als jene für ν . Vielmehr stellt μ den Kernbegriff des Konzepts der Wahrscheinlichkeit dar, da der empirische Gehalt eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes unmittelbar an μ anknüpft. Dieser Gehalt beruht darauf, dass es mögliche Fakten gibt, die besonders unwahrscheinlich sind, für die also $\mu(A)$ sehr klein ist. Dabei spielt es keine wesentliche Rolle, ob μ auf Eins normiert ist oder nicht.

Normiertheit ist – ebenso wie Additivität – eine Eigenschaft relativer Häufigkeiten und somit auch des Häufigkeitsgrades. Für die Unwahrscheinlichkeit, d.h. für den Kernbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie, muss man beides nicht fordern. Dies gilt für das Maß λ im Fall der klassischen Theorie ebenso wie für das äußere Maß μ der Quantentheorie.

7) Der empirische Gehalt probabilistischer Gesetze

In Kapitel 2 haben wir formal definiert, was unter dem empirischen Gehalt eines deterministischen Axiomensystems AX zu verstehen ist. Dazu wurde die Menge \mathcal{M} der empirischen Materialien definiert als die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathcal{E} , der Menge der Ereignisse. Zu jedem $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ bezeichnet $F_{\mathcal{B}}$ das mögliche Faktum, dass alle zu \mathcal{B} gehörenden Ereignisse eintreten. Der empirische Gehalt des Axiomensystems AX ist dann die Menge derjenigen empirischen Materialien, die unter \Diamond_{AX} unmöglich sind, d.h. es ist:

$$\text{EMP}_{AX} := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M} \mid \neg \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

Zu einer endlichen Teilmenge \mathcal{E}'' von \mathcal{E} wird der auf \mathcal{E}'' bezogene empirische Gehalt definiert als

$$\text{EMP}_{AX}(\mathcal{M}'') := \text{EMP}_{AX} \cap \mathcal{M}''$$

wobei \mathcal{M}'' die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathcal{E}'' und somit die Potenzmenge von \mathcal{E}'' ist. Damit ist

$$\text{EMP}_{AX}(\mathcal{M}'') = \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}'' \mid \neg \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

Der auf \mathcal{E}'' bezogene empirische Gehalt des durch ein äußeres Maß μ gegebenen probabilistischen Gesetzes kann in ähnlicher Weise definiert werden als

$$\text{EMP}_{\mu, \varepsilon | V}(\mathcal{M}'') := \{ \mathcal{T} \subset \mathcal{M}'' \mid \mu(\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{T}} (F_{\mathcal{B}} \cap \Omega) \mid V) \leq \varepsilon \}$$

Dabei ist $V \in \mathcal{A}$ eine Bedingung, unter der gegebenenfalls die empirische Widerlegung des probabilistischen Gesetzes erfolgt, und ε ist der Grad dieser Widerlegung (das "Signifikanzniveau"). Da \mathcal{E}'' als endlich vorausgesetzt wird, ist auch \mathcal{M}'' und somit jede Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}''$ endlich. Der Ausdruck

$$\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{T}} (F_{\mathcal{B}} \cap \Omega)$$

bezeichnet daher eine endliche Existenzaussage und somit ein Element von \mathcal{A} .

Dieser Definition liegt die folgende Überlegung zugrunde: Bei der Widerlegung des durch μ angegebenen probabilistischen Gesetzes geht man von einer bekannten Bedingung V aus. Man legt dann eine Menge \mathcal{T} von möglichen empirischen Materialien fest, welche unter der gegebenen Bedingung V sehr unwahrscheinlich ist. Wird nun eines der zu \mathcal{T} gehörenden empirischen Materialien beobachtet, so ist das probabilistische Gesetz mit der durch ε vorgegebenen Sicherheit empirisch widerlegt.

Will man den empirischen Gehalt auf eine unendliche Teilmenge \mathcal{E}'' von \mathcal{E} oder auf \mathcal{E} selbst beziehen, so kann der Fall eintreten, dass die Menge $\bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{T}} (F_{\mathcal{B}} \cap \Omega)$ nicht zu der σ -Algebra \mathcal{A} gehört. Für diesen Fall muss man das äußere Maß μ zunächst mittels der Definition

$$\mu^{\sim}(B) := \inf \{ \mu(A) \mid A \in \mathcal{A} \text{ und } B \subset A \} \quad (\text{für } B \subset \Omega)$$

auf die Potenzmenge $\wp(\Omega)$ fortsetzen und in der Definition des empirischen Gehalts μ^{\sim} anstelle von μ verwenden.

Bemerkung: Jedes äußere Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} auf der Grundmenge Ω kann auf diese Weise zu einem äußeren Maß μ^{\sim} auf der Potenzmenge $\wp(\Omega)$ fortgesetzt werden.

8) Das Denkbare, das theoretisch Mögliche und das Vorstellbare

Die in diesem Text dargestellte Theorie lässt zu, dass das physikalische "tertium non datur" nicht allgemein gilt, dass es also Eigenschaften A gibt, für die zur Zeit t weder A noch A^{\perp} gegeben ist. Mit anderen Worten: Nach dieser Theorie ist das im Modell mögliche Faktum

$$\neg \langle A, t \rangle_0 \wedge \neg \langle A^{\perp}, t \rangle_0$$

auch physikalisch möglich. Diese Tatsache mag kontraintuitiv erscheinen: Schließlich haben wir noch nie eine Katze in einer Kiste gesehen, die weder tot

noch lebendig war, allenfalls haben wir eine Katze gesehen, von der wir nicht feststellen konnten, ob sie noch lebte. Wie also passt diese Theorie zu unseren praktischen Erfahrungen?

Wir müssen hier unterscheiden zwischen mehreren Konzepten des Möglichen: Ein in Rede stehendes Faktum ist "denkbar", wenn wir es sprachlich beschreiben können. Es ist "theoretisch möglich", wenn es denkbar ist und von einer gegebenen Theorie nicht ausgeschlossen wird. Es ist "vorstellbar", wenn wir es nicht nur beschreiben, sondern uns konkret vorstellen können. Vorstellbar ist ein Faktum dann, wenn wir es auch beobachten könnten, sofern es denn eingetreten wäre. Und es ist "wirklich möglich" oder "erwiesenermaßen möglich", wenn wir ein ebensolches Faktum zu einer anderen Zeit schon einmal beobachtet haben, wie etwa den Einschlag eines großen Meteoriten.

Das Faktum

$$\neg\langle A, t \rangle_o \wedge \neg\langle A^\perp, t \rangle_o$$

zählt zunächst zu den denkbaren Fakten, da wir es sprachlich beschreiben können. Nach der hier dargestellten Theorie ist es auch "theoretisch möglich", da die Theorie es nicht durch eines ihrer allgemeinen Gesetze ausschließt. Es ist allerdings nicht vorstellbar und auch nicht beobachtbar. Erst recht ist es dann auch nicht "wirklich möglich" im oben angegebenen Sinn. Um dieses Faktum zu beobachten, müssten wir zum Beispiel Ereignisse (B, t) und (C, t) wahrnehmen mit $B \perp A$ und $C \perp A^\perp$. Hieraus würde jedoch folgen, dass $B \perp C$ ist, und dann können die Ereignisse (B, t) und (C, t) nicht zugleich eintreten.

Durch die Differenzierung der Möglichkeitsbegriffe wird deutlich, dass der kontraintuitive Anschein, der sich aus dem Fehlen des physikalischen "tertium non datur" als einem allgemeinen Gesetz der Theorie ergibt, auf der Verwechslung verschiedener Konzepte des Möglichen beruht. Tatsächlich müssen wir feststellen, dass die Theorie zu der Frage, ob das physikalische "tertium non datur" in einem bestimmten Fall gilt, einfach nichts aussagt. In diesem Sinne handelt es sich um eine "schwache Theorie", im Vergleich etwa zur klassischen Mechanik. Man mag mit dieser Schwäche der Theorie unzufrieden sein. Die Theorie behauptet aber nicht, dass das genannte Faktum vorstellbar, beobachtbar oder "wirklich möglich" im oben definierten Sinne sein müsse.

Wir haben festgestellt, dass die Theorie – als eine schwache Theorie – keine unbedingten positiven Schlüsse der Form

$$E_1 \wedge \dots \wedge E_n \Rightarrow F$$

erlaubt, wobei die E_j sowie F Ereignisse sind und die Menge

$$W := \{ E_j \mid j \in \{1, \dots, n\} \}$$

unser aktuelles Wissen darstellt. Wenn wir davon ausgehen, dass das, was wir uns vorstellen können, stets nur positive Fakten in Form von Ereignissen sind und dass die Menge dieser möglichen Vorstellungen \mathcal{E}_{vor} eine endliche Teilmenge von \mathcal{E} ist, so kann der Fall eintreten, dass es ein bestimmtes Ereignis $F \in \mathcal{E}_{\text{vor}}$ zum Zeitpunkt t gibt, so dass für alle anderen Elemente von \mathcal{E}_{vor} , die denselben Zeitpunkt betreffen, d.h. für alle $(A,t) \in \mathcal{E}_{\text{vor}} \setminus \{F\}$ gilt:

$$(*) \quad E_1 \wedge \dots \wedge E_n \Rightarrow \neg \langle A,t \rangle_0$$

In diesem Fall können wir sagen, dass bei dem gegebenen Wissen W von allem, was wir uns vorstellen können, zum Zeitpunkt t nur das Ereignis F möglich ist. Die Theorie sagt uns also, dass bei dem gegebenen Wissen das Ereignis F die einzig mögliche Vorstellung ist. In diesem Sinne macht die Theorie dann doch eine "positive" Vorhersage:

"Von allem, was überhaupt vorstellbar ist, kann nur F eintreten."

Gibt es hingegen eine Teilmenge $\mathcal{E}' = \{F_1, \dots, F_k\}$ von \mathcal{E}_{vor} , so dass die Implikation $(*)$ für alle $(A,t) \in \mathcal{E}_{\text{vor}} \setminus \mathcal{E}'$ gilt, so sagt die Theorie "positiv" voraus:

"Von allem, was überhaupt vorstellbar ist,
kann nur F_1 oder F_2 oder .. oder F_k eintreten."

Betrachten wir zum Beispiel das Schrödinger'sche Katzenexperiment. Zunächst wird hier eine Katze in die Kiste gesetzt und der bekannte Mechanismus installiert, sodann wird die Kiste verschlossen. Aufgrund dieser Voraussetzungen sind nun viele mögliche Vorstellungen durch die physikalische Theorie ausgeschlossen. Unter anderem gilt:

Es ist kein toter Hund in der Kiste,
es ist kein lebender Hund in der Kiste,
es ist auch keine leere Kiste vorhanden,
usw.

Von allem, was man sich überhaupt vorstellen kann, sind nur die folgenden beiden Vorstellungen physikalisch möglich:

Es ist eine tote Katze in der Kiste.
Es ist eine lebende Katze in der Kiste.

In diesem Sinne sagt die Theorie voraus, dass nur eine tote oder eine lebende Katze in der Kiste sein kann, auch wenn es – nach eben dieser Theorie – "rein theoretisch" möglich ist, dass beides nicht gilt.

Wahrnehmbar, und damit auch vorstellbar, sind grundsätzlich nur positive Fakten, d.h. positive Bilder der Welt. Im Modell der Theorie entspricht ein solches Faktum einem Ereignis, d.h. einem Element $E \in \mathcal{E}$. Da wir uns mehrere

solche Fakten zugleich vorstellen können, entspricht das Vorstellbare einer Menge von endlichen Teilmengen von \mathcal{E} , d.h. einer Teilmenge der Menge \mathcal{M} der empirischen Materialien.

Der empirische Gehalt einer Theorie, die durch ein Axiomensystem AX angegeben wird, kann dargestellt werden durch die Beschränkung des Möglichkeitsoperators \Diamond_{AX} auf die Menge der möglichen empirischen Materialien, d.h. durch $(\Diamond_{AX})|_{\mathcal{M}}$. Der empirische Gehalt einer Theorie ist daher auch deshalb relevant, weil \mathcal{M} – als Menge der möglichen empirischen Materialien – die Menge dessen umfasst, was man sich vorstellen kann. Man kann sagen, dass der empirische Gehalt der Theorie festlegt, was die Theorie über das Vorstellbare aussagt.

Bemerkung: Bei einem gegebenen Wissen sagt uns die Theorie, was im Rahmen des Vorstellbaren physikalisch möglich ist. Damit sagt sie uns auch, was wir ggf. beobachten können, z.B. nur eine tote oder eine lebende Katze. Auch als schwache Theorie, die keine unbedingten positiven Schlüsse erlaubt, ist sie zu derartigen Vorhersagen in der Lage. Dennoch handelt es sich nicht um eine "Theorie der Beobachtung", da sie ohne jeden Bezug auf den Begriff der Beobachtung formuliert ist als eine objektive Theorie des Universums und seiner Eigenschaften. Aussagen über mögliche Beobachtungen sind lediglich Konsequenzen der Anwendung dieser Theorie auf das grundsätzlich Beobachtbare.

9) Über die Wahrnehmbarkeit negativer Fakten

Bei der Beschreibung des empirischen Gehalts von Theorien sind wir davon ausgegangen, dass sich nur Ereignisse $E \in \mathcal{E}$ (und somit nur positive Fakten) unmittelbar beobachten lassen. Dabei besteht ein Ereignis darin, dass eine Eigenschaft des Universums positiv vorhanden ist. Eine Negation lässt sich demnach nicht unmittelbar beobachten. Aus diesem Grunde kann etwa der Satz

"Der Apfel liegt nicht auf dem Tisch."

nicht zu den Basissätzen im Popper'schen Sinne gezählt werden.

Was wir hier positiv beobachten können, ist nur die Tatsache, dass der Tisch zum Beispiel leer ist, dass also der Wert der Materiedichte oberhalb des Tisches den Wert Null hat. Aufgrund des Ausschlussprinzips können wir dann schließen, dass der Apfel nicht auf dem Tisch liegt (aber auch, dass auf dem Tisch z.B. keine Tasse steht). Formal dargestellt bedeutet dies, dass wir eine Eigenschaft B beobachten, die die in Frage stehende Eigenschaft A physikalisch ausschließt, für die also gilt:

$$B \subset Z \setminus A$$

im Falle der klassischen Mechanik beziehungsweise

$$B < A^\perp$$

im Modell der Quantentheorie.

Diese Sichtweise mag man als etwas zu einschränkend empfinden. Im täglichen Leben unterscheiden wir normalerweise nicht zwischen den beiden einzelnen Schritten:

- Beobachten eines leeren Tisches,
- Schluss auf das Nichtvorhandensein eines bestimmten Gegenstandes auf dem Tisch.

Eine solche Unterscheidung erscheint kontraintuitiv.

Man kann hier von einem erweiterten Verständnis des Begriffs der unmittelbaren Beobachtung ausgehen und zulassen, dass zum Beispiel auch negative Aussagen zu den Basissätzen zu zählen sind, etwa die Aussage $\neg\langle A, t \rangle_0$ mit $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$. Dies ändert allerdings nicht sehr viel an den weiteren Überlegungen. Wir würden dann zwar "unmittelbar" beobachten können, dass etwa ein bestimmter Apfel nicht auf dem Tisch liegt. Voraussetzung wäre aber dennoch das reale Bestehen des Faktums, dass der Tisch entweder leer ist oder dass eine andere Eigenschaft positiv gegeben ist, die im Widerspruch zum Vorhandensein des Apfels steht.

Allgemein formuliert hätten wir, als Menge der Basissätze im erweiterten Sinn, eine bestimmte Teilmenge $\mathcal{A}_{\text{Basis}} \subset \mathcal{A}_0$. Die Beobachtung eines Elements $G \in \mathcal{A}_{\text{Basis}}$ könnte nur dann erfolgen, wenn ein empirisches Material im ursprünglichen engeren Sinn, d.h. ein $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ real gegeben wäre, von dem auf G geschlossen werden könnte. Hierzu müssten wir eine "Basisstheorie" voraussetzen, die durch ein Axiomensystem $\text{AX}_{\text{Basis}} \subset \mathcal{A}_0$ zu beschreiben wäre. Der Schluss von \mathcal{B} auf G wäre dann möglich, wenn gilt:

$$\square_{\text{AX}_{\text{Basis}}} (F_{\mathcal{B}} \rightarrow G)$$

Bemerkung: Wenn wir z.B. Negationen als "unmittelbar" beobachtbare Fakten ansehen wollen, so müsste AX_{Basis} etwa das Axiom

$$\text{SEC}^2 := \{ \neg (\langle A, t \rangle_0 \wedge \langle B, t \rangle_0) \mid A, B \in \mathcal{U} \wedge t \in T \wedge A \perp B \}$$

umfassen. Von dem empirischen Material $\mathcal{B} = \{\langle A, t \rangle\}$ könnte damit auf $\neg\langle B, t \rangle_0$ geschlossen werden, sofern $A \perp B$ gilt.

Bemerkung: Wir können an dieser Stelle auch annehmen, dass AX_{Basis} die leere Menge ist. In diesem Fall lassen sich nur jene $G \in \mathcal{A}_0$ als Basissätze im erweiterten Sinn auffassen, die aus einem empirischen Material $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ logisch

ableitbar sind. Aus dem empirischen Material $\mathcal{B} = \{(A,s),(B,t)\}$ lassen sich z.B. die folgenden möglichen Fakten ableiten:

$$\begin{aligned} &\langle A,s \rangle_o \wedge \langle B,t \rangle_o \\ &\langle A,s \rangle_o \vee \langle C,u \rangle_o && (\text{für } C \in \mathcal{U} \text{ und } u \in T) \\ &\langle C,u \rangle_o \rightarrow \langle B,t \rangle_o && (\text{für } C \in \mathcal{U} \text{ und } u \in T) \\ &\exists_x \langle C_x,s \rangle_o && (\text{wenn } C_x \in \mathcal{U} \text{ für alle } x \text{ gilt} \\ &&& \text{und es ein } x \text{ gibt mit } C_x = A) \end{aligned}$$

In dieser Weise können auch Existenzaussagen als Basissätze verstanden werden, etwa der Satz:

"Es gibt einen Raben, der grün ist und auf dem Tisch sitzt."

Unter einem erweiterten empirischen Material wäre eine endliche Teilmenge $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ von $\mathcal{A}_{\text{Basis}}$ zu verstehen. Um ein solches Material beobachten zu können, müssten $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in \mathcal{M}$ real gegeben sein, für die gilt:

$$\forall_j \Box_{AX_{\text{Basis}}} (F_{\mathcal{B}_j} \rightarrow G_j)$$

Die durch ein Axiomensystem $AX \subset \mathcal{A}_0$ gegebene Theorie wäre durch die Beobachtung von \mathcal{G} empirisch widerlegt, wenn die logische Konjunktion der hierbei real vorhandenen Fakten im Widerspruch zur Theorie steht, wenn also gilt:

$$\neg \Diamond_{AX} (\forall_j (G_j \wedge F_{\mathcal{B}_j}))$$

Der erweiterte empirische Gehalt der durch AX gegebenen Theorie wäre zu definieren als:

$$\begin{aligned} \text{EMP}_{\text{erw},AX} := \{ \{ (G_1, \mathcal{B}_1), \dots, (G_n, \mathcal{B}_n) \} \mid &\forall_j [G_j \in \mathcal{A}_{\text{Basis}} \wedge \mathcal{B}_j \in \mathcal{M}] \\ &\text{und } \forall_j \Box_{AX_{\text{Basis}}} (F_{\mathcal{B}_j} \rightarrow G_j) \\ &\text{und } \neg \Diamond_{AX} (\forall_j (G_j \wedge F_{\mathcal{B}_j})) \} \end{aligned}$$

das heißt als die Menge der empirischen Beobachtungskonstellationen, die zu einem Widerspruch mit der Theorie führen. Für den Fall des Vergleichs zweier Axiomensysteme AX und AX' , die beide die Basistheorie enthalten, für die also gilt:

$$AX_{\text{Basis}} \subset AX$$

und

$$AX_{\text{Basis}} \subset AX'$$

kann man dann leicht die folgende Äquivalenz zeigen:

$$\text{EMP}_{AX} = \text{EMP}_{AX'} \Leftrightarrow \text{EMP}_{\text{erw},AX} = \text{EMP}_{\text{erw},AX'}$$

Wir hätten somit zwar den Begriff der unmittelbaren Wahrnehmbarkeit geändert, nicht jedoch den der empirischen Äquivalenz.

Entscheidend an dieser Stelle ist, dass aufgrund der Erweiterung des Begriffs der unmittelbaren Wahrnehmung zwar bestimmte andere Begriffe (etwa der des empirischen Gehalts) neu definiert werden müssen, dass sich aber für den Vergleich verschiedener Theorien im Hinblick auf ihren logischen bzw. empirischen Gehalt letztlich keine anderen Aussagen ergeben als zuvor und dass sich somit an den Feststellungen des vorliegenden Textes nichts Wesentliches ändert. Der Vorteil des gewählten Vorgehens bei der Definition des Begriffs der unmittelbaren Wahrnehmbarkeit liegt allein darin, dass sich die Überlegungen hierdurch vereinfachen.

10) Abstrakte oder anschauliche Ontologie

In der Physik ist man bestrebt, Theorien zu formulieren, denen eine möglichst anschauliche Ontologie zugrunde liegt. Diesem Bestreben folgend hat man zunächst versucht, das Mikroskopische im Sinne des Atomismus zu modellieren mittels elementarer Teilchen (die auch als Massepunkte aufgefasst werden können) sowie klassischer Felder. Letztlich ist dieser spezielle Ansatz zwar gescheitert, jedoch stellt man sich unter einer "Ontologie" immer noch eine Modellierung vor, die auf anschaulichen Konzepten beruht.

Allerdings zeigt schon das Beispiel der klassischen Feldtheorie, dass auch eine abstrakte Ontologie sinnvoll sein kann. Insbesondere widerspricht schon die Annahme eines Gravitationsfeldes der unmittelbaren Anschauung. Vor der Entwicklung dieses Konzeptes war man davon ausgegangen, dass die Übertragung einer Kraft stets nur dann möglich ist, wenn ein materieller Kontakt vorhanden ist. Dass die Sonne die Venus anziehen sollte, obwohl zwischen diesen beiden Himmelskörpern kein Seil gespannt ist, leuchtete zunächst nicht ein. Man hat sich an diesen Gedanken jedoch im Laufe der Zeit gewöhnt und würde heute meinen, dass eine klassische Feldtheorie mit weitreichenden Kräften durchaus über eine anschauliche Ontologie verfügt.

Als weiteres Beispiel kann man hier die Frage nach dem Äther betrachten, der den elektromagnetischen Wellen zugrunde liegen sollte. Auch die Vorstellung von der Notwendigkeit eines Äthers entspricht dem Wunsch nach "Anschaulichkeit" des Modells, auf dem die physikalische Theorie basiert. In diesem Fall hat man sich ebenfalls daran gewöhnen müssen, dass eine abstraktere Konzeption – wie sie in der Relativitätstheorie realisiert wurde – sinnvoll ist.

Die Ontologie der klassischen Feldtheorie besteht nun darin, dass man das Modell in präziser, aber abstrakter Form angibt. Ein solches Feld ist demnach darzustellen als eine Abbildung, die jedem Punkt der Raumzeit eine Feldstärke

zuordnet. Ebenso wird die Ontologie für die Quantentheorie – in einem abstrakten Sinne – angegeben durch das formale Modell einer Abbildung

$$F : \mathcal{U} \times T \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

die jeder Eigenschaft des Universums zu jedem Zeitpunkt einen Wahrheitswert zuordnet, wobei Eigenschaften durch Unterräume des Hilbertraums modelliert werden. Durch die präzise Modellierung ist hier – ähnlich wie im Falle der klassischen Feldtheorie – eine Ontologie gegeben, die abstrakt ist und nicht anschaulich (etwa im Sinne des klassischen Atomismus). Eine gewisse Anschaulichkeit ist hier allerdings insofern gegeben, als alle makroskopischen Fakten im Rahmen dieses Modells problemlos dargestellt werden können und sich der anschauliche Dualismus von Objekten und Feldern aus der Theorie ableiten lässt.

11) Elemente der Theorie und kontingente Fakten

Da das Lebesguemaß λ auf dem Phasenraum der klassischen Mechanik nicht normierbar ist, gibt es hier kein absolutes Wahrscheinlichkeitsmaß. Stattdessen kann der Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt werden als Abbildung

$$P(\cdot) : \mathcal{B} \times \mathcal{B}' \rightarrow [0,1]$$

wobei \mathcal{B} die Borelалgebra auf dem Phasenraum ist und

$$\mathcal{B}' := \{ A \in \mathcal{B} \mid \lambda(A) \in (0, \infty) \}$$

die Menge der Elemente von \mathcal{B} , die positives und endliches Maß haben. Durch die Definition

$$P(A|B) := \lambda(A \cap B) / \lambda(B) \quad (\text{für } A \in \mathcal{B} \text{ und } B \in \mathcal{B}')$$

wird sichergestellt, dass zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten die notwendigen Beziehungen gelten.

Entscheidend hierbei ist, dass die Beschränkung auf den Definitionsbereich $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ aus mathematisch-formalen Gründen erfolgt. Wäre dies nicht so, und müssten wir die Einschränkung vornehmen auf der Basis bestimmter subjektiver oder kontingenter Fakten, so hätten wir keine sinnvolle Theorie formuliert. So wäre es zum Beispiel nicht sinnvoll, als Menge der Eigenschaften des Universums anstelle von \mathcal{U} die Menge $\mathcal{U}' := S$, d.h. die Menge der unmittelbar wahrnehmbaren, makroskopischen Eigenschaften anzunehmen.

Während \mathcal{U} eine symmetrische Menge ist (z.B. gegenüber räumlichen Translationen), gilt dies für S im allgemeinen nicht. Entsprechendes gilt auch für die Initialeigenschaft UR. S und UR sind Elemente, die auf kontingenten Fakten beruhen; S beruht sogar auf bestimmten subjektiven Gegebenheiten. Hingegen stellt es kein Problem dar, die Menge der Eigenschaften im Falle der

klassischen Theorie auf die Borelalgebra \mathcal{B} zu beschränken, anstatt die ganze Potenzmenge zugrunde zu legen, da die Begründung hierfür rein formaler, mathematischer Natur ist.

12) Die mathematische Methode in der Physik

Wir wollen hier auf die Frage eingehen, warum die Anwendung der mathematisch-logischen Methode bei der Lösung des Deutungsproblems sinnvoll ist.

Physik basiert traditionell auf der Durchführung von Experimenten und der anschließenden Formulierung einer Theorie. Bei der Theoriebildung werden – ähnlich wie in der Mathematik – Formeln verwendet, aus denen sich weitere Formeln ableiten lassen. Entscheidend beim Verständnis dieser Formeln bleibt aber stets die Anschauung, welche die mehr oder weniger intuitive Anwendung auf bestimmte konkrete Situationen ermöglicht. Ohne diese Anschauung haben die Gleichungen der Physik letztlich keine Bedeutung.

Anders verhält es sich in der Mathematik. Schon seit langer Zeit befasst sich die Mathematik mit Objekten, die sich jeder Anschaulichkeit entziehen. Notwendig war es daher, mathematische Theorien in präziser Weise zu formulieren. Eine mathematische Formel stellt hier eine abgekürzte und präzierte Form eines vernünftigen, logisch aufgebauten Satzes dar. Anschaulichkeit ist dabei keine Voraussetzung mehr, auch wenn bestimmte anschauliche Beispiele hilfreich sein können, wenn es darum geht, einen Beweis für ein mathematisches Theorem zu finden.

In der Physik ist dies traditionell nicht so. Die Formel

$$E = m c^2$$

kann hier als Beispiel dienen. Sie kann zwar auch als Abkürzung für einen Satz stehen, etwa den Satz

"Die Energie ist gleich dem Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit."

jedoch ist die Bedeutung dieses Satz nicht klar. Von "der Energie" kann man ebensowenig sprechen wie etwa von "dem Planeten". Der Satz

"Der Planet ist blau."

ist sinnlos, da es nicht nur genau einen Planeten gibt. Ebensowenig gibt es "die Energie". Vielmehr hat jedes Objekt X zu jeder Zeit t und in jedem Koordinatensystem K möglicherweise eine andere Energie. Richtig müsste die Formel also beginnen mit:

$$E(X,t,K) = \dots$$

und es fragt sich nun, wo diese drei Parameter auf der anderen Seite der Gleichung stehen müssen.

Spontan würde man annehmen, dass die Masse m von dem Objekt abhängt und eventuell die Lichtgeschwindigkeit vom Koordinatensystem. Man erhielte so die (völlig falsche) Gleichung

$$E(X,t,K) = m(X) c^2(K)$$

Im Lichte der Relativitätstheorie ist aber klar, dass die Gleichung korrekterweise zu schreiben ist als

$$E(X,t,K) = m(X,t,K) c^2$$

Allerdings haben wir damit noch immer keine präzise Aussage, da die Definitionsbereiche der Parameter X , t und K nicht benannt sind. Eine wirklich vernünftige und logisch formulierte Aussage erhalten wir erst als:

$$(*) \quad \forall_{X \in OB} \forall_{t \in T} \forall_{K \in KS} [E(X,t,K) = m(X,t,K) c^2]$$

wobei OB als die Menge aller möglichen Objekte, T als die Menge der Zeitpunkte und KS als die Menge der Koordinatensysteme zu definieren wäre.

Man mag an dieser Stelle einwenden, dass dies alles implizit so gemeint sei und deshalb nicht der Erwähnung bedürfe, so dass die Formel $E = m c^2$ dann doch als eine Abkürzung der Aussage (*) verstanden werden könne. Spätestens aber, wenn wir die quantentheoretische Formel

$$p_A = |\pi_A \phi|^2$$

betrachten, stellen wir fest, dass nicht klar ist, für welche präzise Aussage diese Formel steht. Darin liegt eben, wenigstens zum Teil, das Deutungsproblem der Quantentheorie.

Die in der Physik übliche Methodik war so lange erfolgreich, wie mit jeder Formel problemlos eine Anschauung verbunden werden konnte. Für den jeweils konkret vorstellbaren Anwendungsfall war es dann möglich, die Formelzeichen bestimmten einzelnen physikalischen Größen zuzuordnen und somit zu einer Aussage über reale Situationen zu gelangen.

Aus diesem Grunde ist die Physik immer auch bestrebt, anschauliche Konzepte (etwa das Konzept der Kugel oder das Konzept der Welle) auf mikroskopische Verhältnisse anzuwenden. So entstand insgesamt die klassische mikrophysikalische Theorie. Das Wesen dieser Theorie lag gerade darin, dass in naiver Weise makroskopische Vorstellungen (und nur solche Vorstellungen sind letztlich anschaulich) auf das Mikroskopische übertragen wurden.

Allerdings ist diese Theorie mit der "Ultraviolett-Katastrophe" gründlich gescheitert. Mit der Möglichkeit eines solchen Scheiterns musste man immer schon rechnen; schließlich gibt es überhaupt keinen Grund für die Annahme, dass das Mikroskopische sich wie eine verkleinerte Version der makroskopi-

schen Welt verhalten sollte. Dennoch mag man es als unbefriedigend empfinden, wenn eine neue Theorie des Mikroskopischen nun gezwungen ist, auf die Anschaulichkeit des Modells zu verzichten.

Die für die Mathematik entwickelte Methodik, welche sich schon stets mit nicht anschaulichen Gegenständen befasst hat, stellt hier einen adäquaten Ausweg dar. Diese Methodik geht aus von einem logisch-mengentheoretischen Fundament. Sie fordert, stets genau anzugeben, welchen Typ ein Symbol hat (z.B. ist die oben genannte Funktion E ein Objekt vom Typ

$$\mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$$

d.h. sie bildet drei Objekte auf ein Objekt ab) und für jede Funktion ist der Definitionsbereich und der Wertebereich anzugeben.

Dies ist insbesondere auch anzuwenden auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Ein Satz wie

"Die Wahrscheinlichkeit, A zu messen, ist gleich ..."

ist hier problematisch. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff $P(\cdot | \cdot)$ stellt eine Abbildung dar, die zwei mögliche Fakten auf eine reelle Zahl abbildet, und man muss, wenn eine Gleichung über Wahrscheinlichkeiten als Abkürzung für einen vernünftigen Satz stehen soll, angeben:

- wie die Definitionsbereiche festgelegt sind, z.B. als Menge der möglichen Fakten,
- was in der Bedingung steht (möglicherweise auch "nichts", in diesem Fall geht es um die absolute Wahrscheinlichkeit),
- für welches mögliche Faktum die (bedingte) Wahrscheinlichkeit angegeben werden soll, z.B. für das mögliche Faktum, A zu erhalten, wenn die Alternative A oder A^\perp gemessen wird, oder für das mögliche Faktum, dass "A gemessen wird".

Falsch wäre es zum Beispiel, zu schreiben:

$$EB \Rightarrow (P(M_A) = |\pi_A \phi|^2)$$

wobei EB die Bedingungen des Experiments beschreiben soll und M_A aussagt, dass man das Messergebnis A erhält (vgl. dazu die nachstehende Anmerkung). Eher muss hier die Aussage stehen:

$$P(M_A|EB) = |\pi_A \phi|^2$$

Dabei muss EB nicht nur die Voraussetzungen des Experiments beschreiben, welche zur Präparierung des Quantenzustands erforderlich sind, sondern auch das aufgebaute Messgerät (auch wenn es Situationen geben mag, in denen der

betrachtete Quantenzustand nicht davon abhängt, ob das Messgerät vorhanden ist oder nicht).

Eine präzise physikalische Wissenschaft kann sich nicht damit begnügen, Formeln aufzustellen, daraus weitere Formeln abzuleiten und diese intuitiv auf bestimmte Situationen anzuwenden. Vielmehr muss eine eindeutige Modellierung des Realen erfolgen mit anschließender Formulierung von Gesetzen, die die Form klarer Aussagen haben. Hierin liegt ein wesentlicher Teil des Deutungsproblems.

Bemerkung: Nicht nur die eigentliche physikalische Theorie muss sinnvollerweise in eindeutiger Form dargestellt werden. Auch die erforderlichen metatheoretischen Überlegungen bedürfen einer präzisen Darstellung. Erst hierdurch wird zum Beispiel der formale Vergleich verschiedener Axiomensysteme im Hinblick auf ihren logischen oder empirischen Gehalt möglich.

13) Quantentheoretische Gleichungen und Modallogik

Zu den wichtigsten Aussagen des quantentheoretischen Zustandskalküls gehört die bekannte Gleichung:

$$p_A = |\pi_A \varphi|^2$$

In Worten kann sie wie folgt formuliert werden: "Die Wahrscheinlichkeit, an dem Quantensystem Q zum Zeitpunkt t die Eigenschaft A zu messen, beträgt $|\pi_A \varphi|^2$, wobei φ den Quantenzustand des Systems Q zur Zeit t bezeichnet."

Hat man es mit einem gemischten Zustand W zu tun, so lautet die Gleichung allgemeiner:

$$p_A = \text{tr } \pi_A W$$

Wenn wir dies etwas genauer formulieren wollen, so müssen wir das mögliche Faktum, dass "A gemessen" wird, mit M_A beschreiben und anstelle von W ausführlicher $W_{Q;t}$ schreiben. Wir erhalten so die Gleichung:

$$P(M_A) = \text{tr } \pi_A W_{Q;t}$$

Diese Gleichung gilt offenbar nur dann, wenn zuvor der Quantenzustand des Systems Q (durch den Aufbau eines bestimmten Experiments) als $W_{Q;t}$ präpariert wurde. Wenn wir nun die Bedingungen des Experiments mit EB bezeichnen, so liegt es nahe, die folgende Implikation anzunehmen:

$$(*) \quad EB \Rightarrow [P(M_A) = \text{tr } \pi_A W_{Q;t}]$$

Dies wäre zu lesen als: "Wenn das durch EB beschriebene Experiment aufgebaut wurde, so hat die Wahrscheinlichkeit, A zu messen, den Wert $\text{tr } \pi_A W_{Q;t}$ ".

Die Implikation (*) berücksichtigt jedoch die modallogischen Zusammenhänge nicht. Bei EB handelt es sich um ein mögliches Faktum. Demnach hängt der Wahrheitswert von EB davon ab, welchen Weltablauf $\omega \in \Omega$ wir betrachten.

Bei P handelt es sich nun aber um einen modalen Begriff. Die Funktion P ordnet dem möglichen Faktum M_A einfach eine reelle Zahl zu, und der Ausdruck $P(M_A)$ hängt nicht von ω ab. Die Wahrscheinlichkeit, A zu messen, wäre demnach auch unabhängig davon, ob die experimentelle Bedingung gegeben ist oder nicht. Dies ist eine offensichtlich unsinnige Annahme.

Eine korrekte Formulierung der beabsichtigten Aussage lautet vielmehr:

$$(**) \quad P(M_A|EB) = \text{tr } \pi_A W_{Q;t|EB}$$

Die experimentelle Bedingung tritt hier als Bedingung in der bedingten Wahrscheinlichkeit auf. Aus diesem Grunde muss dann aber der Term $\text{tr } \pi_A W_{Q;t}$ ebenfalls von EB abhängig sein. Daher muss $W_{Q;t}$ als ein bedingter Quantenzustand $W_{Q;t|EB}$ aufgefasst werden.

Diese Überlegung macht deutlich, dass ein klares Verständnis der modallogischen Zusammenhänge notwendig ist, wenn eine der zentralen Gleichungen der Quantentheorie korrekt verstanden werden soll.

Es spielt dabei keine Rolle, ob man hier explizit eine Modallogik zugrunde legt oder – wie es in diesem Text geschieht – die in der Semantik einer Modallogik auftretende "Menge möglicher Welten" auf die Sachebene hebt, indem man die Existenz einer Menge möglicher Weltabläufe ausdrücklich zum Gegenstand der Theorie macht und auf dieser Basis – in Analogie zu dem Kolmogoroff'schen Vorgehen – die Menge der möglichen Fakten definiert.

14) Die Parallelität zwischen Kants Phänomenen und der Welt an sich sowie Poppers Basissätzen und den allgemeinen Gesetzen

Im Sinne Kants haben wir unterschieden zwischen der "Welt an sich", über die wir zunächst nichts wissen können, und den Phänomenen, die allein uns unmittelbar gegeben sind. Aus diesen Phänomenen rekonstruieren wir – einem Prinzip der Vernunft folgend – eine "Welt an sich", um so die Phänomene zu ordnen.

Außerdem haben wir in Anlehnung an Popper unterschieden zwischen den Ereignissen $(A,t) \in \mathcal{E}$, die grundsätzlich unmittelbar wahrgenommen werden können, und den möglichen Fakten, die als logische Kombinationen von Ereignissen aufzufassen sind. Ein Ereignis (A,t) kann durch einen Basissatz beschrieben werden, der formal als $\langle A,t \rangle_0$ wiedergegeben wird. Zu den möglichen Fakten gehören hingegen alle Elemente von \mathcal{A}_0 , wie zum Beispiel Negationen, Implikationen oder abzählbare All-Aussagen. Allgemeine Gesetze im Sinne Poppers sind ebenfalls als logische Kombinationen von Basissätzen aufzufassen und zählen – als All-Aussagen – zu den möglichen Fakten.

Bemerkung: Allgemeine Gesetze wie MON, SEC oder SG können zwar als All-Aussagen verstanden werden – in diesem Sinne ist z.B.

$$\forall(\text{MON}) := \bigcap(\text{MON}) \in \wp(\Omega_0)$$

ein mögliches Faktum – jedoch gehören sie nicht notwendigerweise zu A_0 , da es sich bei diesen Gesetzen um überabzählbare Teilmengen von A_0 handelt.

Zwischen diesen beiden Überlegungen besteht ein naheliegender Zusammenhang. Die "Welt an sich" kennen wir nur so, wie sie uns erscheint, d.h. sie begegnet uns in Form von Phänomenen. Andererseits erscheint uns die Welt als eine Folge von Ereignissen. Offenbar entsprechen daher die Kant'schen Phänomene jenen Ereignissen, die durch Popper'sche Basissätze beschrieben werden können. Ein Phänomen entspricht demnach stets einem positiven Faktum, dessen Wahrnehmung durch ein Subjekt – im Sinne eines positiven Bildes der Welt – mit Hilfe der Sinnesorgane erfolgt.

In der Welt der Phänomene gibt es insbesondere keine Negationen und – allgemeiner – überhaupt keine logischen Kombinationen. Die Beschreibung der "Welt an sich" hingegen erfolgt im Rahmen einer Sprache, die logische Begriffe wie "nicht", "oder", "wenn .. dann", "alle" usw. enthält.

Die "Welt an sich" wird demnach logisch gedacht. Objektiv soll hier jeder Basissatz $\langle A,t \rangle_0$ wahr oder falsch sein, aber wenn $\langle A,t \rangle_0$ falsch ist, dann ist $\neg\langle A,t \rangle_0$ objektiv wahr. Z.B. kann $\langle A,t \rangle_0$ wahr und $\langle B,t \rangle_0$ falsch sein. Dies können wir schreiben als:

$$(A,t) \in \omega_0 \text{ und } (B,t) \notin \omega_0$$

wobei ω_0 für die angenommene "Welt an sich" steht. In diesem Fall gilt für die "Welt an sich" die Aussage:

$$\langle A,t \rangle_0 \wedge \neg\langle B,t \rangle_0$$

Die logisch rekonstruierte "Welt an sich" enthält somit auch Fakten, die logische Kombinationen aus Ereignissen sind, insbesondere negative Fakten. Auch die allgemeinen Gesetze im Sinne Poppers betreffen diese "Welt an sich".

Wir konstatieren also folgende Parallelität: Nach Kant beruht alles, was wir über die "Welt an sich" wissen, auf den (positiv) gegebenen Phänomenen. Nach Popper beruht alles, was wir über die allgemeinen Gesetze wissen, auf den unmittelbar wahrnehmbaren einzelnen (positiven) Fakten, die wir mit Hilfe von Basissätzen beschreiben. Während die durch Basissätze beschreibbaren positiven Einzelfakten den Kant'schen Phänomenen entsprechen, betreffen die allgemeinen Gesetze die "Welt an sich", ebenso wie alle anderen möglichen Fakten, die sich als logische Kombinationen aus Basissätzen bilden lassen, wie zum Beispiel Negationen, Implikationen, All- oder Existenz-Aussagen usw.

55. Einzelne Anmerkungen zur Quantentheorie

Es werden hier einzelne ergänzende Anmerkungen zur Quantentheorie formuliert. Sie betreffen die folgenden Themen:

- 1) Die Initialbedingung und der Urknall
- 2) Der empirische Gehalt des Monotonieprinzips
- 3) Lösung des Kochen-Specker-Problems durch Reduktion der Theorie auf den empirischen Gehalt
- 4) Empirische Widerlegung der Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit mit dem Limes relativer Häufigkeit
- 5) Relative Häufigkeiten bei extrem kleiner Wahrscheinlichkeit
- 6) Der Quantenformalismus und sein empirischer Gehalt
- 7) Photonenmuster als Dokumente und die Aufzeichnung von Ereignissen
- 8) Störung des Interferenzmusters durch Messung am Doppelspalt
- 9) Die Unmöglichkeit des Zustandsrealismus
- 10) Empirisches Wissen über Möglichkeitsmaße in der Quantentheorie
- 11) Die nur annähernde Additivität der Wahrscheinlichkeit bei Experimenten
- 12) Wellenfunktionen und die Unschärferelation

1) Die Initialbedingung und der Urknall

Wir haben die Initialeigenschaft mit dem Symbol "UR" bezeichnet. Diese Bezeichnung wurde bewusst so gewählt, dass sie an den Urknall erinnert. Wir können die Initialbedingung $\langle \text{UR}, 0 \rangle$ jedoch nicht wirklich mit dem Urknall gleichsetzen. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Quantentheorie (als Quantenmechanik oder auch als QFT) keine allgemein relativistische Theorie darstellt, sondern nur das quantenmechanische bzw. das quantenfeldtheoretische Modelluniversum beschreibt. Einen Urknall kann es aber nur in einem allgemein relativistischen Universum geben. In den Fällen der Quantenmechanik und der QFT kann die Initialbedingung daher nur verstanden werden als eine Bedingung, die zu einem sehr frühen Zeitpunkt im Universum gegeben war und dessen geringe Entropie beschreibt.

2) Der empirische Gehalt des Monotonieprinzips

Wir haben gezeigt, dass im Falle der klassischen Mechanik das Axiom NEG (das physikalische "tertium non datur") weggelassen werden kann, ohne dass

sich der empirische Gehalt der Theorie ändert. Dabei wurde vorausgesetzt, dass die beiden Axiome MON und SEC (das Monotonieprinzip und das Ausschlussprinzip) gegeben sind. Für

$$AX := BG \cup MON \cup SEC \cup NEG$$

und

$$AX' := BG \cup MON \cup SEC$$

gilt demnach die Gleichung

$$EMP_{AX'} = EMP_{AX}$$

und das Axiom NEG erweist sich als empirisch überflüssig.

Es lässt sich darüber hinaus leicht zeigen, dass man im Falle der klassischen Mechanik, sofern nur das Ausschlussprinzip vorausgesetzt wird, auch das Axiom MON ohne Veränderung des empirischen Gehalts der Theorie weglassen kann. Auch für

$$AX'' := BG \cup SEC$$

gilt also:

$$EMP_{AX''} = EMP_{AX}$$

Auf diese Tatsache wurde im obigen Text nicht eingegangen, da sie beim Übergang zur Quantentheorie keine Rolle spielt. Im Falle der Quantentheorie wird das Axiom MON benötigt, um den empirischen Gehalt der Theorie korrekt wiederzugeben.

3) Lösung des Kochen-Specker-Problems durch Reduktion der Theorie auf den empirischen Gehalt

Die Lösung des Kochen-Specker'schen No-Go-Problems erfolgt in diesem Text durch den Übergang vom numerischen Realismus zu dem (allgemeineren) faktischen Realismus, konkret durch die Aufgabe des physikalischen "tertium non datur" als Axiom der Theorie.

Die aufgrund des Kochen-Specker-Theorems zunächst widersprüchliche Theorie wird dabei abgeschwächt, und zwar in einer solchen Weise, dass der erforderliche empirische Gehalt erhalten bleibt. Letzterer ist im wesentlichen vorgegeben durch den bekannten Quantenformalismus.

Man kann sagen, dass das Kochen-Specker-Problem der Quantentheorie hier gelöst wird, indem die Theorie auf ihren empirischen Gehalt hin reduziert wird.

4) Empirische Widerlegung der Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit mit dem Limes relativer Häufigkeit

Die Lösung des Problems der Bell'schen Ungleichung erfolgt durch eine saubere Unterscheidung zwischen den Begriffen der Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit. Dass diese Unterscheidung notwendig ist, zeigt die nachstehende Überlegung.

Wir haben festgestellt, dass sich die folgenden drei Positionen in einem logischen Widerspruch befinden:

- die ontologisch realistische Annahme, dass jede Eigenschaft $A \in \mathcal{H}$ zu jeder Zeit einen Wahrheitswert hat,
- die experimentellen Befunde, welche durch die Gleichung

$$P(\langle A \rangle | \langle [\varphi] \rangle) = |\pi_A \varphi|^2$$

ausgedrückt werden,

- die Bell'sche Ungleichung in der Form

$$P(A \wedge B) + P(B \wedge C) + P(C \wedge D) \leq P(A \wedge D) + P(B) + P(C)$$

Die Bell'sche Ungleichung folgt unmittelbar aus der Additivität von P . Diese ist wiederum eine Konsequenz der Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit mit dem Limes relativer Häufigkeit, letztlich also der Hypothese $P = \mu$, wobei P den Häufigkeitsgrad und μ den Grad der Unwahrscheinlichkeit bezeichnet.

Da wir den Realismus nicht aufgeben wollen und die experimentellen Befunde nicht ignorieren können, bleibt nur, die Hypothese $P = \mu$ als empirisch widerlegt zu betrachten.

Durch die Beobachtung der empirischen Realität sind wir somit gezwungen, die Hypothese fallen zu lassen, der zufolge die Wahrscheinlichkeit mit dem Grad der Häufigkeit gleichzusetzen ist. Jedes weitere Experiment, das eine Verletzung der Bell'schen Ungleichung nachweist, bestätigt die Widerlegung dieser Hypothese.

Bemerkung: Die Hypothese $P = \mu$ ist äquivalent zu der "Kolmogoroff'schen Hypothese" $P = \mu = \nu$. Sie ist die wesentliche Grundlage für die von Kolmogoroff angegebenen Axiome des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, insbesondere für die Forderung, ein Wahrscheinlichkeitsmaß müsse additiv und normiert sein. Durch die genannten Experimente wird somit die Kolmogoroff'sche Hypothese empirisch widerlegt. Dies ist ähnlich zu sehen wie die Widerlegung des euklidischen Parallelenaxioms durch Beobachtungen, durch die die Raumkrümmung bestätigt wird.

Bemerkung: Man kann sich an dieser Stelle fragen, warum die Hypothese $P = \mu$ und damit die Gleichsetzung von Häufigkeitsgrad und Wahrscheinlichkeit

überhaupt plausibel erscheinen kann. Der Grund hierfür liegt darin, dass (wenigstens in den Fällen, in denen der Häufigkeitsgrad definiert werden kann) die folgende Äquivalenz gilt:

$$(*) \quad P(A) \approx 0 \Leftrightarrow \mu(A) \approx 0$$

Sie besagt: Wenn ein mögliches Faktum A unwahrscheinlich ist, so wird es im Falle unabhängiger Wiederholungen nur selten auftreten und umgekehrt. Von (*) kann allerdings nicht auf die Gültigkeit der Gleichung $P(A) = \mu(A)$ geschlossen werden.

5) Relative Häufigkeiten bei extrem kleiner Wahrscheinlichkeit

Im Rahmen des Kolmogoroff'schen Konzepts der Wahrscheinlichkeit wird ein Wahrscheinlichkeitswert von $p \in [0,1]$ für ein bestimmtes Ergebnis eines Experiments so verstanden, dass man bei N unabhängigen Wiederholungen des Experiments etwa $N \cdot p$ "Treffer" erzielen wird. Dies wird als die definierende Eigenschaft des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angesehen.

Für Wahrscheinlichkeiten in der Größenordnung von $p = 1/6$ oder auch $p = 10^{-6}$ spricht zunächst nichts gegen diese Auffassung. In vielen physikalisch relevanten Fällen hat man es jedoch mit sehr viel kleineren Wahrscheinlichkeiten zu tun. So ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem Glas mit lauwarmem Wasser spontan eine Aufteilung in einen oberen Bereich mit heißem und einen unteren Bereich mit kaltem Wasser bildet, sicherlich viel kleiner als 10^{-100} .

Bei einer solch kleinen Wahrscheinlichkeit müsste man das Experiment mehr als 10^{100} mal wiederholen, um eine Trefferzahl ermitteln zu können, die nicht einfach immer nur gleich Null ist. Im realen (endlichen) Universum ist es aber gar nicht möglich, ein Experiment 10^{100} mal zu wiederholen. In diesem Fall macht es daher keinen Sinn, den Wert der Wahrscheinlichkeit mit einer relativen Häufigkeit zu begründen.

Die der Kolmogoroff'schen Theorie zugrundeliegende Gleichsetzung von Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit erweist sich hier – auch ganz unabhängig von dem Problem der Bell'schen Ungleichung in der Quantentheorie – als wenig sinnvoll.

6) Der Quantenformalismus und sein empirischer Gehalt

Die Theorie, welche gemeinhin als "Quantentheorie" bezeichnet wird, ist im wesentlichen ein Formalismus, der auf folgenden Postulaten beruht:

- Durch einen bestimmten experimentellen Aufbau wird für ein Quantensystem Q ein Quantenzustand ψ präpariert.

- Bewegt sich das Quantensystem ungestört, so ändert sich dieser Zustand gemäß einer Schrödingergleichung.
- Wenn an dem betroffenen Quantensystem eine Messung durchgeführt wird, so erlaubt der Zustand ψ die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der eines der möglichen Messergebnisse eintritt.
- Nach einer solchen Messung wird dem Quantensystem ein neuer Zustand zugeschrieben, der in bestimmter Weise von dem ursprünglichen Zustand und dem erhaltenen Messergebnis abhängt.

Um vorherzusagen, welcher Zustand durch einen bestimmten Aufbau des Experiments präpariert wird, muss man in der Regel auf halbklassische Überlegungen zurückgreifen. Es kann jedoch angenommen werden, dass bei der Wiederholung desselben Experiments auch derselbe Zustand präpariert wird: Dieselben Umstände erzeugen denselben Zustand. Halbklassisch ist in diesem Fall nur noch die Überlegung, warum hier keine anderen, sondern "dieselben" Umstände vorliegen. Dennoch wird der Zustand auch hier halbklassisch erschlossen, und es verbleibt eine gewisse Unklarheit darüber, welcher Zustand in einem gegebenen Fall anzunehmen bzw. zuzuschreiben ist. Entsprechendes gilt auch in Bezug auf die Frage, welche Größe durch einen bestimmten Messapparat gemessen wird; auch hierbei müssen halbklassische Überlegungen zugrunde gelegt werden.

Der Quantenformalismus beschreibt die Präparierung von Zuständen sowie anschließende Messungen. Insofern ist er zunächst eine Theorie über experimentelle Vorgänge, gewissermaßen also eine Theorie des Labors. Experimente sind nun aber nicht das Thema der Physik, sondern nur ihre Methode. Thema der Physik ist vielmehr das Universum und seine Eigenschaften. Der Quantenformalismus (vor allem in seiner Kopenhagener Interpretation) stellt jedoch nur eine Theorie bestimmter Handlungen dar, insbesondere experimenteller Handlungen, wie die Präparierung von Zuständen oder die Messung bzw. die Beobachtung von Messergebnissen, nicht aber eine Theorie der physikalischen Welt oder des Universums.

Allerdings ist es möglich, mittels des Quantenformalismus Vorhersagen zu machen und im Experiment zu überprüfen. Bei gegebenem Zustand sagt er bestimmte Wahrscheinlichkeiten (und damit z.B. ein bestimmtes Interferenzmuster) voraus. Insofern hat der Quantenformalismus durchaus einen empirischen Gehalt, auch wenn letztlich nicht ganz klar ist, welcher Zustand in einer gegebenen Situation präpariert wird, was genau eine Messung ist, wann eine Messung beendet ist (und somit der Zustandswechsel erfolgt) usw.

Die in diesem Sinne verstandene Quantentheorie lässt sich auch außerhalb des Labors anwenden. Wann immer man eine bestimmte Situation herstellt, kann man dies als "Aufbau eines Experiments" auffassen. Wenn dann irgendeine Eigenschaft beobachtet wird, so kann man von einer Messung sprechen.

Der Quantenformalismus ist daher auf die Beschreibung des Verhaltens technischer Systeme grundsätzlich anwendbar. Da derartige Systeme im Normalfall "deterministisch" arbeiten sollen, verwendet man hierzu solche Vorhersagen, die mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Verhalten garantieren.

Die Quantentheorie kann auf technische Systeme insbesondere auch dann angewendet werden, wenn sie definitiv zu anderen Voraussagen gelangt als die klassische Theorie. Ein Beispiel hierfür ist das Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskop, da es auf dem Tunneleffekt beruht; ein anderes Beispiel ist der Quantencomputer. Insofern erweist sich der Quantenformalismus als erfolgreich. Auch hier gilt allerdings: Bei der Frage, welcher Zustand durch eine gegebene Situation präpariert wird, ist man auf halbklassische Überlegungen angewiesen, für die der Formalismus selbst keine Grundlage bietet.

Auch die technische Anwendbarkeit zeigt, dass der Quantenformalismus einen bestimmten empirischen Gehalt hat. Würden wir unter Verwendung dieses Formalismus zu einer Vorhersage gelangen, die sich in der Praxis als unzutreffend erweist, so hätten wir den Formalismus als unbrauchbar widerlegt.

Auch wenn sich der Quantenformalismus auf technische Konstellationen, die als Experimente begreifbar sind, anwenden lässt, handelt es sich immer noch um eine Theorie des Handelns und Beobachtens. Ohne die Anwesenheit handelnder und beobachtender Subjekte kommt diese Theorie anscheinend nicht aus.

An dieser Stelle ist folgendes anzumerken: Durch das Präparieren einer bestimmten Situation wird der Quantenzustand des betrachteten Systems festgelegt. Dabei werden jedoch bestimmte Aspekte dieser Situation, die für den Zustand von Bedeutung sind, nicht explizit durch den Experimentator hergestellt. Hierzu zählt z.B. das Vorhandensein der Erde, auf der das Labor samt seinen Einrichtungen aufgebaut ist, sowie die Tatsache, dass keine zu starke kosmische Strahlung gegeben ist, die das Experiment stört (und gegebenenfalls das zu beobachtende Interferenzmuster zerstört). Ein Teil der "Präparierung" besteht somit darin, dass man bestimmte gegebene Fakten lediglich beobachtet bzw. mit Hilfe von Messungen feststellt. Auch die Beschreibung dieser Fakten erfolgt in halbklassischer Weise.

Im Extremfall, etwa wenn kosmische Objekte beobachtet werden, beschränkt sich die Präparierung ausschließlich darauf, die erforderlichen Messgeräte aufzustellen. Ohne das beobachtende Subjekt kommt die Theorie allerdings auch hier nicht aus, und sie bleibt somit eine Theorie des Handelns und Beobachtens. Der zuzuschreibende Quantenzustand ist hier insbesondere auch davon abhängig, mit welcher Genauigkeit die Beobachtung bzw. die halbklassische Beschreibung der vorgegebenen makroskopischen Situation erfolgt. So ist der Zustand grundsätzlich abhängig davon, ob vorhandene Tatsachen einbezogen werden, die auf einer Wechselwirkung mit dem zu beobachtenden Objekt beruhen,

etwa Informationen über Messresultate, die in einem anderen Labor erhoben und über einen Kommunikationskanal zur Verfügung gestellt wurden.

Insgesamt stellt der Quantenformalismus keine präzise formulierte, allgemeine und objektive Theorie des Universums dar. Dies ergibt sich zum einen daraus, dass der Formalismus in vielen Fragen unklar bleibt. Er gibt z.B. nicht klar an,

- welcher Zustand durch welche experimentellen Bedingungen präpariert wird,
- welcher Hamilton-Operator unter diesen Bedingungen das Bewegungsgesetz für das Quantensystem beschreibt,
- wann genau von einer Messung gesprochen werden kann,
- welche Größe in diesem Fall gemessen wird,
- ob die Ablesung eines Messergebnisses durch ein Subjekt erforderlich ist, damit sich der Zustand im Sinne einer Messung ändert (bzw. wann eine Messung beendet ist),
- und was ein Quantenzustand überhaupt ist.

Es ergibt sich vor allem auch daraus, dass uns der Formalismus keine "Ontologie" angibt, uns also nicht sagt, was im Universum als das Reale anzusehen ist, welches auch unabhängig von etwaigen Messungen vorhanden ist. Es fehlt die Modellierung der Realität. Eine halbklassische Beschreibung kann aus diesem Grunde auch nicht als Approximation an eine mögliche exakte quantentheoretische Beschreibung verstanden werden.

Als Grundlage anderer naturwissenschaftlicher Theorien ist der Quantenformalismus somit nicht geeignet. Er kann zwar – als eine Theorie über bestimmte Handlungen und Beobachtungen – dazu dienen, technische Geräte zu entwickeln. Jedoch lässt sich auf der Basis dieses Formalismus beispielsweise die Theorie der biologischen Evolution (als ein Vorgang zufälliger Mutationen und anschließender Selektion) ebensowenig verstehen wie etwa ein allgemeines Prinzip der Entropiezunahme abgeschlossener Systeme. Der Grund hierfür liegt insbesondere darin, dass das zufällige Verhalten der Materie in diesem Formalismus immer nur dann greift, wenn ein Faktum beobachtet wird. So scheint es, dass die Existenz beobachtender Subjekte eine der Voraussetzungen für das Auftreten von Zufälligkeit ist.

In dem vorliegenden Text wird eine Theorie formuliert, die auf halbklassische Beschreibungen nicht angewiesen ist, die das Universum und seine möglichen Eigenschaften vielmehr in eindeutiger Weise in einem quantentheoretischen Modell abbildet und präzise Gesetze hierüber formuliert. Dies bedeutet, dass eine klare, wenn auch abstrakte Ontologie angegeben wird. Halbklassische

Beschreibungen können hier allenfalls verstanden werden als Approximationen an die eigentliche quantentheoretische Darstellung.

Entscheidend ist dabei, dass der empirische Gehalt des Quantenformalismus in einer allgemeinen Theorie des Universums und seiner Eigenschaften wiedergegeben wird, ohne dass es dabei um bestimmte Handlungen wie "präparieren" oder "messen" geht. Hierzu haben wir gezeigt, dass sich der bekannte Quantenformalismus aus der angegebenen Theorie ableiten lässt. Die Theorie liefert daher auch dieselben Vorhersagen für den Fall beobachtbarer Alternativen und somit dieselben Möglichkeiten, technische Geräte zu planen und zu konstruieren. Darüber hinaus handelt es sich um eine Theorie "ohne Subjekte", das heißt sie kommt in ihren grundlegenden Aussagen ohne Subjekte aus, die Systeme präparieren und daran Messungen ausführen.

Die Theorie ist insbesondere auch geeignet als Grundlage für die Formulierung anderer naturwissenschaftlicher Theorien. Dabei werden die grundlegenden Gesetze der Physik auf speziellere Themen angewendet. Im Idealfall können die Gesetze für diese Themenbereiche aus den allgemeinen Gesetzen der physikalischen Theorie als Spezialfälle abgeleitet werden.

Jede sinnvolle Deutung des Quantenformalismus ist daran zu messen, ob sie den empirischen Gehalt dieses Formalismus wiedergibt, ob sie eine "Ontologie" angibt, indem die Realität (die mikroskopische ebenso wie die makroskopische) innerhalb eines eindeutig angegebenen Modells dargestellt wird, und ob sie präzise formuliert ist, etwa durch die Verwendung der mathematisch-logischen Terminologie.

Fassen wir zusammen: Der bekannte Quantenformalismus beschreibt primär die Ergebnisse von Messungen, die an Quantensystemen durchgeführt werden, welche durch einen bestimmten experimentellen Aufbau präpariert wurden. Er lässt sich aber auch zu Vorhersagen über die Funktion technischer Systeme verwenden. Seine Aussagen sind grundsätzlich empirisch widerlegbar und somit hat er einen empirischen Gehalt. Aufgrund der fehlenden quantentheoretischen Modellierung des Realen, der anscheinend unvermeidlichen Rolle der Subjekte sowie der prinzipiellen Notwendigkeit, die für eine Präparierung bzw. Messung erforderlichen Umstände halbklassisch zu beschreiben, kann man ihn jedoch nicht als allgemeine und objektive Theorie des Universums auffassen. In diesem Sinne handelt es sich nicht um eine physikalische Theorie "der Welt", die als Basistheorie der Naturwissenschaften geeignet wäre.

7) **Photonenmuster als Dokumente und die Aufzeichnung von Ereignissen**

Für den Fall empirisch zugänglicher Ereignisse haben wir das Vorhandensein von Dokumenten zu einem bestimmten Zeitpunkt t gefordert. Die zugehörigen Dokumentbeziehungen müssen dabei in bestimmter Weise unabhängig voneinander bestehen. Die Aussagen dieses Textes über empirisch zugängliche Ereignisse gelten allerdings unabhängig davon, ob uns die jeweiligen Dokumente

tatsächlich bekannt sind oder nicht. In vielen Fällen sind makroskopische Dokumente der geforderten Art vorhanden, ohne dass wir sie kennen. Auf die Kenntnis dieser Dokumente kommt es hier auch gar nicht an: Es genügt, dass es sie gibt.

Bei diesen Dokumenten kann es sich zum Beispiel um Photonenstrukturen handeln, die als Bild der betrachteten Ereignisse existieren, ohne gesehen zu werden. Entscheidend ist dabei, dass diese Dokumente gleichzeitig vorhanden und paarweise miteinander vertauschbar sind.

In vielen Fällen besteht die empirische Zugänglichkeit bestimmter Ereignisse nicht nur von einem Zeitpunkt t aus, sondern für alle t aus einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$. In diesem Fall können wir von der "Aufzeichnung" der Ereignisse sprechen. Ein typischer Fall hierfür ist die Speicherung der Dokumente mittels elektronischer Medien oder mit Hilfe von Texten, die auf Papier gedruckt sind.

8) Störung des Interferenzmusters durch Messung am Doppelspalt

Wir wollen hier die Rolle des Quantenzustands und seiner Veränderungen am Beispiel eines Doppelspaltversuchs diskutieren. Hierzu sei EB die Bedingung, welche den Aufbau des folgenden Experiments beschreibt: Es ist eine Elektronenquelle vorhanden, von der aus sich ein Strom von Teilchen in die Richtung eines Doppelspaltsystems bewegt. Hinter diesem System werden die Elektronen einzeln registriert. Dort bildet sich im Laufe der Zeit ein Interferenzmuster.

Der Teilchenstrom wird nun vor dem Spalt "beleuchtet" mittels eines Photonenfeldes F , dessen Intensität variiert werden kann. Trifft ein Photon auf ein Elektron, so wird es gestreut und kann mittels einer dafür vorgesehenen Apparatur registriert werden. Anhand dieser Messung kann auf den Ort des Elektrons geschlossen werden, insbesondere darauf, vor welchem der beiden Spalte es sich befunden hat.

Ist nun das Photonenfeld sehr schwach, so stört es die Bewegung des einzelnen Elektrons nach der Schrödingergleichung nicht. In diesem Fall ist die Position des Elektrons nicht beobachtbar und wir erhalten ein ungestörtes Interferenzmuster. Die experimentelle Bedingung für diese Situation können wir mit $EB_{F \approx 0}$ bezeichnen. Der für die Beschreibung des Elektrons relevante Quantenzustand ist in diesem Fall der bedingte Zustand in Bezug auf die Bedingung $EB_{F \approx 0}$.

Der Fall liegt hier ähnlich wie bei der Planetenbewegung: Da die Störung der Planeten – etwa durch den Sonnenwind oder die kosmische Strahlung – nur gering ist, können wir das Newton'sche Bewegungsgesetz in reiner Form beobachten.

Physikalische Experimente führt man nach Möglichkeit immer unter solchen quasi idealen Voraussetzungen durch, da sich nur unter derartigen Bedingungen

"reine" Naturgesetze (wie das Newton'sche Gesetz oder die Schrödingergleichung) beobachten lassen.

Wenn wir nun das Photonenfeld deutlich verstärken, so dass (halbklassisch formuliert) praktisch jedes Elektron auf mindestens ein Photon trifft, wird die Position des Elektrons grundsätzlich beobachtbar. Zugleich ändert dies den Quantenzustand, der das Elektron beschreibt, und das zuvor vorhandene Interferenzmuster wird zerstört. Der bedingte Quantenzustand in Bezug auf die Bedingung $EB_{F \approx 0}$ wird hier ersetzt durch den Zustand in Bezug auf die Bedingung $EB_{F \gg 0}$, die das Vorhandensein des starken Photonenfeldes beschreibt.

Je genauer die Position der Elektronen beobachtet werden soll, desto stärker muss das Photonenfeld sein und desto stärker ist damit auch die Störung der Teilchenbewegung.

Ein "Quantensprung" im Sinne einer "Reduktion der ψ -Funktion" findet hier jedoch nicht statt. Relevant für die Beschreibung des Elektrons ist nach wie vor der bedingte Quantenzustand in Bezug auf die experimentelle Bedingung. Dieser Zustand ist, wie jeder Quantenzustand, ein statistischer Operator.

Wenn wir nun die gemessene Position des Elektrons ablesen, so ändert sich hierdurch der bedingte Zustand, für den wir uns interessieren. An die Stelle der experimentellen Bedingung tritt die logische Konjunktion aus dieser Bedingung und der durch die Ablesung der Messung erhaltenen Aussage. Falls die mit der Ablesung des Messergebnisses verbundene Zunahme unseres Wissens sprunghaft erfolgt, kann man hier von einem "Quantensprung" oder – sofern der resultierende Zustand ein reiner Zustand ist – von einer "Reduktion auf eine ψ -Funktion" sprechen.

Wir haben es hier mit zwei unterschiedlichen Prozessen zu tun: Durch das Photonenfeld wird die Position des Elektrons messbar gemacht. Die (Mess-) Wechselwirkung bewirkt objektiv eine Störung des Interferenzmusters und dementsprechend eine Änderung der bedingten Quantenzustände. Die Ablesung des Messergebnisses hingegen führt zu einem Wechsel des für den Beobachter relevanten Zustands und damit zu einem "Quantensprung", der die Form einer "Reduktion der ψ -Funktion" haben kann.

9) Die Unmöglichkeit des Zustandsrealismus

Bei dem Quantenzustand, mit dem die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse einer Messung an einem Quantensystem Q vorhergesagt werden können, der also z.B. in der bekannten Formel

$$p_A = |\pi_A \phi|^2$$

auftritt, handelt es sich stets um einen bedingten Zustand. Als Bedingungen fungieren dabei die Voraussetzungen des Experiments. Da diese Bedingungen nicht nur das Quantensystem Q betreffen, sondern auch den Rest der Welt (und

somit bestimmte Eigenschaften des Universums), kann dieser bedingte Zustand nicht als ein Attribut von Q verstanden werden. Dies schließt jede zustandsrealistische Interpretation aus, die davon ausgeht, dass das Quantensystem Q einen bestimmten Quantenzustand als eine seiner Eigenschaften "besitzt".

10) Empirisches Wissen über Möglichkeitsmaße in der Quantentheorie

Wir haben argumentiert, dass man als äußeres Maß nicht $\mu^{1/2}$, sondern μ zugrunde legt, weil μ das stärkere äußere Maß ist. Ein weiterer Grund für diese Wahl besteht darin, dass wir für ein Experiment, dessen Voraussetzungen wie in Kapitel 34 durch $G \wedge N$ beschrieben werden, die Gleichung

$$P_e = \mu_e$$

erhalten, wobei μ_e definiert ist als

$$\mu_e(A) := \mu(A \mid G \wedge N)$$

für jedes mögliche experimentelle Ergebnis $A \in \mathcal{A}_e$. Die Funktion P_e bezeichnet den ebenfalls auf \mathcal{A}_e definierten Häufigkeitsgrad. Durch eine ausreichende Anzahl von Wiederholungen des Experiments lässt sich $P_e(A)$ für $A \in \mathcal{A}_e$ empirisch bestimmen, jeweils mit einer gewissen Genauigkeit. Indirekt wird damit auch $\mu_e(A)$ empirisch bestimmt.

11) Die nur annähernde Additivität der Wahrscheinlichkeit bei Experimenten

Im Kapitel über makroskopische Experimente haben wir festgestellt, dass die Beschränkung des durch die Voraussetzungen des Experiments bedingten Möglichkeitsmaßes auf die Algebra der experimentellen Ergebnisse ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß ergibt. Hier gilt also die Additivität der Wahrscheinlichkeit im Sinne der Kolmogoroff'schen Wahrscheinlichkeitstheorie.

Da alle Dokumentbeziehungen, die dieser Überlegung zugrunde liegen, in der Praxis stets nur annähernd gelten, ergibt sich diese Additivität ebenfalls nur näherungsweise. Dies kann in Analogie zu den folgenden Tatsachen gesehen werden:

- Die Winkelsumme in einem räumlichen Dreieck beträgt näherungsweise 180° , sofern das Gravitationsfeld in dem betrachteten Raumbereich schwach ist. Dieses Feld ist von der Masseverteilung im Universum abhängig. Nur in einem vollkommen leeren Universum gilt die euklidische Geometrie in exakter Form.
- Die Schrödingergleichung gilt für ein Quantensystem Q normalerweise nur näherungsweise. Lediglich für vollkommen abgeschlossene Systeme gilt sie

exakt. Das einzige vollkommen abgeschlossene System ist aber das Universum als Ganzes.

- Der durch bestimmte experimentelle Voraussetzungen festgelegte bedingte Quantenzustand eines Subsystems Q ist stets ein gemischter Zustand. Im Idealfall hat dieser Zustand den Rang Eins, in der Praxis ist dies allerdings immer nur näherungsweise der Fall.

Als Fazit ist festzuhalten: So wie die euklidische Geometrie eine ideale Situation beschreibt, die im realen Universum niemals eintritt, so gilt auch die Kolmogoroff'sche Wahrscheinlichkeitstheorie niemals exakt. Dennoch lassen sich beide Theorien – als Näherungen an die realen Verhältnisse – in bestimmten Fällen sinnvoll anwenden.

12) Wellenfunktionen und die Unschärferelation

Im Kapitel über die Rolle der "Teilchen" in der QFT hatten wir gesehen, dass ein solches "Teilchen" durch eine Wellenfunktion φ zu beschreiben ist. Damit sind zugleich Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathcal{W}_\varphi(X)$ für den Ort X und $\mathcal{W}_\varphi(P)$ für den Impuls P festgelegt. Hierzu lassen sich die Erwartungswerte $E_\varphi(X) \in \mathbb{R}$ und $E_\varphi(P) \in \mathbb{R}$ eindeutig definieren. Somit "besitzt" das "Teilchen" zugleich einen bestimmten Wert für den Ort und den Impuls. Auf den ersten Blick scheint dies im Widerspruch zur Unschärferelation zu stehen. Allerdings handelt es sich hier zwar um bestimmte Werte, die dem "Teilchen" formal zugeordnet werden können, jedoch wird die Dynamik des "Teilchens" durch diese Werte nicht eindeutig festgelegt. Die Zukunft des "Teilchens" bleibt also weiterhin "unbestimmt", so dass die Unschärferelation ihre Bedeutung behält, trotz der realen Existenz eindeutiger Werte $E_\varphi(X)$ für den Ort und $E_\varphi(P)$ für den Impuls des "Teilchens".

56. Mögliche Ergänzungen zur Quantentheorie

Wir formulieren einige Gedanken zu möglichen Erweiterungen der hier dargestellten realistischen Quantentheorie. Im einzelnen geht es um folgende Themen:

- 1) Ω_\emptyset als sinnvolle Schreibweise für Ω_o usw.
- 2) Alternative Schreibweise für empirische Materialien
- 3) Numerische Größen als parametrisierte Familien von paarweise vertauschbaren Eigenschaften
- 4) Absolute Quantenzustände ohne Initialeigenschaft
- 5) Modellierung des Realen mit Vektoren statt mit Unterräumen des Hilbert-raums
- 6) Ein Lösungsansatz für das Kochen-Specker-Problem: Beschränkung des Realen auf eine dichte Teilmenge von Unterräumen

1) Ω_\emptyset als sinnvolle Schreibweise für Ω_o usw.

Zu einem gegebenen Axiomensystem AX wurde Ω_{AX} definiert als:

$$\Omega_{AX} := \{ \omega \in \Omega_o \mid \forall A \in AX (\omega \in A) \}$$

Falls $AX \neq \emptyset$ ist, kann man dies kurz schreiben als:

$$\Omega_{AX} = \bigcap (AX)$$

Für den Fall $AX = \emptyset$ erhalten wir hingegen einfach:

$$\Omega_\emptyset = \Omega_o$$

Aus diesem Grunde könnten wir anstelle von Ω_o stets auch Ω_\emptyset schreiben. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Symbole A_\emptyset und $\langle A, t \rangle_\emptyset$ definieren und anstelle von A_o bzw. $\langle A, t \rangle_o$ verwenden.

2) Alternative Schreibweise für empirische Materialien

Es sei $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ ein empirisches Material mit

$$\mathcal{B} = \{(A_1, t_1), \dots, (A_k, t_k)\}$$

Hierfür gilt dann

$$F_{\mathcal{B}} = \forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o$$

Anstelle von $F_{\mathcal{B}}$ kann man daher in naheliegender Weise auch $\forall(\mathcal{B})$ oder einfach $\forall\mathcal{B}$ schreiben.

3) Numerische Größen als parametrisierte Familien von paarweise vertauschbaren Eigenschaften

Durch eine numerische Größe L ist grundsätzlich jeder Borel-messbaren Teilmenge A von \mathbb{R} eine binäre Eigenschaft zugeordnet, welche der Aussage " $L \in A$ " entspricht. Mit der Borelalgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R} entspricht L daher einer Abbildung

$$L' : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{U}$$

Dies gilt für die Quantentheorie ebenso wie für die klassische Mechanik. Eine numerische Größe kann daher stets als eine durch die Menge $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ parametrisierte Familie von Eigenschaften aufgefasst werden. Im Falle der Quantentheorie sind diese Eigenschaften paarweise miteinander vertauschbar. Eine numerische Observable in der Quantentheorie ist daher aufzufassen als eine durch die Menge $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ parametrisierte Familie aus paarweise miteinander vertauschbaren Eigenschaften.

Bemerkung: Es sei L eine Observable und ΔL_j seien Teilintervalle von \mathbb{R} . Es sei $A_j < \mathcal{H}$ der Unterraum des Hilbertraums, welcher der Aussage $L \in \Delta L_j$ entspricht. Es gilt dann:

$$\bigcap_j \Delta L_j = \emptyset \Rightarrow \perp_j A_j$$

4) Absolute Quantenzustände ohne Initialeigenschaft

Wir haben sämtliche Quantenzustände aus der Initialeigenschaft U_R abgeleitet. Danach ist insbesondere

$$W_{V;0|\emptyset} := \pi_{U_R} / \text{tr } \pi_{U_R}$$

der absolute Quantenzustand des Universums zur Zeit 0. Man kann dies auch etwas anders sehen und diesen Zustand bereits als bedingten Zustand (bedingt durch die Initialbedingung) auffassen. Der absolute Zustand wäre dann formal als

$$Z_{V;0|\emptyset} := I / \dim \mathcal{H}$$

zu definieren, wobei I die identische Abbildung auf \mathcal{H} bezeichnet. Analog ließe sich der probabilistische Zustand im Falle der klassischen Mechanik definieren als

$$Z_{V;0|\emptyset} := \mathbf{1}_Z / \lambda(Z)$$

Diese beiden Definitionen sind formal nur dann möglich, wenn der Hilbertraum \mathcal{H} endlich-dimensional ist bzw. der Phasenraum Z ein endliches Lebesguemaß hat. Im Falle der Ableitung der probabilistischen Zustände aus der Initialbedingung mussten wir hingegen nur annehmen, dass $\dim \text{UR} < \infty$ bzw. $\lambda(\text{UR}) < \infty$ ist, um zu erreichen, dass sämtliche bedingten Zustände für jedes Teilsystem Q des Universums und zu jedem Zeitpunkt t eindeutig definiert sind.

Das formale Problem können wir umgehen, indem wir auf die Normierung der probabilistischen Zustände generell verzichten und setzen:

$$Y_{V;0|\emptyset} := I$$

bzw.

$$Y_{V;0|\emptyset} := \mathbf{1}_Z$$

Auch die bedingten Zustände für alle Teilsysteme wären dann ohne Normierung zu definieren.

Bemerkung: So wie der Zustand hier im allgemeinen nicht normiert ist, so kann man auch als Möglichkeitsmaß ein nicht normiertes äußeres Maß μ akzeptieren. Letztlich kommt es nur darauf an, dass die Häufigkeitsgrade, sofern sie sich auf einer Algebra $\mathcal{A}_e \subset \mathcal{A}$ definieren lassen, normiert sind. Weder für probabilistische Zustände, wie z.B. (gemischte) Quantenzustände, mit denen Häufigkeitsgrade vorhergesagt werden können, noch für das Konzept der Unwahrscheinlichkeit, das durch ein Möglichkeitsmaß beschrieben wird, spielt die Normierung eine wesentliche Rolle.

Für den Fall der Quantentheorie müssten wir die Formel zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit abändern in

$$P(E_A | EB) = \text{tr } \pi_A Y_{Q;t|EB} / \text{tr } Y_{Q;t|EB}$$

für die Messung des Ergebnisses A am Quantensystem Q zur Zeit t unter der experimentellen Bedingung EB , welche auch die Initialbedingung umfasst. (Auf der rechten Seite der Gleichung steht EB für eine Folge von Ereignissen, auf der linken Seite hingegen für das entsprechende mögliche Faktum.) Falls auch hier der Nenner keinen endlichen Wert hat, weil zum Beispiel alle beteiligten Eigenschaften, einschließlich der Initialeigenschaft, translationssymmetrisch formuliert sind und folglich unendlich-dimensionalen Unterräumen entsprechen, so kann man einen "verallgemeinerten Quotienten" etwa wie folgt bilden: Es sei \mathcal{H}_n eine Folge von endlich-dimensionalen Hilberträumen, die \mathcal{H} in einer bestimmten Weise monoton approximieren. Mit $I(n)$ anstelle von I werden die Zustände $Y_{Q;t|EB}(n)$ analog zu $Y_{Q;t|EB}$ definiert. Die Formel zur Berechnung der genannten Wahrscheinlichkeit lautet dann:

$$P(E_A | EB) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{tr } \pi_A Y_{Q;t|EB}(n) / \text{tr } Y_{Q;t|EB}(n)]$$

Der Quotient kann in diesem Fall stets gebildet werden, und unter "vernünftigen" Rahmenbedingungen, beispielsweise wenn auch A translationssymmetrisch ist, existiert der angegebene Limes. Man könnte hier – zu jedem n – die normierten Zustände bilden mittels:

$$Z_{Q;t|EB}(n) := Y_{Q;t|EB}(n) / \text{tr } Y_{Q;t|EB}(n)$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit erfolgt dann mit:

$$P(E_A | EB) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr } \pi_A Z_{Q;t|EB}(n)$$

Diese Überlegungen zeigen auch, dass die Annahme einer endlich-dimensionalen Initialeigenschaft zwar sehr praktisch, aber nicht unbedingt notwendig ist.

5) Modellierung des Realen mit Vektoren statt mit Unterräumen des Hilbertraums

Aus dem Monotonieprinzip der Quantentheorie lässt sich für alle $A < \mathcal{H}$ und $t \in T$ leicht die folgende Äquivalenz ableiten:

$$(A,t) \text{ wahr} \Leftrightarrow \exists_{B < A} (B,t) \text{ wahr}$$

Es stellt sich hier die Frage, ob man diese Aussage verschärfen kann zu:

$$(A,t) \text{ wahr} \Leftrightarrow \exists_{\psi \in A} ([\psi],t) \text{ wahr}$$

Man könnte versuchen, diese Aussage als ein neues Axiom PSI in die Theorie aufzunehmen, und es ist nicht unplausibel zu vermuten, dass sich dabei der empirische Gehalt der Theorie nicht verändert, sowohl in Bezug auf die deterministischen Gesetze als auch auf das probabilistische Gesetz.

Für den Fall, dass sich diese Vermutung beweisen lässt, hätten wir eine einfachere Darstellung des deterministischen Zustands der Quantentheorie. Mit

$$\mathcal{H}_1 := \{ \psi \in \mathcal{H} \mid |\psi| = 1 \}$$

wäre ein solcher dann gegeben als eine Abbildung

$$z : \mathcal{H}_1 \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

die neben der selbstverständlichen Forderung

$$[\varphi] = [\psi] \Rightarrow z(\varphi) = z(\psi) \quad (\text{für } \varphi, \psi \in \mathcal{H}_1)$$

auch das Ausschlussprinzip in der folgenden Form erfüllt:

Für alle $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{H}_1$ und $D_1, D_2, \dots \in \mathcal{U}$ mit $\forall_j [\varphi_j \in D_j]$ und $\perp_j D_j$ gibt es ein j mit $z(\varphi_j) = \text{falsch}$.

Würden wir die Wahrheitswerte wahr und falsch durch die Farben weiß und schwarz darstellen, so entspräche jeder Zustand z einer weißen Teilfläche auf der Oberfläche der Einheitskugel in \mathcal{H} . Das Bewegungsgesetz (d.h. die Schrödingergleichung) würde beschrieben durch unitäre Transformationen U_t auf dieser Kugel. Das Volumen der weißen Teilfläche bliebe daher über die Zeit konstant (jedenfalls im Falle $\dim \mathcal{H} < \infty$), und wir hätten somit einen zweiten Liouville'schen Satz.

6) Ein Lösungsansatz für das Kochen-Specker-Problem: Beschränkung des Realen auf eine dichte Teilmenge von Unterräumen

Der Beweis von T.4.11 (und hierbei insbesondere die Beweise zu den Lemmata L.4.11 und L.4.12) beruht im wesentlichen darauf, dass, ausgehend von zwei Vektoren x und y , für die der Wahrheitswert wahr angenommen wird, die Menge derjenigen Vektoren betrachtet wird, die mit x und y ein rechtwinkliges Dreieck auf der Einheitskugel bilden. Die Menge dieser Vektoren kann – in Anlehnung an den Thaleskreis in einer Ebene – als Thaleskurve auf der Kugel bezeichnet werden. Entscheidend für den weiteren Verlauf des Beweises ist, dass für die Elemente dieser Menge das physikalische "tertium non datur", d.h. das Axiom NEG angenommen wird.

Da nun die Thaleskurve das Maß Null hat, könnte man versuchen, eine bestimmte Menge von Vektoren aus dem Axiom NEG herauszunehmen, etwa indem man als "real" nicht alle Eigenschaften der Form $[\varphi]$ zulässt, sondern nur eine dichte Teilmenge innerhalb der Menge dieser Vektoren. In ähnlicher Weise könnte man so zu einer dichten Teilmenge \mathcal{U}' innerhalb der Menge \mathcal{U} aller Unterräume von \mathcal{H} gelangen, so dass die Annahme des Axioms NEG auf \mathcal{U}' (zusammen mit MON und SEC) nicht mehr zu einem logischen Widerspruch im Sinne des Kochen-Specker-Theorems führt.

Als Metrik auf \mathcal{U} wäre dabei die euklidische Metrik auf der Menge der zugehörigen Projektionsoperatoren zu verwenden. Diese Metrik lässt sich (mindestens für den Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$) problemlos definieren. Ist \mathcal{U}' in Bezug auf diese Metrik eine dichte Teilmenge von \mathcal{U} , so können alle physikalischen Eigenschaften auch in \mathcal{U}' mit ausreichender Genauigkeit dargestellt werden.

Dieser Vorgehensweise steht das folgende Problem entgegen: Es kommt nicht nur darauf an, dass die Annahme des Axioms NEG zu keinem Widerspruch führt und auch nichts am empirischen Gehalt der Theorie ändert. Vielmehr müsste auch das probabilistische Gesetz angepasst werden.

Hierzu bezeichne NEG' das physikalische "tertium non datur" für alle Elemente von \mathcal{U}' . Ferner sei

$$\Omega' := \Omega \cap \bigcap (\text{NEG}')$$

sowie

$$\mathcal{A}' := \{ A \cap \Omega' \mid A \in \mathcal{A} \}$$

die Spuralgebra von \mathcal{A} auf Ω' . Man muss nun übergehen von dem äußeren Maß μ zu einem Maß μ' auf \mathcal{A}' , das formal mit

$$\mu'(A') := \mu(A' \mid \text{NEG}') \quad (\text{für } A' \in \mathcal{A}')$$

beschrieben werden kann.

Da μ stetig ist, hilft die Beschränkung von NEG auf die dichte Teilmenge \mathcal{U}' von \mathcal{U} hier nicht weiter. Auch wenn sich kein logischer Widerspruch der deterministischen Gesetze ableiten lässt, kann doch das probabilistische Gesetz in einer solchen Weise verfälscht werden, dass es den empirischen Befunden widerspricht. Eine korrekte Theorie erhält man dann so nicht.

B03. Klassische Mechanik

Für $\omega \in \Omega_0$ sowie $F, G \in \mathcal{A}_0$ bzw. $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}_0$ können leicht die folgenden Lemmata gezeigt werden:

$$\underline{\text{L.3.1}} \quad \omega \in (F \wedge G) \Leftrightarrow [\omega \in F \wedge \omega \in G]$$

$$\underline{\text{L.3.2}} \quad \omega \in (F \vee G) \Leftrightarrow [\omega \in F \vee \omega \in G]$$

$$\underline{\text{L.3.3}} \quad \omega \in (\neg F) \Leftrightarrow \neg [\omega \in F]$$

$$\underline{\text{L.3.4}} \quad \omega \in (F \rightarrow G) \Leftrightarrow [\omega \in F \Rightarrow \omega \in G]$$

$$\underline{\text{L.3.5}} \quad \omega \in (F \leftrightarrow G) \Leftrightarrow [\omega \in F \Leftrightarrow \omega \in G]$$

$$\underline{\text{L.3.6}} \quad \omega \in (\forall_j F_j) \Leftrightarrow \forall_j [\omega \in F_j]$$

Für $\omega \in \Omega_{AX}$ und $A, B \in \mathcal{U}$ bzw. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$ sowie $t \in T$ gelten außerdem:

$$\underline{\text{L.3.7}} \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \neg [\omega \in \langle A, t \rangle_0 \wedge \omega \in \langle B, t \rangle_0]$$

Beweis: Der Beweis erfolgt, indem man in SEC A_1 gleich A und alle anderen A_j gleich B setzt. **QED**

$$\underline{\text{L.3.8}} \quad Z = \bigcup_j A_j \Rightarrow \exists_j [\omega \in \langle A_j, t \rangle_0]$$

Beweis: Gäbe es unter der gegebenen Prämisse kein solches j , so würde für alle j gelten:

$$\omega \notin \langle A_j, t \rangle_0$$

Wegen $\forall_{F \in \text{NEG}} \omega \in F$ ist

$$\omega \in (\langle A_j, t \rangle_0 \vee \langle Z \setminus A_j, t \rangle_0)$$

Mit L.3.2 folgt (für alle j)

$$\omega \in \langle Z \setminus A_j, t \rangle_0$$

und hieraus mittels L.3.6

$$\omega \in (\forall_j \langle Z \setminus A_j, t \rangle_0)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \bigcap_j (Z \setminus A_j) &= Z \setminus \bigcup_j A_j \\ &= Z \setminus Z \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

und

$$\forall_{F \in \text{SEC}} \omega \in F$$

folgt andererseits

$$\omega \in \neg(\forall_j \langle Z \setminus A_j, t \rangle_0)$$

und somit ein Widerspruch. **QED**

L.3.9 $Z = \bigcup_j A_j \wedge A_j$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \exists_1 [\omega \in \langle A_j, t \rangle_o]$

Beweis: L.3.9 folgt unmittelbar aus L.3.8 und L.3.7

QED

Theorem T.3.1 $\Omega = \Omega_{AX}$

Beweis: Zu zeigen ist zunächst $\Omega \subset \Omega_{AX}$. Wegen

$$\Omega = \{ \omega_p \mid p \in \text{Pf}_\beta \}$$

genügt es also zu zeigen: Für alle $p \in \text{Pf}_\beta$ ist $\omega_p \in \Omega_{AX}$. Es sei somit $p \in \text{Pf}_\beta$ gegeben.

Es ist dann für jedes $A \in \mathcal{U}$ sowie $t \in T$:

$$p(0) \in A \Leftrightarrow \beta_t(p(0)) \in \beta_t(A) \quad (\text{da } \beta_t \text{ bijektiv})$$

$$\Leftrightarrow p(t) \in \beta_t(A) \quad (\text{da } p \in \text{Pf}_\beta)$$

$$(A, 0) \in \omega_p \Leftrightarrow (\beta_t(A), t) \in \omega_p \quad (\text{Def. von } \omega_p)$$

$$\omega_p \in \langle A, 0 \rangle_o \Leftrightarrow \omega_p \in \langle \beta_t(A), t \rangle_o \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$$

$$\omega_p \in (\langle A, 0 \rangle_o \leftrightarrow \langle \beta_t(A), t \rangle_o) \quad (\text{L.3.5})$$

Da A und t beliebig gewählt werden können, folgt:

$$(01) \quad \forall_{F \in \text{BG}} [\omega_p \in F]$$

Für beliebige $A, B \in \mathcal{U}$ mit $A \subset B$ sowie $t \in T$ ist:

$$p(t) \in A \Rightarrow p(t) \in B$$

$$(A, t) \in \omega_p \Rightarrow (B, t) \in \omega_p \quad (\text{Def. von } \omega_p)$$

$$\omega_p \in \langle A, t \rangle_o \Rightarrow \omega_p \in \langle B, t \rangle_o \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$$

$$\omega_p \in (\langle A, t \rangle_o \rightarrow \langle B, t \rangle_o) \quad (\text{L.3.4})$$

Da A , B und t beliebig (mit $A \subset B$) gewählt werden können, folgt:

$$(02) \quad \forall_{F \in \text{MON}} [\omega_p \in F]$$

Für beliebige $A_j \in \mathcal{U}$ mit $\bigcap_j A_j = \emptyset$ sowie $t \in T$ ist:

$$p(t) \notin \bigcap_j A_j$$

$$\neg \forall_j [p(t) \in A_j]$$

$$\neg \forall_j [(A_j, t) \in \omega_p] \quad (\text{Def. von } \omega_p)$$

$$\neg \forall_j [\omega_p \in \langle A_j, t \rangle_o] \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o)$$

$$\omega_p \in \neg(\forall_j \langle A_j, t \rangle_o) \quad (\text{L.3.3 und L.3.6})$$

Da die A_j sowie t beliebig (mit $\bigcap_j A_j = \emptyset$) gewählt werden können, folgt:

$$(03) \quad \forall_{F \in \text{SEC}} [\omega_p \in F]$$

Für beliebige $A \in \mathcal{U}$ sowie $t \in T$ ist:

$$\begin{aligned} p(t) \in A \vee p(t) \in Z \setminus A \\ (A, t) \in \omega_p \vee (Z \setminus A, t) \in \omega_p & \quad (\text{Def. von } \omega_p) \\ \omega_p \in \langle A, t \rangle_o \vee \omega_p \in \langle Z \setminus A, t \rangle_o & \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \\ \omega_p \in (\langle A, t \rangle_o \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_o) & \quad (\text{L.3.2}) \end{aligned}$$

Da A und t beliebig gewählt werden können, folgt:

$$(04) \quad \forall_{F \in \text{NEG}} [\omega_p \in F]$$

Aus (01) bis (04) folgt unmittelbar

$$(05) \quad \forall_{F \in \text{AX}} [\omega_p \in F]$$

und somit

$$\omega_p \in \Omega_{\text{AX}} \quad \text{QED } (\Omega \subset \Omega_{\text{AX}})$$

Zu beweisen bleibt nun: $\Omega_{\text{AX}} \subset \Omega$. Es sei daher $\omega \in \Omega_{\text{AX}}$ beliebig gewählt, und wir müssen zeigen, dass $\omega \in \Omega$ ist. Zu jedem $M \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir das halboffene reelle Intervall

$$I_{M;k} := ((k-1) \cdot 2^{-M}, k \cdot 2^{-M}]$$

Es ist dann

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{M;k} \quad (\text{für alle } M)$$

Zu Indizes k_1, \dots, k_{6N} aus \mathbb{Z} definieren wir das kartesische Produkt

$$I_{M;k_1, \dots, k_{6N}} := I_{M;k_1} \times \dots \times I_{M;k_{6N}}$$

Damit wird der Zustandsraum Z zu jedem M dargestellt als disjunkte Vereinigung von würfelförmigen Mengen:

$$Z = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{Z}} \dots \bigcup_{k_{6N} \in \mathbb{Z}} I_{M;k_1, \dots, k_{6N}}$$

Wenn wir die Indexmenge

$$\text{IND} := \mathbb{Z}^{6N}$$

bilden und ein $6N$ -Tupel (k_1, \dots, k_{6N}) mit \mathbf{k} abkürzen, so können wir dafür auch schreiben:

$$Z = \bigcup_{\mathbf{k} \in \text{IND}} I_{M;\mathbf{k}}$$

Mit L.3.9 können wir nun schließen:

$$\forall_{M \in \mathbb{N}} \exists_{\mathbf{k} \in \text{IND}} [\omega \in \langle I_{M;\mathbf{k}}, 0 \rangle_o]$$

Wenn wir das jeweilige Element $\mathbf{k} \in \text{IND}$ als \mathbf{k}_M bezeichnen, so können wir definieren

$$I_M := I_{M;\mathbf{k}_M}$$

Damit erhalten wir

$$\forall_{M \in \mathbb{N}} [\omega \in \langle I_M, 0 \rangle_o]$$

und mit L.3.6

$$\omega \in (\forall_M \langle I_M, 0 \rangle_o)$$

Wegen $\forall_{F \in \text{SEC}} \omega \in F$ erhalten wir (mit L.3.3) für

$$I := \bigcap_M I_M$$

die Aussage

$$I \neq \emptyset$$

Die Menge I kann jedoch höchstens ein Element enthalten, denn zu $z, z' \in I$ folgt für alle M :

$$z, z' \in I_M$$

und somit, da I_M ein $6N$ -dimensionaler Würfel mit der Kantenlänge 2^{-M} ist, nach dem Satz des Pythagoras:

$$|z - z'|^2 \leq 6N (2^{-M})^2$$

Da dies für alle M gilt, muss $z = z'$ sein.

Wir erhalten somit $I = \{z_o\}$ für ein bestimmtes Element $z_o \in Z$. Es sei nun

$$p(t) := \beta_t(z_o) \quad (\text{für alle } t \in T)$$

Wegen $\beta_o = \text{id}$ ist offenbar $p \in \text{Pf}_\beta$ und somit $\omega_p \in \Omega$. Zu zeigen bleibt, dass $\omega = \omega_p$ ist, denn dann folgt wie gewünscht $\omega \in \Omega$.

Wir zeigen zunächst die folgende Aussage: Für alle $B \in \mathcal{U}$ ist

$$(06) \quad \omega \in \langle B, 0 \rangle_o \Leftrightarrow p(0) \in B$$

Zum Beweis sei zunächst $p(0) \in B$. Wegen

$$\begin{aligned} \bigcap_M I_M &= I \\ &= \{p(0)\} \end{aligned}$$

ist dann

$$(Z \setminus B) \cap \bigcap_M I_M = \emptyset$$

Wegen $\forall_{F \in \text{SEC}} \omega \in F$ folgt

$$\omega \in \neg (\langle Z \setminus B, 0 \rangle_o \wedge \forall_M \langle I_M, 0 \rangle_o)$$

und mit L.3.3, L.3.1 und L.3.6 erhalten wir

$$\neg (\omega \in \langle Z \setminus B, 0 \rangle_o \wedge \forall_M [\omega \in \langle I_M, 0 \rangle_o])$$

Da für alle M gilt:

$$\omega \in \langle I_M, 0 \rangle_o$$

folgt

$$\omega \notin \langle Z \setminus B, 0 \rangle_o$$

Wegen $\forall_{F \in \text{NEG}} \omega \in F$ erhalten wir (mit L.3.2)

$$\omega \in \langle B, 0 \rangle_o$$

QED (" \Leftarrow ")

Es sei nun $p(0) \notin B$. Dann ist $p(0) \in Z \setminus B$ und nach dem soeben Bewiesenen folgt (indem man B durch $Z \setminus B$ ersetzt)

$$\omega \in \langle Z \setminus B, 0 \rangle_0$$

Mittels L.3.7 folgt daraus sofort

$$\omega \notin \langle B, 0 \rangle_0$$

QED (" \Rightarrow ")

Damit ist die Aussage (06) gezeigt.

QED (06)

Es sei nun $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$. Dazu sei $B := (\beta_t)^{-1}(A)$. Es ist dann

$$\begin{aligned} (A,t) \in \omega &\Leftrightarrow \omega \in \langle A,t \rangle_0 && \text{(Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_0) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \langle \beta_t(B), t \rangle_0 && \text{(Def. von } B) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \langle B, 0 \rangle_0 && \text{(mit L.3.5, da } \forall_{F \in BG} \omega \in F) \\ &\Leftrightarrow p(0) \in B && \text{(mit (06))} \\ &\Leftrightarrow \beta_t(p(0)) \in \beta_t(B) && \text{(da } \beta_t \text{ bijektiv)} \\ &\Leftrightarrow p(t) \in A && \text{(} p \in Pf_\beta \text{ und Def. von } B) \\ &\Leftrightarrow (A,t) \in \omega_p && \text{(Def. von } \omega_p) \end{aligned}$$

Da dies für alle A und t gilt, folgt wie gewünscht $\omega = \omega_p$. Der Beweis von Theorem T.3.1 ist damit abgeschlossen. **QED**

L.3.10 Für alle $F \in \mathcal{A}_0$ gilt: $\diamond_{AX}(F) \Rightarrow \diamond_{AX'}(F)$

Beweis: Wegen $AX' \subset AX$ ist $\Omega_{AX} \subset \Omega_{AX'}$. Für $F \in \mathcal{A}_0$ folgt:

$$\begin{aligned} \diamond_{AX}(F) &\Rightarrow F \cap \Omega_{AX} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow F \cap \Omega_{AX'} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \diamond_{AX'}(F) \end{aligned}$$

QED

L.3.11 Für beliebige $(A_1, t_1), \dots, (A_n, t_n) \in \mathcal{E}$ gilt:

$$\diamond_{AX'}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_0) \Rightarrow \diamond_{AX}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_0)$$

Beweis: Für alle j sei $B_j := (\beta_{t_j})^{-1}(A_j)$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \diamond_{AX'}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_0) &\Rightarrow \exists_{\omega \in \Omega_{AX'}} [\omega \in (\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_0)] && \text{(Def. von } \diamond_{AX'}) \\ &\Rightarrow \exists_{\omega \in \Omega_{AX'}} \forall_j [\omega \in \langle A_j, t_j \rangle_0] && \text{(L.3.6)} \\ &\Rightarrow \exists_{\omega \in \Omega_{AX'}} \forall_j [\omega \in \langle \beta_{t_j}(B_j), t_j \rangle_0] && \text{(Def. von } B_j) \\ &\Rightarrow \exists_{\omega \in \Omega_{AX'}} \forall_j [\omega \in \langle B_j, 0 \rangle_0] && \text{(mit L.3.5, da} \\ &&& \forall_{F \in BG} \omega \in F) \\ &\Rightarrow \exists_{\omega \in \Omega_{AX'}} [\omega \in (\forall_j \langle B_j, 0 \rangle_0)] && \text{(L.3.6)} \\ &\Rightarrow \bigcap_j (B_j) \neq \emptyset \end{aligned}$$

denn wenn $\bigcap_j (B_j) = \emptyset$ wäre, so hätten wir für $\omega \in \Omega_{AX}$ (wegen $\forall_{F \in \text{SEC}} \omega \in F$)

$$\omega \in \neg (\forall_j \langle B_j, 0 \rangle_o)$$

und mit L.3.3

$$\omega \notin (\forall_j \langle B_j, 0 \rangle_o)$$

Es sei nun z ein beliebiges Element von $\bigcap_j (B_j)$. Dazu sei

$$\omega := \{ (A, t) \in \mathcal{E} \mid z \in (\beta_t)^{-1}(A) \}$$

Zunächst wollen wir nun zeigen, dass gilt: $\omega \in \Omega_{AX}$.

Für beliebige $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$ ist:

$$\begin{aligned} z \in (\beta_0)^{-1}(A) &\Leftrightarrow z \in (\beta_t)^{-1}(\beta_t(A)) && \text{(da } \beta_0 = \text{id)} \\ (A, 0) \in \omega &\Leftrightarrow (\beta_t(A), t) \in \omega && \text{(Def. von } \omega) \\ \omega \in \langle A, 0 \rangle_o &\Leftrightarrow \omega \in \langle \beta_t(A), t \rangle_o && \text{(Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \\ \omega \in (\langle A, 0 \rangle_o \leftrightarrow \langle \beta_t(A), t \rangle_o) &&& \text{(L.3.5)} \end{aligned}$$

Da dies für beliebige A und t gilt, folgt:

$$(07) \quad \forall_{F \in \text{BG}} [\omega \in F]$$

Für beliebige $A, B \in \mathcal{U}$ mit $A \subset B$ und $t \in T$ ist:

$$\begin{aligned} z \in (\beta_t)^{-1}(A) &\Rightarrow z \in (\beta_t)^{-1}(B) && \text{(da } \beta_t \text{ bijektiv)} \\ (A, t) \in \omega &\Rightarrow (B, t) \in \omega && \text{(Def. von } \omega) \\ \omega \in \langle A, t \rangle_o &\Rightarrow \omega \in \langle B, t \rangle_o && \text{(Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \\ \omega \in (\langle A, t \rangle_o \rightarrow \langle B, t \rangle_o) &&& \text{(L.3.4)} \end{aligned}$$

Da dies für beliebige A, B und t (mit $A \subset B$) gilt, folgt:

$$(08) \quad \forall_{F \in \text{MON}} [\omega \in F]$$

Für beliebige $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$ mit $\bigcap_j A_j = \emptyset$ sowie $t \in T$ ist:

$$\begin{aligned} \bigcap_j (\beta_t)^{-1}(A_j) &= \emptyset && \text{(da } \beta_t \text{ bijektiv)} \\ z &\notin \bigcap_j (\beta_t)^{-1}(A_j) \\ \neg \forall_j [z \in (\beta_t)^{-1}(A_j)] &&& \\ \neg \forall_j [(A_j, t) \in \omega] &&& \text{(Def. von } \omega) \\ \neg \forall_j [\omega \in \langle A_j, t \rangle_o] &&& \text{(Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \\ \neg [\omega \in (\forall_j \langle A_j, t \rangle_o)] &&& \text{(L.3.6)} \\ \omega &\in \neg(\forall_j \langle A_j, t \rangle_o) && \text{(L.3.3)} \end{aligned}$$

Da dies für beliebige A_j und t (mit $\bigcap_j A_j = \emptyset$) gilt, folgt:

$$(09) \quad \forall_{F \in \text{SEC}} [\omega \in F]$$

Für beliebige $A \in \mathcal{U}$ und $t \in T$ ist:

$$\begin{aligned} z \in (\beta_t)^{-1}(A) \vee z \in (\beta_t)^{-1}(Z \setminus A) & \quad (\text{da } \beta_t \text{ bijektiv}) \\ (A, t) \in \omega \vee (Z \setminus A, t) \in \omega & \quad (\text{Def. von } \omega) \\ \omega \in \langle A, t \rangle_o \vee \omega \in \langle Z \setminus A, t \rangle_o & \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \\ \omega \in (\langle A, t \rangle_o \vee \langle Z \setminus A, t \rangle_o) & \quad (\text{L.3.2}) \end{aligned}$$

Da dies für beliebige A und t gilt, folgt:

$$(10) \quad \forall_{F \in \text{NEG}} [\omega \in F]$$

Aus (07) bis (10) folgt sofort

$$(11) \quad \forall_{F \in \text{AX}} [\omega \in F]$$

und somit $\omega \in \Omega_{\text{AX}}$.

QED ($\omega \in \Omega_{\text{AX}}$)

Für alle j gilt:

$$\begin{aligned} z \in B_j & \\ z \in (\beta_{t_j})^{-1}(A_j) & \quad (\text{Def. von } B_j) \\ (A_j, t_j) \in \omega & \quad (\text{Def. von } \omega) \\ \omega \in \langle A_j, t_j \rangle_o & \quad (\text{Def. von } \langle \cdot, \cdot \rangle_o) \end{aligned}$$

Somit ist wegen L.3.6

$$\omega \in (\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o)$$

und es folgt:

$$\exists_{\omega \in \Omega_{\text{AX}}} [\omega \in (\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o)]$$

und mithin

$$\diamond_{\text{AX}}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o) \quad \text{QED}$$

Theorem T.3.2 Es gilt:

$$\text{EMP}_{\text{AX}'} = \text{EMP}_{\text{AX}}$$

Beweis: Es sei $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ ein empirisches Material. Aufgrund der Definition von EMP_{AX} gilt dann

$$\mathcal{B} \in \text{EMP}_{\text{AX}} \Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}}(F_{\mathcal{B}})$$

und die analoge Aussage für AX' . Man kann \mathcal{B} darstellen als

$$\mathcal{B} = \{(A_1, t_1), \dots, (A_k, t_k)\}$$

mit $A_j \in \mathcal{U}$ und $t_j \in T$ für alle j . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \in \text{EMP}_{\text{AX}'} & \Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}'}(F_{\mathcal{B}}) \\ & \Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}'}(\langle A_1, t_1 \rangle_o \wedge \dots \wedge \langle A_k, t_k \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}'}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \neg \Diamond_{AX}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o) \quad (\text{mit L.3.10 und L.3.11})$$

$$\Leftrightarrow \neg \Diamond_{AX}(\langle A_1, t_1 \rangle_o \wedge \dots \wedge \langle A_k, t_k \rangle_o)$$

$$\Leftrightarrow \neg \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{B} \in \text{EMP}_{AX}$$

Da dies für alle $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ gilt, folgt die Behauptung.

QED

B04. Quantenmechanik und das Kochen-Specker-Theorem

Im folgenden sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum.

Definition D.4.1

$$\text{TF} := \{ (\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1, \varphi_1) \mid \varphi_1 : \mathcal{H}_1 \otimes \bar{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \mathcal{H} \text{ Isomorphie} \}$$

TF bezeichnet die Menge der Tensorfaktor-Zerlegungen des Hilbertraums \mathcal{H} . Die dabei vorkommenden Räume $\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1$ usw. sind (wie \mathcal{H} selbst) separable Hilberträume. Unter einer Isomorphie verstehen wir einen Isomorphismus φ zwischen linearen Räumen, der das Skalarprodukt der Hilberträume bewahrt, für den also stets die Beziehung

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

gilt.

Definition D.4.2 Für zwei Elemente von TF gilt

$$(\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{H}_2, \bar{\mathcal{H}}_2, \varphi_2)$$

genau dann wenn es Isomorphismen

$$F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

und

$$G : \bar{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_2$$

gibt mit

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (F \otimes G)$$

Theorem T.4.1 " \sim " ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

a) " \sim " ist reflexiv: Zum Beweis sei $F := \text{id}_{\mathcal{H}_1}$ und $G := \text{id}_{\bar{\mathcal{H}}_1}$.

Es ist dann $\varphi_1 = \varphi_1 \circ (F \otimes G)$ und somit

$$(\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1, \varphi_1)$$

b) " \sim " ist symmetrisch: Wenn $(\mathcal{H}_1, \bar{\mathcal{H}}_1, \varphi_1) \sim (\mathcal{H}_2, \bar{\mathcal{H}}_2, \varphi_2)$

ist, so gibt es Isomorphismen

$$F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

sowie

$$G : \bar{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_2$$

mit $\varphi_1 = \varphi_2 \circ (F \otimes G)$. Mit F^{-1} und G^{-1} erhält man dann

Isomorphismen mit $\varphi_2 = \varphi_1 \circ (F^{-1} \otimes G^{-1})$.

c) " \sim " ist transitiv: Aus

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (F_1 \otimes G_1)$$

und

$$\varphi_2 = \varphi_3 \circ (F_2 \otimes G_2)$$

erhält man

$$\varphi_1 = \varphi_3 \circ ((F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1))$$

QED

Definition D.4.3 Es sei

$$\text{SUB} := \text{TF} / \sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen zu der Relation " \sim ".

Definition D.4.4 Zu $Q \in \text{SUB}$ sei je ein fester Repräsentant $(\mathcal{H}_Q, \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q) \in Q$ gewählt.

Definition D.4.5 Zu $Q \in \text{SUB}$ sei

$$Q^- := (\bar{\mathcal{H}}_Q, \mathcal{H}_Q, \varphi^-) / \sim$$

mit der durch

$$\varphi^-(q^- \otimes q) := \varphi_Q(q \otimes q^-) \quad (\text{für } q \in \mathcal{H}_Q \text{ und } q^- \in \bar{\mathcal{H}}_Q)$$

gegebenen Isomorphie. Das Subsystem Q^- bezeichnet den "Rest der Welt" zum gegebenen Q .

Theorem T.4.2 Zu $Q \in \text{SUB}$ ist auch Q^- ein Subsystem.

Beweis: Mit φ_Q ist auch φ^- eine Isomorphie.

QED

Definition D.4.6 Es sei

$$\mathcal{V} := (\mathcal{H}, \mathbb{C}, \varphi_0) / \sim$$

mit der durch

$$\varphi_0(x \otimes c) := c \cdot x \quad (\text{für } x \in \mathcal{H} \text{ und } c \in \mathbb{C})$$

gegebenen Isomorphie. Das Subsystem \mathcal{V} entspricht dem ganzen Universum.

Definition D.4.7 Es sei

$$\emptyset := \mathcal{V}^-$$

das leere Subsystem.

Theorem T.4.3 Zu $Q \in \text{SUB}$ ist $(Q^-)^- = Q$.

Beweis: Es ist

$$(\mathcal{H}_{Q^-}, \bar{\mathcal{H}}_{Q^-}, \varphi_{Q^-}) \in Q^- = (\bar{\mathcal{H}}_Q, \mathcal{H}_Q, \varphi^-) / \sim$$

mit

$$\varphi^-(q^- \otimes q) = \varphi_Q(q \otimes q^-) \quad (\text{für alle } q \text{ und } q^-)$$

Somit gibt es Isomorphismen

$$F : \bar{\mathcal{H}}_Q \rightarrow \mathcal{H}_{Q^-}$$

$$G : \mathcal{H}_Q \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{Q^-}$$

mit

$$\varphi^- = \varphi_{Q^-} \circ (F \otimes G)$$

Es ist ferner

$$(Q^-)^- = (\bar{\mathcal{H}}_{Q^-}, \mathcal{H}_{Q^-}, \varphi) / \sim$$

mit

$$\varphi(q \otimes q^-) = \varphi_{Q^-}(q^- \otimes q) \quad (\text{für alle } q \text{ und } q^-)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi \circ (G \otimes F)(q \otimes q^-) &= \varphi(G(q) \otimes F(q^-)) \\ &= \varphi_{Q^-}(F(q^-) \otimes G(q)) \\ &= \varphi_{Q^-} \circ (F \otimes G)(q^- \otimes q) \\ &= \varphi^-(q^- \otimes q) \\ &= \varphi_Q(q \otimes q^-) \end{aligned}$$

und somit

$$\varphi_Q = \varphi \circ (G \otimes F)$$

Es ist daher

$$(\mathcal{H}_Q, \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q) \sim (\bar{\mathcal{H}}_{Q^-}, \mathcal{H}_{Q^-}, \varphi) \in (Q^-)^-$$

und folglich $Q = (Q^-)^-$.

QED

Theorem T.4.4 Man kann die \mathcal{H}_Q , $\bar{\mathcal{H}}_Q$ und φ_Q o.B.d.A. so wählen, dass stets gilt:

$$\mathcal{H}_{Q^-} = \bar{\mathcal{H}}_Q$$

und

$$\bar{\mathcal{H}}_{Q^-} = \mathcal{H}_Q$$

sowie

$$\varphi_{Q^-}(q^- \otimes q) = \varphi_Q(q \otimes q^-) \quad (\text{für alle } q \text{ und } q^-)$$

Von der Gültigkeit dieser Beziehungen gehen wir im folgenden stets aus.

Beweis: Nach T.4.3 ist $(Q^-)^- = Q$. Hierdurch wird SUB aufgeteilt in disjunkte Teilmengen der Form $\{Q, Q^-\}$. Für den Fall, dass $Q \neq Q^-$ ist, behält man zu Q das bereits unter D.4.4 gewählte Tripel $(\mathcal{H}_Q, \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q)$ bei. Zu Q^- wählt man hingegen als Repräsentanten das Tripel $(\bar{\mathcal{H}}_Q, \mathcal{H}_Q, \varphi^-)$ mit der durch

$$\varphi^-(q^- \otimes q) := \varphi_Q(q \otimes q^-) \quad (\text{für alle } q \text{ und } q^-)$$

gegebenen Isomorphie.

Der Fall $Q = Q^-$ kann, wie sich leicht zeigen lässt, nur dann eintreten, wenn \mathcal{H} isomorph zu \mathbb{C} ist, d.h. wenn \mathcal{H} die Form

$$\mathcal{H} = \mathbb{C} \cdot x_0$$

hat. In diesem Fall kann man setzen:

$$\mathcal{H}_Q := \mathcal{H}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_Q := \mathcal{H}$$

sowie

$$\varphi_Q(c_1 \cdot x_0 \otimes c_2 \cdot x_0) := (c_1 \cdot c_2) \cdot x_0 \quad (\text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

QED

Definition D.4.8 Zu $Q, Q' \in \text{SUB}$ gilt $Q \leq Q'$ genau dann, wenn es ein Tripel $(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi_R)$ gibt mit

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{H}_{Q'} \text{ Isomorphie}$$

und

$$(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_{Q'}, \varphi_{Q'} \circ (\varphi_R \otimes (\text{id}')^-)) \in Q$$

wobei $(\text{id}')^-$ die identische Abbildung auf $\bar{\mathcal{H}}_{Q'}$ bezeichnet.

Bemerkung: Voraussetzung für diese Definition ist, dass die beiden Räume

$$\mathcal{H}_R \otimes (\bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_{Q'})$$

und

$$(\mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R) \otimes \bar{\mathcal{H}}_{Q'}$$

miteinander identifiziert worden sind. Von einer derartigen Identifizierung gehen wir von nun an in allen Fällen aus.

Theorem T.4.5 Für $Q, Q' \in \text{SUB}$ gilt

$$Q \leq Q' \Leftrightarrow (Q')^- \leq Q^-$$

Beweis: Es genügt, die Implikation

$$Q \leq (Q')^- \Rightarrow Q' \leq Q^-$$

zu zeigen. Daraus ergibt sich, indem man Q' durch $(Q')^-$ ersetzt, mit T.4.3 die Aussage

$$Q \leq Q' \Rightarrow (Q')^- \leq Q^-$$

und somit die Richtung " \Rightarrow " des Theorems. Ersetzt man nun zugleich Q durch $(Q')^-$ und Q' durch Q^- , so erhält man hieraus

$$\begin{aligned} (Q')^- \leq Q^- &\Rightarrow (Q^-)^- \leq ((Q')^-)^- \\ &\Rightarrow Q \leq Q' \quad (\text{mit T.4.3}) \end{aligned}$$

und somit die umgekehrte Richtung des Theorems.

Es sei also $Q \leq (Q')^-$. Demnach gibt es

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{H}_{(Q')^-}$$

sowie

$$F : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_Q$$

$$G : \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_Q$$

mit

$$\varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_R \otimes \text{id}') = \varphi_Q \circ (F \otimes G)$$

wobei id' die identische Abbildung auf $\mathcal{H}_{Q'}$ bezeichnet.

Man setze

$$\mathcal{H}_S := \mathcal{H}_{Q'}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_S := \bar{\mathcal{H}}_R$$

und ferner

$$\varphi_S : \mathcal{H}_S \otimes \bar{\mathcal{H}}_S \rightarrow \mathcal{H}_{Q^-}$$

mit

$$\varphi_S(q' \otimes r^-) := G(r^- \otimes q') \quad (\text{für } q' \in \mathcal{H}_{Q'} \text{ und } r^- \in \bar{\mathcal{H}}_R)$$

Außerdem sei

$$F^\wedge := \text{id}'$$

sowie

$$G^\wedge : \bar{\mathcal{H}}_S \otimes \mathcal{H}_Q \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{Q'}$$

mit

$$G^\wedge(r^- \otimes q) := \varphi_R(F^{-1}(q) \otimes r^-) \quad (\text{für } r^- \in \bar{\mathcal{H}}_R \text{ und } q \in \mathcal{H}_Q)$$

Wenn dann id die identische Abbildung auf \mathcal{H}_Q bezeichnet, gilt für alle $q' \in \mathcal{H}_{Q'}$,

sowie $r^- \in \bar{\mathcal{H}}_R$ und $q \in \mathcal{H}_Q$:

$$\begin{aligned} & \varphi_{Q^-} \circ (\varphi_S \otimes \text{id}) ((q' \otimes r^-) \otimes q) \\ &= \varphi_{Q^-} (\varphi_S(q' \otimes r^-) \otimes q) \\ &= \varphi_{Q^-} (G(r^- \otimes q') \otimes q) \\ &= \varphi_Q(q \otimes G(r^- \otimes q')) && (\text{mit T.4.4}) \\ &= \varphi_Q(F(F^{-1}(q)) \otimes G(r^- \otimes q')) \\ &= \varphi_Q \circ (F \otimes G) (F^{-1}(q) \otimes (r^- \otimes q')) \\ &= \varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_R \otimes \text{id}') ((F^{-1}(q) \otimes r^-) \otimes q') \\ &= \varphi_{(Q')^-} (\varphi_R(F^{-1}(q) \otimes r^-) \otimes q') \\ &= \varphi_{Q'}(q' \otimes \varphi_R(F^{-1}(q) \otimes r^-)) && (\text{mit T.4.4}) \\ &= \varphi_{Q'}(q' \otimes G^\wedge(r^- \otimes q)) \\ &= \varphi_{Q'} \circ (F^\wedge \otimes G^\wedge) (q' \otimes (r^- \otimes q)) \end{aligned}$$

Daher ist

$$\varphi_{Q^-} \circ (\varphi_S \otimes \text{id}) = \varphi_{Q'} \circ (F^\wedge \otimes G^\wedge)$$

Es folgt

$$(\mathcal{H}_S, \bar{\mathcal{H}}_S \otimes \bar{\mathcal{H}}_{Q^-}, \varphi_{Q^-} \circ (\varphi_S \otimes \text{id})) \sim (\mathcal{H}_{Q'}, \bar{\mathcal{H}}_{Q'}, \varphi_{Q'}) \in Q'$$

und somit

$$Q' \leq Q^-$$

QED

Theorem T.4.6 In SUB ist \mathcal{V} bezüglich der Relation " \leq " maximal.

Beweis: Es sei $\mathcal{V} \leq Q$. Es gibt dann eine Isomorphie

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{H}_Q$$

mit

$$(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q \circ (\varphi_R \otimes \text{id}^-)) \in \mathcal{V}$$

wobei id^- die identische Abbildung auf $\bar{\mathcal{H}}_Q$ ist. Folglich existieren Isomorphismen

$$F : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}$$

und

$$(*) \quad G : \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_Q \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\varphi_Q \circ (\varphi_R \otimes \text{id}^-) = \varphi_{\mathcal{V}} \circ (F \otimes G)$$

Aus (*) folgen

$$\bar{\mathcal{H}}_R = \mathbb{C} \cdot \bar{r}_0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathcal{H}}_Q = \mathbb{C} \cdot \bar{q}_0$$

sowie

$$G(c \cdot \bar{r}_0 \otimes c' \cdot \bar{q}_0) = c \cdot c'$$

Es seien

$$F^\wedge : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_Q \quad \text{mit} \quad F^\wedge(x) := \varphi_R(F^{-1}(x) \otimes \bar{r}_0)$$

$$G^\wedge : \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_Q \quad \text{mit} \quad G^\wedge(c) := c \cdot \bar{q}_0$$

Dann ist (für alle x und c)

$$\begin{aligned} \varphi_Q \circ (F^\wedge \otimes G^\wedge)(x \otimes c) &= \varphi_Q(F^\wedge(x) \otimes G^\wedge(c)) \\ &= \varphi_Q(\varphi_R(F^{-1}(x) \otimes \bar{r}_0) \otimes c \cdot \bar{q}_0) \\ &= \varphi_Q \circ (\varphi_R \otimes \text{id}^-)((F^{-1}(x) \otimes \bar{r}_0) \otimes c \cdot \bar{q}_0) \\ &= \varphi_{\mathcal{V}} \circ (F \otimes G)(F^{-1}(x) \otimes (\bar{r}_0 \otimes c \cdot \bar{q}_0)) \\ &= \varphi_{\mathcal{V}}(x \otimes G(\bar{r}_0 \otimes c \cdot \bar{q}_0)) \\ &= \varphi_{\mathcal{V}}(x \otimes c) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\varphi_Q \circ (F^\wedge \otimes G^\wedge) = \varphi_{\mathcal{V}}$$

und somit

$$(\mathcal{H}_Q, \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q) \sim (\mathcal{H}, \mathbb{C}, \varphi_V) \in \mathcal{V}$$

sowie

$$Q = V$$

QED

Definition D.4.9 Die Subsysteme Q und Q' heißen disjunkt, wenn gilt:

$$Q \leq (Q')^-$$

Definition D.4.10 Falls Q und Q' disjunkt sind und folglich eine Isomorphie

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{H}_{(Q')^-}$$

existiert mit den in der Definition D.4.8 angegebenen Eigenschaften (wobei Q' überall durch $(Q')^-$ ersetzt ist), so wird die Zusammenfügung der beiden Subsysteme definiert als

$$Q + Q' := (\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'}, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi) / \sim$$

wobei φ gegeben ist durch

$$\varphi((r \otimes q') \otimes r^-) := \varphi_Q(q' \otimes \varphi_R(r \otimes r^-))$$

für alle $r \in \mathcal{H}_R$, $q' \in \mathcal{H}_{Q'}$ und $r^- \in \bar{\mathcal{H}}_R$.

Wir geben nun einige Lemmata an, die für den Beweis des folgenden Theorems benötigt werden. Die meisten dieser Aussagen werden nicht bewiesen, da sie entweder bekannt oder trivial sind.

L.4.1 Für das Skalarprodukt auf dem Tensorprodukt zweier Hilberträume A und B gilt (für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$):

$$\langle a \otimes b, a' \otimes b' \rangle = \langle a, a' \rangle \cdot \langle b, b' \rangle$$

L.4.2 Für einen Hilbertraum A sowie $a \in A$ gilt:

$$a \perp a \Rightarrow a = 0$$

L.4.3 Für Hilberträume A und B sowie $a \in A$ und $b \in B$ gilt:

$$a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

L.4.4 Für Hilberträume A und B sowie $a, a' \in A$ und $b \in B$ gilt:

$$(b \neq 0) \wedge (a \otimes b = a' \otimes b) \Rightarrow a = a'$$

L.4.5 Sind (a_i) bzw. (b_j) Orthonormalbasen der beiden Hilberträume A und B , so ist die Menge aller Produkte $(a_i \otimes b_j)$ eine Orthonormalbasis des Tensorproduktes $A \otimes B$.

L.4.6 Seien A und B Hilberträume mit $a_i \in A$ und $b_j \in B$. Ferner sei (a_i) eine Orthonormalbasis von A und die Produkte der Form $(a_i \otimes b_j)$ bilden eine Orthonormalbasis von $A \otimes B$. Dann ist (b_j) eine Orthonormalbasis von B .

Beweis: Zu $b \in B$ gibt es eine Darstellung von $a_1 \otimes b$ als

$$(a_1 \otimes b) = \sum_{ij} \beta_{ij} (a_i \otimes b_j)$$

Es folgt

$$(a_1 \otimes b) - \sum_j \beta_{1j} (a_1 \otimes b_j) = \sum_{i \neq 1, j} \beta_{ij} (a_i \otimes b_j)$$

Da die beiden Seiten der Gleichung aufeinander senkrecht stehen, folgt mit L.4.2

$$\begin{aligned} (a_1 \otimes b) &= \sum_j \beta_{1j} (a_1 \otimes b_j) \\ &= a_1 \otimes \sum_j \beta_{1j} b_j \end{aligned}$$

und somit

$$b = \sum_j \beta_{1j} b_j$$

Die b_j bilden also ein Erzeugendensystem in B . Auf die lineare Unabhängigkeit der b_j kann leicht aus der entsprechenden Eigenschaft der $a_1 \otimes b_j$ geschlossen werden. Mit

$$\begin{aligned} \langle a_1 \otimes b_j, a_1 \otimes b_k \rangle &= \langle a_1, a_1 \rangle \cdot \langle b_j, b_k \rangle \\ &= \langle b_j, b_k \rangle \end{aligned}$$

folgt $b_j \perp b_k$ für $j \neq k$ und $|b_j| = 1$ für alle j .

QED

L.4.7 Sei $\psi : A \rightarrow B$ eine Hilbertraum-Isomorphie und (a_i) eine Orthonormalbasis von A . Dann bilden die $\psi(a_i)$ eine Orthonormalbasis von B .

L.4.8 Seien A und C Hilberträume und $\psi : A \rightarrow C$ ein Isomorphismus linearer Räume. Ferner sei (a_i) eine Orthonormalbasis von A . Wenn dann auch die $\psi(a_i)$ eine Orthonormalbasis von C bilden, so ist ψ eine Hilbertraum-Isomorphie.

Beweis: Zu zeigen ist nur, dass das Skalarprodukt erhalten bleibt, d.h.:

$$\langle \psi(a), \psi(b) \rangle = \langle a, b \rangle \quad (\text{für alle } a, b \in A)$$

Zu $a, b \in A$ sei

$$a = \sum_i \alpha_i a_i$$

sowie

$$b = \sum_j \beta_j a_j$$

Dann ist (wenn $\bar{\beta}_j$ die komplex Konjugierte zu β_j bezeichnet):

$$\begin{aligned} \langle \psi(a), \psi(b) \rangle &= \langle \psi(\sum_i \alpha_i a_i), \psi(\sum_j \beta_j a_j) \rangle \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \bar{\beta}_j \langle \psi(a_i), \psi(a_j) \rangle \\ &= \sum_i \alpha_i \bar{\beta}_i \\ &= \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

QED

L.4.9 Seien A und B Hilberträume, und es sei (b_k) eine Orthonormalbasis von B , sowie $a \in A$ und $a_n \in A$. Aus

$$a \otimes b_k = \sum_n a_n \otimes b_n$$

folgt dann

$$a = a_k$$

Beweis: Aus der Prämisse folgt

$$\begin{aligned} (a - a_k) \otimes b_k &= a \otimes b_k - a_k \otimes b_k \\ &= \sum_{n \neq k} a_n \otimes b_n \end{aligned}$$

Für $k \neq n$ ist $b_k \perp b_n$ und somit (wegen L.4.1)

$$(a - a_k) \otimes b_k \perp a_n \otimes b_n$$

Es folgt

$$(a - a_k) \otimes b_k \perp \sum_{n \neq k} a_n \otimes b_n$$

Mit L.4.2 folgt

$$(a - a_k) \otimes b_k = 0$$

sowie

$$a \otimes b_k = a_k \otimes b_k$$

und daraus mit L.4.4 die Behauptung. **QED**

L.4.10 Es seien R, S, Q, R' und S' Hilberträume und

$$\varphi : R \otimes S \rightarrow R' \otimes S'$$

$$F : R \rightarrow R'$$

$$G : S \otimes Q \rightarrow S' \otimes Q$$

Isomorphismen und es sei

$$\varphi \otimes \text{id}_Q = F \otimes G$$

Dann gibt es eine Isomorphie

$$\psi : S \rightarrow S'$$

mit

$$\varphi = F \otimes \psi$$

Beweis: Es seien $(r_i), (s_j), (q_k)$ und (s'_m) Orthonormalbasen der Räume R, S, Q bzw. S' . G ist darstellbar als

$$G(s_j \otimes q_k) = \sum_{mn} g_{jk,mn} (s'_m \otimes q_n)$$

Mit einem fest gewählten Index k folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(r_i \otimes s_j) \otimes q_k &= F(r_i) \otimes G(s_j \otimes q_k) \\ &= F(r_i) \otimes \sum_{mn} g_{jk,mn} (s'_m \otimes q_n) \\ &= \sum_n (F(r_i) \otimes \sum_m g_{jk,mn} s'_m) \otimes q_n \end{aligned}$$

Mit

$$a := \varphi(r_i \otimes s_j)$$

und

$$a_n := F(r_i) \otimes \sum_m g_{jk,mn} s'_m$$

kann man das Lemma L.4.9 anwenden und erhält

$$\varphi(r_i \otimes s_j) = F(r_i) \otimes \sum_m g_{jk,mk} s'_m$$

Die lineare Abbildung $\psi : S \rightarrow S'$ werde definiert durch

$$\psi(s_j) := \sum_m g_{jk,mk} s'_m$$

Dann ist für alle i und j

$$\varphi(r_i \otimes s_j) = F(r_i) \otimes \psi(s_j)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\varphi = F \otimes \psi$$

Zu zeigen bleibt nur noch, dass ψ eine Hilbertraum-Isomorphie ist.

Da es sich bei φ , F und G um Isomorphismen handelt, kann man anstelle von φ , F und G ebensogut φ^{-1} , F^{-1} bzw. G^{-1} betrachten. Damit erhält man eine lineare Abbildung $\psi' : S' \rightarrow S$ mit

$$\varphi^{-1} = F^{-1} \otimes \psi'$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \text{id}_{R \otimes S} &= \varphi^{-1} \circ \varphi \\ &= (F^{-1} \otimes \psi') \circ (F \otimes \psi) \\ &= (F^{-1} \circ F) \otimes (\psi' \circ \psi) \\ &= \text{id}_R \otimes (\psi' \circ \psi) \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich ableiten

$$\psi' \circ \psi = \text{id}_S$$

In analoger Weise erhalten wir

$$\psi \circ \psi' = \text{id}_{S'}$$

Demnach ist ψ ein Isomorphismus linearer Räume. Da die Ausdrücke der Form

$$F(r_i) \otimes \psi(s_j) = \varphi(r_i \otimes s_j)$$

nach L.4.7 eine Orthonormalbasis von $R' \otimes S'$ darstellen, folgt mit L.4.6, dass die $\psi(s_j)$ eine Orthonormalbasis von S' bilden. Nach L.4.8 ist dann ψ eine Isomorphie von Hilberträumen. **QED**

Theorem T.4.7 Die Bildung der Zusammenfügung $Q + Q'$ ist unabhängig von der Wahl des Tripels $(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi_R)$, das in der Definition D.4.10 verwendet wird.

Beweis: Es sei $Q \leq (Q')^-$. Somit gibt es eine Isomorphie

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_Q,$$

mit

$$(*) \quad (\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'}, \varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_R \otimes \text{id}')) \in Q$$

wobei id' die identische Abbildung von $\mathcal{H}_{Q'}$ bezeichnet. Wir gehen nun von einem weiteren Tripel $(\mathcal{H}_{R'}, \bar{\mathcal{H}}_{R'}, \varphi_{R'})$ aus, welches die entsprechenden Eigenschaften aufweist. Wir müssen nun zeigen, dass wir so zu derselben Zusammenfügung $Q + Q'$ gelangen.

Aufgrund der Voraussetzung $(*)$ und der entsprechenden Voraussetzung für das mit R' anstelle von R gebildete Tripel gibt es Isomorphismen

$$F : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_{R'}$$

$$G : \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{R'} \otimes \mathcal{H}_{Q'}$$

mit

$$\varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_R \otimes \text{id}') = \varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_{R'} \otimes \text{id}') \circ (F \otimes G)$$

Daraus folgt sofort

$$(\varphi_R \otimes \text{id}') = (\varphi_{R'} \otimes \text{id}') \circ (F \otimes G)$$

Die Zusammenfügung $Q + Q'$ ist nun definiert als die Äquivalenzklasse

$$(\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'}, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi) / \sim$$

wobei (für alle $r \in \mathcal{H}_R$ und $r^- \in \bar{\mathcal{H}}_R$ sowie $q' \in \mathcal{H}_{Q'}$) gilt:

$$(+)$$

$$\varphi((r \otimes q') \otimes r^-) = \varphi_{Q'}(q' \otimes \varphi_R(r \otimes r^-))$$

(bzw. in derselben Weise mit R' statt R und φ' statt φ).

Damit die Definition von $Q + Q'$ eindeutig ist (d.h. unabhängig von R bzw. R'), braucht man Isomorphismen

$$\rho : \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'} \rightarrow \mathcal{H}_{R'} \otimes \mathcal{H}_{Q'}$$

sowie

$$\psi : \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{R'}$$

mit

$$\varphi = \varphi' \circ (\rho \otimes \psi)$$

Als ρ kann man die Isomorphie $F \otimes \text{id}'$ wählen. Zu konstruieren ist daher nur noch eine Isomorphie ψ mit den geforderten Eigenschaften.

Aus

$$(\varphi_R \otimes \text{id}') = (\varphi_{R'} \otimes \text{id}') \circ (F \otimes G)$$

folgt mit

$$\varphi^\wedge := (\varphi_{R'})^{-1} \circ \varphi_R$$

die Gleichung

$$\varphi^\wedge \otimes \text{id}' = F \otimes G$$

Wegen L.4.10 gibt es dann eine Isomorphie

$$\psi : \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_{R'}$$

mit

$$\varphi^\wedge = F \otimes \psi$$

und folglich:

$$\varphi_R = \varphi_{R'} \circ (F \otimes \psi)$$

$$\varphi_R(r \otimes r^-) = \varphi_{R'}(F(r) \otimes \psi(r^-))$$

$$\varphi_{Q'}(q' \otimes \varphi_R(r \otimes r^-)) = \varphi_{Q'}(q' \otimes \varphi_{R'}(F(r) \otimes \psi(r^-)))$$

Mit der Beziehung (+), angewendet auf R und φ bzw. auf R' und φ' , folgt daraus

$$\begin{aligned} \varphi((r \otimes q') \otimes r^-) &= \varphi'((F(r) \otimes q') \otimes \psi(r^-)) \\ &= \varphi' \circ ((F \otimes \text{id}') \otimes \psi) ((r \otimes q') \otimes r^-) \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \circ ((F \otimes \text{id}') \otimes \psi) \\ &= \varphi' \circ (\rho \otimes \psi) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.4.8 Für disjunkte Subsysteme Q und Q' ist $\mathcal{H}_{Q+Q'}$ isomorph zu dem Tensorprodukt $\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q'}$.

Beweis: Es sei $Q \leq (Q')^-$. Demnach gibt es eine Isomorphie

$$\varphi_R : \mathcal{H}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_R \rightarrow \mathcal{H}_{(Q')^-}$$

mit

$$(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'}, \varphi_{(Q')^-} \circ (\varphi_R \otimes \text{id}')) \in Q$$

wobei id' die identische Abbildung von $\mathcal{H}_{Q'}$ bezeichnet. Es gibt demnach wegen D.4.2 und D.4.4 eine Isomorphie

$$F : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_Q$$

Es ist nun

$$Q + Q' = (\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'}, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi) / \sim$$

mit passend definiertem φ . Da auch

$$(\mathcal{H}_{Q+Q'}, \bar{\mathcal{H}}_{Q+Q'}, \varphi_{Q+Q'}) \in Q + Q'$$

gibt es wegen D.4.2 eine Isomorphie

$$F^\wedge : \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q'} \rightarrow \mathcal{H}_{Q+Q'}$$

Mit $(F^\wedge) \circ (F^{-1} \otimes \text{id}')$ erhält man dann eine Isomorphie von $\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q'}$ nach $\mathcal{H}_{Q+Q'}$.

QED

Theorem T.4.9 Für $Q \in \text{SUB}$ gilt

$$Q + Q^- = V$$

Somit ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$ isomorph zu \mathcal{H}_V .

Beweis: Es sei

$$\mathcal{H}_R := \mathcal{H}_Q$$

$$\bar{\mathcal{H}}_R := \mathbb{C}$$

und

$$\varphi_R(q \otimes c) := c \cdot q \quad (\text{für } q \in \mathcal{H}_Q \text{ und } c \in \mathbb{C})$$

sowie id^- die identische Abbildung von $\bar{\mathcal{H}}_Q$. Es sei

$$F : \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_Q$$

mit

$$F(q) := q \quad (\text{für alle } q \in \mathcal{H}_Q)$$

und

$$G : \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_Q \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_Q$$

mit

$$G(c \otimes q^-) := c \cdot q^- \quad (\text{für alle } c \in \mathbb{C} \text{ und } q^- \in \bar{\mathcal{H}}_Q)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (\varphi_R \otimes \text{id}^-) ((q \otimes c) \otimes q^-) &= c \cdot q \otimes q^- \\ &= F(q) \otimes G(c \otimes q^-) \\ &= (F \otimes G) (q \otimes (c \otimes q^-)) \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$(\varphi_R \otimes \text{id}^-) = (F \otimes G)$$

sowie

$$\varphi_Q \circ (\varphi_R \otimes \text{id}^-) = \varphi_Q \circ (F \otimes G)$$

und somit

$$(\mathcal{H}_R, \bar{\mathcal{H}}_R \otimes \bar{\mathcal{H}}_Q, \varphi_Q \circ (\varphi_R \otimes \text{id}^-)) \in Q$$

Damit ist gezeigt, dass $Q \leq Q$ ist, und wir erhalten $Q \leq (Q^-)^-$. Folglich sind Q und Q^- disjunkt und man kann die Zusammenfügung $Q + Q^-$ bilden. Sie ist definiert als

$$\begin{aligned} Q + Q^- &= (\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{Q^-}, \bar{\mathcal{H}}_R, \varphi) / \sim \\ &= (\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}, \mathbb{C}, \varphi) / \sim \end{aligned}$$

wobei (für alle $q \in \mathcal{H}_Q$ und $q^- \in \mathcal{H}_{Q^-}$ sowie $c \in \mathbb{C}$) gilt:

$$\begin{aligned} \varphi((q \otimes q^-) \otimes c) &= \varphi_{Q^-}(q^- \otimes \varphi_R(q \otimes c)) \quad (\text{Def. von "+"}) \\ &= \varphi_{Q^-}(q^- \otimes c \cdot q) \\ &= \varphi_Q(c \cdot q \otimes q^-) \quad (\text{mit T.4.4}) \\ &= c \cdot \varphi_Q(q \otimes q^-) \\ &= \varphi_0(\varphi_Q(q \otimes q^-) \otimes c) \\ &= \varphi_0 \circ (\varphi_Q \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}) ((q \otimes q^-) \otimes c) \end{aligned}$$

Dabei ist φ_0 die in der Definition

$$V := (\mathcal{H}, \mathbb{C}, \varphi_0) / \sim$$

auftretende Isomorphie, für welche gilt:

$$\varphi_0(x \otimes c) := c \cdot x \quad (\text{für alle } x \in \mathcal{H} \text{ und } c \in \mathbb{C})$$

Mithin gilt:

$$\varphi = \varphi_0 \circ (\varphi_Q \otimes \text{id}_{\mathbb{C}})$$

Da

$$\varphi_Q : \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-} \rightarrow \mathcal{H}$$

und

$$\text{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Isomorphismen sind, erhalten wir

$$(\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}, \mathbb{C}, \varphi) \sim (\mathcal{H}, \mathbb{C}, \varphi_0) \in \mathcal{V}$$

sowie

$$Q + Q^- = \mathcal{V}$$

QED

Definition D.4.11 Zu $Q \in \text{SUB}$ sei

$$\mathcal{U}_Q := \{ A' \mid A' < \mathcal{H}_Q \}$$

die Menge der Eigenschaften des Subsystems Q .

Definition D.4.12 Zu $Q \in \text{SUB}$ und $A' \in \mathcal{U}_Q$ sei

$$\alpha_Q(A') := \varphi_Q(A' \otimes \mathcal{H}_{Q^-})$$

Die Abbildung α_Q ordnet jeder Eigenschaft eines Subsystems die entsprechende Eigenschaft des Universums zu.

Wir wollen nun die Aussage beweisen, dass das Axiomensystem

$$\text{AX}_1 := \text{SG} \cup \text{MON} \cup \text{SEC} \cup \text{NEG}$$

widersprüchlich ist. Wir beschränken uns dabei zunächst auf den Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$. Für den allgemeinen Fall mit $\dim \mathcal{H} \geq 3$ ist ein entsprechender Beweis ebenso möglich (siehe unten).

Mit

$$\Omega_1 := \bigcap (\text{AX}_1)$$

setzen wir:

$$\langle A, t \rangle := \langle A, t \rangle_0 \cap \Omega_1 \quad (\text{für } A < \mathcal{H} \text{ und } t \in T)$$

$$\langle A \rangle := \langle A, 0 \rangle \quad (\text{für } A < \mathcal{H})$$

$$\langle a \rangle := \langle [a] \rangle \quad (\text{für } a \in \mathcal{H})$$

Dabei bezeichnet $[a]$ den von a erzeugten eindimensionalen Unterraum von \mathcal{H} .

Aus den Axiomen MON, SEC und NEG ergeben sich unmittelbar die Aussagen

$$\underline{\text{MON}} \quad A < B \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle \quad (\text{für } A, B < \mathcal{H})$$

$$\underline{\text{SEC}} \quad \bigcap_j A_j = \mathbf{o} \Rightarrow \forall_j \langle A_j \rangle = \emptyset \quad (\text{für tauschende } A_1, A_2, \dots < \mathcal{H})$$

$$\underline{\text{NEG}} \quad \Omega_1 \subset \langle A \rangle \vee \langle A^\perp \rangle \quad (\text{für } A < \mathcal{H})$$

Ferner gilt:

$$\underline{\text{CONJ}} \quad \langle A \rangle \wedge \langle B \rangle \subset \langle A \cap B \rangle \quad (\text{für tauschende } A, B < \mathcal{H})$$

Beweis: Wegen

$$A \cap B \cap (A \cap B)^\perp = \mathbf{o}$$

folgt mit SEC

$$\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle \wedge \langle (A \cap B)^\perp \rangle = \emptyset$$

also

$$\begin{aligned} \langle A \rangle \wedge \langle B \rangle &\subset \neg \langle (A \cap B)^\perp \rangle \\ &\subset \langle A \cap B \rangle \end{aligned} \quad (\text{mit NEG})$$

QED

Bemerkung: Die Operation \neg bezieht sich hier auf Ω_1 , d.h. für die relevanten Teilmengen $E \subset \Omega_1$ ist:

$$\neg E := \Omega_1 \setminus E$$

Für jede Orthonormalbasis (b_k) von \mathcal{H} gilt:

$$\underline{\text{ONB}} \quad \Omega_1 = \exists_k \langle b_k \rangle$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \bigcap_k [b_k]^\perp &= (\oplus_k [b_k])^\perp \\ &= \mathcal{H}^\perp \\ &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

Mit SEC folgt

$$\forall_k \langle [b_k]^\perp \rangle = \emptyset$$

Wegen NEG ist (für alle k)

$$\neg \langle b_k \rangle \subset \langle [b_k]^\perp \rangle$$

Somit gilt auch

$$\forall_k \neg \langle b_k \rangle = \emptyset$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \neg \emptyset \\ &= \neg \forall_k \neg \langle b_k \rangle \\ &= \exists_k \langle b_k \rangle \end{aligned}$$

QED

L.4.11 Zu $a, b \in \mathcal{H}$ mit $|a| = |b| = 1$ und $|a^*b| \leq 1/3$ gibt es $c, d \in \mathcal{H}$ mit

$$|c| = |d| = 1 \text{ und } |c^*d| = 0 \text{ sowie}$$

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \wedge \langle d \rangle$$

Dabei bezeichnet a^* den zu a adjungierten Vektor. Somit ist a^*b das Skalarprodukt der beiden Vektoren a und b aus \mathcal{H} .

Beweis: Für $a^*b = 0$ ist nichts zu zeigen. Da es auf einen Vorzeichenwechsel nicht ankommt, können wir $a^*b > 0$ annehmen. Es sei dann φ so gewählt, dass

$$\sin^2\varphi = a^*b$$

ist. Durch passende Wahl des Koordinatensystems können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass gilt:

$$a = (0, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$b = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$$

wobei wir die Elemente von \mathbb{C}^3 hier der Einfachheit halber als Zeilenvektoren schreiben. Es sei

$$G(z) := z \cos^2\varphi - (z^2+1) \sin^2\varphi \quad (\text{für } z \in [0,1])$$

Es gelten dann:

$$G(0) = -\sin^2\varphi$$

$$\leq 0$$

$$G(1) = \cos^2\varphi - 2 \sin^2\varphi$$

$$= 1 - 3 \sin^2\varphi$$

$$= 1 - 3 a^*b$$

$$\geq 0$$

Man kann also $z \in [0,1]$ so wählen, dass $G(z) = 0$ wird.

Damit seien nun:

$$f := (1, z, 0)$$

$$g := (z \sin \varphi, -\sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$h := (-z \sin \varphi, \sin \varphi, z \cos \varphi)$$

Es folgt: $g \perp f$, $g \perp a$, $h \perp f$ und $h \perp b$, sowie ferner

$$g^*h = -z^2 \sin^2\varphi - \sin^2\varphi + z \cos^2\varphi$$

$$= z \cos^2\varphi - (z^2+1) \sin^2\varphi$$

$$= G(z)$$

$$= 0$$

Es ist also auch $g \perp h$, und somit sind f, g und h paarweise orthogonal. Es gilt nun

$$a \in [g]^\perp = [f, h]$$

$$b \in [h]^\perp = [f, g]$$

und die beiden Unterräume $[f, h]$ und $[f, g]$ sind miteinander vertauschbar. Mittels MON und CONJ folgt dann:

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle [f, h] \rangle \wedge \langle [f, g] \rangle \subset \langle [f, h] \cap [f, g] \rangle = \langle f \rangle$$

Ebenso gilt (mit der Standard-Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3):

$$a \in [e_2, e_3]$$

$$b \in [e_1, e_3]$$

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \wedge \langle b \rangle &\subset \langle [e_2, e_3] \rangle \wedge \langle [e_1, e_3] \rangle \\ &\subset \langle [e_2, e_3] \cap [e_1, e_3] \rangle \\ &= \langle e_3 \rangle \end{aligned}$$

Da $f \perp e_3$ ist, folgt mit $c := f/|f|$ und $d := e_3$ die Behauptung. **QED**

Zur Vorbereitung des folgenden Lemmas definieren wir:

$$b_k := 1 - 2/k \quad (\text{für } k \geq 2)$$

Die Folge b_k wächst monoton.

$$I_k := (b_k, b_{k+1}] \quad (\text{für } k \geq 2)$$

Die Intervalle I_k ($k \geq 2$) überdecken das offene Intervall $(0,1)$. Es sei

$$F(w) := 3 - 4/(1+w) \quad (\text{für } w \in (0,1))$$

F ist eine monoton wachsende Funktion. Für $k \geq 3$ gilt:

$$\begin{aligned} F(b_k) &= 3 - 4/(1+1-2/k) \\ &= 3 - 2/((k-1)/k) \\ &= 3 - 2k/(k-1) \\ &= (3(k-1)-2k) / (k-1) \\ &= ((k-1)-2) / (k-1) \\ &= 1-2/(k-1) \\ &= b_{k-1} \end{aligned}$$

und somit:

$$(01) \quad F(I_k) = I_{k-1} \quad (\text{für } k \geq 3)$$

L.4.12 Für $k \geq 3$ gilt: Zu $a, b \in \mathcal{H}$ mit $|a| = |b| = 1$ und $|a^*b| \in I_k$ gibt es

$c, d \in \mathcal{H}$ mit $|c| = |d| = 1$ und $|c^*d| \in I_{k-1}$ sowie

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \wedge \langle d \rangle$$

Beweis: Da es auf einen Vorzeichenwechsel nicht ankommt, können wir $a^*b \geq 0$ annehmen. Es sei dann φ so gewählt, dass

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi) = a^*b$$

ist. Durch passende Wahl des Koordinatensystems können wir annehmen:

$$a = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \quad \text{und} \quad b = (\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$$

Es sei:

$$w := a^*b$$

$$y := \sqrt{w}$$

$$f := (y, 0, \sin \varphi)$$

$$g := (\sin \varphi, -\cos \varphi, -y)$$

$$h := (\sin \varphi, \cos \varphi, -y)$$

Wegen $a^*b \in I_k \subset (1/3, 1)$ ist $\sin \varphi \neq 0$ und daher $[a] \neq [f]$.

Es folgen:

$$(02) \quad w = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

$$(03) \quad \cos^2 \varphi = (w+1)/2$$

$$(04) \quad |f|^2 = y^2 + \sin^2 \varphi \\ = \cos^2 \varphi \quad (\text{wegen (02)})$$

$$(05) \quad g^*h = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi + y^2 \\ = 0$$

Die Vektoren f , g und h sind paarweise orthogonal und außerdem gelten:

$$g \perp a \quad \text{und} \quad h \perp b$$

Wegen $g \perp [a, f]$ ist $[a, f] = [g]^\perp$. Ebenso ist $[b, f] = [h]^\perp$. Deshalb tauschen $[a, f]$ und $[b, f]$ und man kann mit MON und CONJ schließen:

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle [a, f] \rangle \wedge \langle [b, f] \rangle \\ \subset \langle [a, f] \cap [b, f] \rangle \\ = \langle f \rangle$$

Indem man überall y durch $-y$ ersetzt, erhält man für

$$f' := (-y, 0, \sin \varphi)$$

analog

$$|f'|^2 = \cos^2 \varphi$$

sowie

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle f' \rangle$$

Mit $c := f/|f|$ und $d := -f'/|f'|$ ist nun

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \wedge \langle d \rangle$$

sowie

$$c^*d = -f^*f' / (|f| |f'|) \\ = (y^2 - \sin^2 \varphi) / \cos^2 \varphi \\ = (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) / \cos^2 \varphi \quad (\text{mit (02)}) \\ = (3 \cos^2 \varphi - 2) / \cos^2 \varphi \\ = 3 - 2 / \cos^2 \varphi \\ = 3 - 2 / ((w+1)/2) \quad (\text{mit (03)}) \\ = 3 - 4/(w+1) \\ = F(w) \\ \in I_{k-1} \quad (\text{wegen (01)})$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. **QED**

L.4.13 Zu $a, b \in \mathcal{H}$ mit $|a| = |b| = 1$ und $|a^*b| < 1$ gibt es

$c, d \in \mathcal{H}$ mit $|c| = |d| = 1$ und $|c^*d| = 0$ sowie

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \wedge \langle d \rangle$$

Beweis: Falls $|a^*b| = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es ein $k \geq 2$ mit $|a^*b| \in I_k$. Durch mehrfache Anwendung von L.4.12 kann man sukzessiv Paare von (auf Eins normierten) Vektoren bilden, bis man ein Paar e, f erhält mit

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle e \rangle \wedge \langle f \rangle$$

und

$$\begin{aligned} |e^*f| &\in I_2 \\ &= (b_2, b_3] \\ &= (0, 1/3] \end{aligned}$$

Hieraus folgt mittels L.4.11 (angewendet auf e und f) die Behauptung. **QED**

Bemerkung: Zum Beweis von L.4.11, L.4.12 und L.4.13 wurden ausschließlich die Aussagen MON und CONJ benutzt.

L.4.14 Für $a, b \in \mathcal{H}$ mit $|a| = |b| = 1$ und $|a^*b| < 1$ gilt:

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle = \emptyset$$

Beweis: Nach L.4.13 gibt es $c, d \in \mathcal{H}$ mit $|c^*d| = 0$ sowie

$$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle \subset \langle c \rangle \wedge \langle d \rangle$$

Da $c \perp d$ ist, folgt mit SEC

$$\langle c \rangle \wedge \langle d \rangle = \emptyset$$

Hieraus folgt die Behauptung. **QED**

Bemerkung: Zum Beweis von L.4.14 werden ausschließlich die Aussagen MON, CONJ und SEC benötigt.

Wir können nun die Widersprüchlichkeit des Axiomensystems AX_1 beweisen.

Theorem T.4.10 Im Falle $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ gilt $\Omega_1 = \emptyset$

Beweis: Es sei e_1, e_2, e_3 die Standard-Orthonormalbasis von \mathcal{H} . Wir setzen:

$$f := (e_1 + e_2) / \sqrt{2}$$

$$g := (e_1 - e_2) / \sqrt{2}$$

$$h := e_3$$

Die Vektoren f, g und h bilden eine Orthonormalbasis, und aus ONB folgt:

$$\Omega_1 = \langle f \rangle \vee \langle g \rangle \vee \langle h \rangle$$

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \langle e_1 \rangle &\subset \langle e_1 \rangle \wedge (\langle f \rangle \vee \langle g \rangle \vee \langle h \rangle) \\ &= (\langle e_1 \rangle \wedge \langle f \rangle) \vee (\langle e_1 \rangle \wedge \langle g \rangle) \vee (\langle e_1 \rangle \wedge \langle h \rangle) \end{aligned}$$

Da $|e_1^*f| < 1$ und $|e_1^*g| < 1$ und $|e_1^*h| < 1$ ist, folgt nach L.4.14:

$$(\langle e_1 \rangle^{\langle f \rangle}) \vee (\langle e_1 \rangle^{\langle g \rangle}) \vee (\langle e_1 \rangle^{\langle h \rangle}) = \emptyset$$

und somit

$$\langle e_1 \rangle = \emptyset$$

Auf dieselbe Weise kann man zeigen:

$$\langle e_2 \rangle = \emptyset$$

$$\langle e_3 \rangle = \emptyset$$

und hieraus folgt mit ONB:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \langle e_1 \rangle \vee \langle e_2 \rangle \vee \langle e_3 \rangle \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

QED

Für den Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ ist das Axiomensystem

$$AX_1 := SG \cup MON \cup SEC \cup NEG$$

somit als inkonsistent erwiesen. Den allgemeinen Fall (für $\dim \mathcal{H} \geq 3$) erhält man ganz analog, indem man \mathcal{H} als $\mathbb{C}^3 \oplus \mathcal{H}'$ darstellt und in den Beweisen die Vektoren a, b usw. durch $a \oplus o, b \oplus o$ usw. ersetzt, sowie anstelle von $[g]^\perp$ und $[h]^\perp$ schreibt: $[g]^\perp \cap (\mathbb{C}^3 \oplus o)$ bzw. $[h]^\perp \cap (\mathbb{C}^3 \oplus o)$. Damit ist gezeigt:

Theorem T.4.11 Im Falle $\dim \mathcal{H} \geq 3$ gilt $\Omega_1 = \emptyset$

Das Axiomensystem

$$AX := SG \cup MON \cup SEC$$

ist hingegen logisch konsistent, denn für

$$\Omega := \bigcap (AX)$$

gilt:

Theorem T.4.12 Im Falle $\mathcal{H} \neq [o]$ ist $\Omega \neq \emptyset$

Beweis: Man kann sehr leicht zeigen, dass in diesem Fall gilt:

$$\emptyset \in \Omega$$

QED

B22. Exkurs: Konstruktion äußerer Maße

Definition D.21.1 Für jedes $A \in \mathcal{A}$ sei:

$$\psi(A) := \inf \{ \sum_j f(\rho_\delta(F_j)) \mid F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge \text{ und } A \subset \bigcup_j F_j \}$$

L.22.1 ψ ist ein äußeres Maß.

Beweis:

a) $\psi(\emptyset) = 0$: Zum Beweis setze $F_j := \langle o \rangle$ für alle j (mit dem Nullraum $o < \mathcal{H}$).

Es folgt für alle j :

$$\begin{aligned} f(\rho_\delta(F_j)) &= f(\rho_\delta(\langle o \rangle)) \\ &= f(\rho_\delta(\emptyset)) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $\emptyset \subset \bigcup_j F_j$ ist dann $\psi(\emptyset)$ das Infimum einer Menge, die das Element 0 enthält und somit selbst gleich 0.

b) ψ ist monoton: Es sei $A \subset B$. Für alle Folgen $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge$ mit $B \subset \bigcup_j F_j$ gilt dann auch $A \subset \bigcup_j F_j$. Somit ist $\psi(A)$ das Infimum einer größeren Menge von Überdeckungen und folglich kleiner oder gleich $\psi(B)$.

c) ψ ist sub- σ -additiv: Für $k \geq 1$ sei $A_k \in \mathcal{A}$ und $A := \bigcup_k A_k$ die Vereinigung dieser Mengen sowie $\varepsilon > 0$. Wegen D.21.1 gibt es $F_{k,j} \in \mathcal{A}^\wedge$ mit $A_k \subset \bigcup_j F_{k,j}$ und

$$\psi(A_k) + \varepsilon/2^k \geq \sum_j f(\rho_\delta(F_{k,j})) \quad (\text{für alle } k)$$

Es ist dann

$$A \subset \bigcup_k \bigcup_j F_{k,j}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \psi(A) &\leq \sum_{k,j} f(\rho_\delta(F_{k,j})) && (\text{wegen D.21.1}) \\ &= \sum_k \sum_j f(\rho_\delta(F_{k,j})) \\ &\leq \sum_k [\psi(A_k) + \varepsilon/2^k] \\ &\leq \sum_k \psi(A_k) + \varepsilon \sum_k 1/2^k \\ &\leq \sum_k \psi(A_k) + \varepsilon \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Sub- σ -Additivität.

QED

L.22.2 ψ erfüllt die Bedingung (*).

Beweis: Es sei $F \in \mathcal{A}^\wedge$. Hierzu sei $F_1 := F$ und $F_j := \langle \emptyset \rangle$ für alle $j > 1$. Da nun $F \subset \exists_j F_j$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \psi(F) &\leq \sum_j f(\rho_\delta(F_j)) \\ &= f(\rho_\delta(F_1)) + \sum_{j>1} f(\rho_\delta(\emptyset)) \\ &= f(\rho_\delta(F)) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.22.1 Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu_{\delta,f}(A) = \psi(A)$.

Beweis: Da $\mu_{\delta,f}$ der Bedingung (*) genügt, gilt für $F \in \mathcal{A}^\wedge$ stets:

$$\mu_{\delta,f}(F) \leq f(\rho_\delta(F))$$

Für $F_j \in \mathcal{A}^\wedge$ und $A \subset \exists_j F_j$ folgt somit

$$\begin{aligned} \mu_{\delta,f}(A) &\leq \mu_{\delta,f}(\exists_j F_j) && \text{(Monotonie von } \mu_{\delta,f}) \\ &\leq \sum_j \mu_{\delta,f}(F_j) && \text{(Sub-}\sigma\text{-Additivität von } \mu_{\delta,f}) \\ &\leq \sum_j f(\rho_\delta(F_j)) && \text{(mit (*))} \end{aligned}$$

und hieraus (wegen D.21.1) die Richtung " \leq " der behaupteten Gleichung. Andererseits ist ψ ein äußeres Maß, welches der Bedingung (*) genügt. Aus der Maximalität von $\mu_{\delta,f}$ folgt dann die Richtung " \geq " der Gleichung. **QED**

B23. Das probabilistische Gesetz der Quantentheorie

Definition D.23.1 Es sei \mathcal{L} der lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen von \mathcal{H} nach \mathcal{H} .

Bemerkung: \mathcal{L} ist abgeschlossen gegenüber der Bildung von Produkten. Außerdem enthält \mathcal{L} alle Projektionen sowie alle unitären Operatoren. Zu $L \in \mathcal{L}$ gehört stets auch die Adjungierte L^* zu L .

Zu $b \in \mathcal{H}$ bezeichnen wir mit b^* den zu b adjungierten Vektor. Damit stellt der Ausdruck b^*a das Skalarprodukt $\langle a, b \rangle$ der beiden Vektoren $a, b \in \mathcal{H}$ dar.

Definition D.23.2 Zu $L \in \mathcal{L}$ kann die Spur genau dann definiert werden, wenn die (i.a. unendliche) Reihe

$$\sum_j (b_j)^* L b_j$$

für jede Orthonormalbasis (b_j) von \mathcal{H} konvergent ist und stets denselben Grenzwert hat. Dieser Grenzwert wird dann als $\text{tr } L$ bezeichnet. Wir lassen dabei als Grenzwert ausdrücklich auch die beiden Werte $-\infty$ und $+\infty$ zu.

L.23.1 Ist $L \in \mathcal{L}$ und (b_j) eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , so gilt offenbar

$$\begin{aligned} \sum_j (b_j)^* L L^* b_j &= \sum_j |L^* b_j|^2 \\ &\in [0, \infty] \end{aligned}$$

L.23.2 Für alle $L \in \mathcal{L}$ existiert die Spur von LL^* und es ist $\text{tr } LL^* \in [0, \infty]$

Beweis: Entweder hat die in L.23.1 angegebene Reihe für jede Orthonormalbasis den Wert ∞ . In diesem Fall ist $\text{tr } LL^* = \infty$. Andernfalls gibt es eine Orthonormalbasis (b_j) mit

$$\sum_j |L^* b_j|^2 < \infty$$

In diesem Fall gehört L zu der sogenannten Hilbert-Schmidt-Klasse. Bekanntlich ist der Wert der Reihe dann unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis und somit existiert $\text{tr } LL^*$. **QED**

Definition D.23.3 Für alle $L \in \mathcal{L}$ sei

$$|L| := (\text{tr } LL^*)^{1/2}$$

L.23.3 Für alle $L \in \mathcal{L}$ ist offenbar $|L| \in [0, \infty]$.

L.23.4 Ist (b_j) eine Orthonormalbasis und $L \in \mathcal{L}$, so gilt:

$$|L|^2 = \sum_j |L^* b_j|^2$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus D.23.3 und L.23.1.

QED

L.23.5 Für $L \in \mathcal{L}$ gilt: $|L| = 0 \Leftrightarrow L = 0$

Beweis: Die Richtung " \Rightarrow " folgt aus L.23.4.

QED

Definition D.23.4 Es sei

$$\mathcal{L}_e := \{ L \in \mathcal{L} \mid |L| < \infty \}$$

Bemerkung: Bei \mathcal{L}_e handelt es sich um die sogenannte Hilbert-Schmidt-Klasse. Sie stellt bekanntlich einen linearen Unterraum von \mathcal{L} dar. Ist $L \in \mathcal{L}_e$ und $M \in \mathcal{L}$, so gehören auch die Produkte LM und ML zu \mathcal{L}_e . Mit $L \in \mathcal{L}_e$ ist stets auch die Adjungierte $L^* \in \mathcal{L}_e$. Jedes $L \in \mathcal{L}$ mit $\text{Rang}(L) < \infty$ gehört zu \mathcal{L}_e . Zu $L, M \in \mathcal{L}_e$ existiert stets die Spur des Produktes LM , mit den üblichen Rechenregeln für das Spur-Funktional. Mit

$$\langle L, M \rangle := \text{tr } LM^*$$

wird auf \mathcal{L}_e ein Skalarprodukt definiert, welches \mathcal{L}_e zu einem Hilbertraum macht. Für $L \in \mathcal{L}_e$ gilt $\langle L, L \rangle = |L|^2$ (im Sinne der Definition D.23.3).

L.23.6 Zu $L \in \mathcal{L}$ ist $|L^*| = |L|$.

Beweis: Falls $|L| < \infty$ ist, gehört L zu \mathcal{L}_e . In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} |L^*|^2 &= \text{tr } L^*L \\ &= \text{tr } LL^* \\ &= |L|^2 \end{aligned}$$

Falls $|L| = \infty$ ist, kann auch $|L^*|$ nicht endlich sein, denn sonst wäre $L^* \in \mathcal{L}_e$ und mithin $L = (L^*)^* \in \mathcal{L}_e$, also $|L| < \infty$. Im Fall $|L| = \infty$ ist also auch $|L^*| = \infty$.

QED

L.23.7 Ist (b_j) eine Orthonormalbasis, $\pi_n := \pi_{[b_1, \dots, b_n]}$ sowie $L \in \mathcal{L}$ und $L_n := \pi_n L$, so ist $|L_n|$ eine monoton wachsende Folge, die gegen $|L|$ konvergiert.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |L_n|^2 &= |\pi_n L|^2 \\ &= \sum_j |(\pi_n L)^* b_j|^2 \quad (\text{nach L.23.4}) \\ &= \sum_j |L^* \pi_n b_j|^2 \\ &= \sum_{j \leq n} |L^* b_j|^2 \\ &\rightarrow \sum_j |L^* b_j|^2 \quad (\text{monotone Konvergenz}) \\ &= |L|^2 \end{aligned}$$

QED

Theorem T.23.1 Die in D.23.3 eingeführte Norm $||$ erfüllt die Dreiecksungleichung

$$|L + M| \leq |L| + |M| \quad (\text{für } L, M \in \mathcal{L})$$

Dies gilt auch dann, wenn $|L|$, $|M|$ oder $|L + M|$ den Wert ∞ hat.

Beweis: Es sei (b_j) eine Orthonormalbasis. Dazu seien

$$\pi_n := \pi_{[b_1, \dots, b_n]}$$

sowie $L_n := \pi_n L$ und $M_n := \pi_n M$. Dann ist $L_n \in \mathcal{L}_e$ und $M_n \in \mathcal{L}_e$ und, da $||$ eine Norm auf \mathcal{L}_e ist, folgt:

$$\begin{aligned} |L_n + M_n| &\leq |L_n| + |M_n| \\ &\leq |L| + |M| \quad (\text{mit L.23.7}) \end{aligned}$$

Da $|L_n + M_n|$ wegen L.23.7 gegen $|L + M|$ konvergiert, folgt

$$|L + M| \leq |L| + |M| \quad \text{QED}$$

L.23.8 Für $A < \mathcal{H}$ und $L \in \mathcal{L}$ ist $|\pi_A L| \leq |L|$

Beweis: Es sei (a_j) eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , so dass A erzeugt wird von einer Teilmenge $\{a_j \mid j \in J_A\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\pi_A L|^2 &= \sum_j |L^* \pi_A a_j|^2 \quad (\text{L.23.4}) \\ &= \sum_{j \in J_A} |L^* a_j|^2 \\ &\leq \sum_j |L^* a_j|^2 \\ &= |L|^2 \quad (\text{L.23.4}) \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.23.9 Zu $L \in \mathcal{L}_e$ und $A < \mathcal{H}$ gilt

$$|\pi_A L|^2 = \text{tr } \pi_A L L^*$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |\pi_A L|^2 &= \text{tr } \pi_A L (\pi_A L)^* \\ &= \text{tr } \pi_A L L^* \pi_A \\ &= \text{tr } L^* \pi_A \pi_A L \\ &= \text{tr } L^* \pi_A L \\ &= \text{tr } \pi_A L L^* \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.23.10 Für $A < \mathcal{H}$ sowie $L \in \mathcal{L}$ mit $\text{Rang}(L) < \infty$ gilt

$$|\pi_A L|^2 = \text{tr } \pi_A L L^*$$

Beweis: Die Aussage folgt aus L.23.9, da jedes $L \in \mathcal{L}$ mit $\text{Rang}(L) < \infty$ zu \mathcal{L}_e gehört. QED

Für Unterräume A , B und C von \mathcal{H} gelten die folgenden Aussagen:

L.23.11 Im Falle $\dim A < \infty$ gilt

$$|\pi_A \pi_B|^2 = \operatorname{tr} \pi_A \pi_B$$

Beweis: Es ist

$$|\pi_A \pi_B|^2 = |\pi_B \pi_A|^2 \quad (\text{L.23.6})$$

$$= \operatorname{tr} \pi_B \pi_A \quad (\text{L.23.10})$$

$$= \operatorname{tr} \pi_A \pi_B$$

QED

L.23.12 $|\pi_A \pi_B \pi_C| = |\pi_C \pi_B \pi_A|$ (Korollar aus L.23.6)

L.23.13 $|\pi_A \pi_B| = |\pi_B \pi_A|$ (Korollar zu L.23.12)

L.23.14 $|\pi_A \pi_B \pi_C| \leq |\pi_B \pi_C|$ (Korollar zu L.23.8)

L.23.15 $|\pi_A \pi_B \pi_C| \leq |\pi_A \pi_B|$

Beweis: Es ist

$$|\pi_A \pi_B \pi_C| = |\pi_C \pi_B \pi_A| \quad (\text{L.23.12})$$

$$\leq |\pi_B \pi_A| \quad (\text{L.23.14})$$

$$= |\pi_A \pi_B| \quad (\text{L.23.13})$$

QED

Definition D.23.5 Für alle $A, B < \mathcal{H}$ sei

$$\delta(A, B) := |\pi_A \pi_{B^\perp}|$$

L.23.16 $\delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$

Beweis: Es ist

$$\delta(A, C) = |\pi_A \pi_{C^\perp}| \quad (\text{D.23.5})$$

$$= |\pi_A (\pi_{B^\perp} + \pi_B) \pi_{C^\perp}|$$

$$= |\pi_A \pi_{B^\perp} \pi_{C^\perp} + \pi_A \pi_B \pi_{C^\perp}|$$

$$\leq |\pi_A \pi_{B^\perp} \pi_{C^\perp}| + |\pi_A \pi_B \pi_{C^\perp}| \quad (\text{T.23.1})$$

$$\leq |\pi_A \pi_{B^\perp}| + |\pi_B \pi_{C^\perp}| \quad (\text{L.23.15 und L.23.14})$$

$$= \delta(A, B) + \delta(B, C) \quad (\text{D.23.5})$$

QED

L.23.17 $A < B \Leftrightarrow \delta(A, B) = 0$

Beweis: Es ist

$$A < B \Leftrightarrow \pi_{B^\perp} \pi_A = 0$$

$$\Leftrightarrow |\pi_A \pi_{B^\perp}| = 0 \quad (\text{L.23.5})$$

$$\Leftrightarrow \delta(A, B) = 0 \quad (\text{D.23.5})$$

QED

Theorem T.23.2 δ ist eine Halbmetrik.

Beweis: Siehe L.23.16 und L.23.17

QED

Theorem T.23.3 Für $A, B < \mathcal{H}$ ist $\delta(A, B) = \delta(B^\perp, A^\perp)$.

Beweis: Es ist

$$|\pi_A \pi_{B^\perp}|^2 = |\pi_{B^\perp} \pi_A|^2 \quad (\text{L.23.13})$$

$$= |\pi_{B^\perp} \pi_{(A^\perp)^\perp}|^2$$

und somit

$$\delta(A, B) = |\pi_A \pi_{B^\perp}| \quad (\text{D.23.5})$$

$$= |\pi_{B^\perp} \pi_{(A^\perp)^\perp}|$$

$$= \delta(B^\perp, A^\perp) \quad (\text{D.23.5})$$

QED

Theorem T.23.4 Für $A, B < \mathcal{H}$ mit $\dim A < \infty$ ist

$$\delta^2(A, B) = \text{tr } \pi_A \pi_{B^\perp}$$

Beweis: Es ist

$$\delta^2(A, B) = |\pi_A \pi_{B^\perp}|^2 \quad (\text{D.23.5})$$

$$= \text{tr } \pi_A \pi_{B^\perp} \quad (\text{mit L.23.11})$$

QED

Theorem T.23.5 Für eine endliche Folge E_1, \dots, E_n paarweise vertauschbarer Unterräume von \mathcal{H} gilt:

$$\delta(\oplus_j E_j, B) \leq \sum_j \delta(E_j, B)$$

Beweis: Für $k \leq n$ sei

$$F_k := E_k \cap (\oplus_{j < k} E_j)^\perp$$

Die F_k sind dann paarweise orthogonal und es ist $\oplus_j F_j = \oplus_j E_j$.

Es folgt:

$$\delta(\oplus_j E_j, B) = |\pi_{\oplus_j E_j} \pi_{B^\perp}| \quad (\text{D.23.5})$$

$$= |\pi_{\oplus_j F_j} \pi_{B^\perp}|$$

$$= |\sum_j \pi_{F_j} \pi_{B^\perp}|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_j |\pi_{F_j} \pi_{B^\perp}| && \text{(mit T.23.1)} \\
&= \sum_j |\pi_{F_j} \pi_{E_j} \pi_{B^\perp}| && \text{(da } F_j < E_j) \\
&\leq \sum_j |\pi_{E_j} \pi_{B^\perp}| && \text{(mit L.23.14)} \\
&= \sum_j \delta(E_j, B) && \text{(D.23.5)} \qquad \mathbf{QED}
\end{aligned}$$

Theorem T.23.6 Für eine endliche Folge E_1, \dots, E_n paarweise vertauschbarer Unterräume von \mathcal{H} gilt:

$$\delta(A, \bigcap_j E_j) \leq \sum_j \delta(A, E_j)$$

Beweis: Für $j \leq n$ sei $D_j := (E_j)^\perp$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta(A, \bigcap_j E_j) &= |\pi_A \pi_{(\bigcap_j E_j)^\perp}| && \text{(D.23.5)} \\
&= |\pi_A \pi_{\bigoplus_j (E_j)^\perp}| \\
&= |\pi_A \pi_{\bigoplus_j D_j}| \\
&= |\pi_{\bigoplus_j D_j} \pi_A| && \text{(mit L.23.13)} \\
&= \delta(\pi_{\bigoplus_j D_j}, A^\perp) && \text{(D.23.5)} \\
&\leq \sum_j \delta(D_j, A^\perp) && \text{(mit T.23.5)} \\
&= \sum_j |\pi_{D_j} \pi_A| && \text{(D.23.5)} \\
&= \sum_j |\pi_A \pi_{D_j}| && \text{(mit L.23.13)} \\
&= \sum_j \delta(A, (D_j)^\perp) && \text{(D.23.5)} \\
&= \sum_j \delta(A, E_j) && \mathbf{QED}
\end{aligned}$$

L.23.18 Zu $A_1, \dots, A_n < \mathcal{H}$ sei $\forall_j \langle A_j \rangle \neq \emptyset$. Mit

$$\omega := \{ (G, t) \in \mathcal{E} \mid \exists_j (A_j < U_{-t}G) \}$$

folgt dann

$$\omega \in \bigcap_j \langle A_j \rangle$$

Beweis: Man kann leicht zeigen, dass gilt:

$$\omega \in \bigcap (SG)$$

sowie

$$\omega \in \bigcap (MON)$$

Falls nun

$$\omega \notin \bigcap (SEC)$$

wäre, so gäbe es vertauschbare $D_1, D_2, \dots < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_k D_k = 0$ sowie $t \in T$ so dass gilt:

$$\omega \in \forall_k \langle D_k, t \rangle_0$$

und somit für alle k

$$\langle D_k, t \rangle \in \omega$$

Aufgrund der Definition von ω gilt dann:

$$\forall_k \exists_j (A_j < U_{-t} D_k)$$

Aus

$$A_j < U_{-t} D_k$$

folgt mit MON und SG

$$\langle A_j \rangle \subset \langle D_k, t \rangle$$

und somit

$$\forall_j \langle A_j \rangle \subset \langle D_k, t \rangle$$

Da dies für alle k gilt, folgt

$$\begin{aligned} \forall_j \langle A_j \rangle &\subset \forall_k \langle D_k, t \rangle \\ &= \emptyset \quad (\text{mit SEC}) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung

$$\forall_j \langle A_j \rangle \neq \emptyset$$

Es ist somit auch $\omega \in \bigcap(\text{SEC})$ und folglich $\omega \in \Omega$. Für alle j ist $\langle A_j, 0 \rangle \in \omega$, d.h. es ist $\omega \in \forall_j \langle A_j \rangle$. **QED**

Theorem T.23.7 Für endlich viele $A_j < \mathcal{H}$ und $B_k < \mathcal{H}$ gilt:

$$\forall_j \langle A_j \rangle \neq \emptyset \wedge \forall_j \langle A_j \rangle \subset \forall_k \langle B_k \rangle \Rightarrow \forall_k \exists_j (A_j < B_k)$$

Beweis: Es sei

$$\omega := \{ (G, t) \in \mathcal{E} \mid \exists_j (A_j < U_{-t} G) \}$$

Wegen L.23.18 ist dann

$$\begin{aligned} \omega &\in \forall_j \langle A_j \rangle \\ &\subset \forall_k \langle B_k \rangle \end{aligned}$$

und folglich $\langle B_k, 0 \rangle \in \omega$ für alle k . Aufgrund der Definition von ω gibt es also zu jedem k ein j mit $A_j < B_k$. **QED**

Theorem T.23.8 Für endlich viele $A_j < \mathcal{H}$ mit $\forall_j \langle A_j \rangle = \emptyset$ gibt es vertauschbare Unterräume $D_j < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = 0$, so dass für alle j gilt: $A_j < D_j$.

Beweis: Es sei

$$\omega := \{ (G, t) \in \mathcal{E} \mid \exists_j (A_j < U_{-t} G) \}$$

Dann ist

$$\omega \in \bigcap (\text{SG})$$

sowie

$$\omega \in \bigcap (\text{MON})$$

und außerdem

$$\omega \in \bigvee_j \langle A_j \rangle_0$$

Wenn nun $\bigvee_j \langle A_j \rangle = \emptyset$ ist, so kann ω nicht in Ω und folglich nicht in $\bigcap (\text{SEC})$ liegen. Es gibt somit vertauschbare $E_k < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_k E_k = 0$ sowie $t \in T$, so dass gilt:

$$\omega \in \bigvee_k \langle E_k, t \rangle_0$$

und folglich für alle k

$$(E_k, t) \in \omega$$

Aufgrund der Definition von ω folgt dann mit

$$F_k := U_{-t} E_k \quad (\text{für alle } k)$$

die Aussage

$$\bigvee_k \exists_j (A_j < F_k)$$

Es gibt somit eine Abbildung f vom Indexbereich von k in den Indexbereich von j mit

$$\bigvee_k (A_{f(k)} < F_k)$$

Es sei nun

$$D_j := \bigcap_{k \in f^{-1}(j)} F_k$$

(Für den Fall $f^{-1}(j) = \emptyset$ setze man hier $D_j := \mathcal{H}$.)

Dann sind auch die D_j miteinander vertauschbar und es gilt:

$$\bigcap_j D_j = 0$$

Zu festem j gilt nun: Für alle $k \in f^{-1}(j)$ ist $f(k) = j$ und somit

$$\begin{aligned} A_j &= A_{f(k)} \\ &< F_k \end{aligned}$$

Da dies für alle $k \in f^{-1}(j)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} A_j &< \bigcap_{k \in f^{-1}(j)} F_k \\ &= D_j \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. **QED**

Theorem T.23.9 Zu $F \in \mathcal{A}^\wedge$ sowie einer unendlichen Folge $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge$ gilt:

$$F \subset \exists_k F_k \Rightarrow \exists_k (F \subset F_k)$$

Beweis: Es seien $A_i < \mathcal{H}$ sowie $B_{jk} < \mathcal{H}$ mit

$$F = \bigvee_i \langle A_i \rangle$$

und

$$F_k = \bigvee_j \langle B_{jk} \rangle$$

Für den Fall $F = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Es sei also

$$\bigvee_i \langle A_i \rangle \neq \emptyset$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$\bigvee_i \langle A_i \rangle \subset \exists_k \bigvee_j \langle B_{jk} \rangle$$

Es sei nun

$$\omega := \{ (G, t) \in \mathcal{E} \mid \exists_i (A_i < U_{-t}G) \}$$

Mit L.23.18 erhalten wir

$$\omega \in \bigvee_i \langle A_i \rangle$$

Es folgt dann

$$\omega \in \exists_k \bigvee_j \langle B_{jk} \rangle$$

und man kann ein k wählen, so dass gilt:

$$\omega \in \bigvee_j \langle B_{jk} \rangle$$

Es ist dann:

$$\bigvee_j [\omega \in \langle B_{jk} \rangle]$$

$$\bigvee_j [(B_{jk}, 0) \in \omega]$$

$$\bigvee_j \exists_i (A_i < B_{jk}) \quad (\text{Definition von } \omega)$$

$$\bigvee_j \exists_i (\langle A_i \rangle \subset \langle B_{jk} \rangle) \quad (\text{mit MON})$$

Für alle j ist also

$$\bigvee_i \langle A_i \rangle \subset \langle B_{jk} \rangle$$

und somit

$$F = \bigvee_i \langle A_i \rangle$$

$$\subset \bigvee_j \langle B_{jk} \rangle$$

$$= F_k$$

QED

Theorem T.23.10 Für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\rho(\bigvee_j \langle A_j \rangle) = \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_1, \dots, D_n \in \mathcal{U} \wedge \perp_j D_j \}$$

Beweis: Die Richtung " \leq " des Theorems folgt aus der Definition von ρ^δ sowie aus der Tatsache, dass für vertauschbare Unterräume D_1, \dots, D_n von \mathcal{H} mit

$$\bigcap_j D_j = 0 \text{ stets gilt: } \bigvee_j \langle D_j \rangle = \emptyset.$$

Zum Beweis der Richtung " \geq " sei $D_1, \dots, D_n < \mathcal{H}$ mit $\forall_j \langle D_j \rangle = \emptyset$ und dazu

$$d := \sum_j \delta(A_j, D_j)$$

Nach T.23.8 gibt es dann vertauschbare E_j mit $\bigcap_j E_j = 0$ und (für alle j) $D_j < E_j$.

Es sei nun

$$e := \sum_j \delta(A_j, E_j)$$

Zu zeigen bleibt dann nur: $e \leq d$. Es ist jedoch für alle j :

$$\delta(A_j, E_j) \leq \delta(A_j, D_j) + \delta(D_j, E_j)$$

Wegen $D_j < E_j$ ist $\delta(D_j, E_j) = 0$ und somit

$$\delta(A_j, E_j) \leq \delta(A_j, D_j)$$

Daraus folgt wie gewünscht $e \leq d$.

QED

L.23.19 Für $A, B < \mathcal{H}$ ist stets

$$\rho(\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle) \geq |\pi_A \pi_B|$$

Beweis: Aus der Gegenannahme

$$\rho(\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle) < |\pi_A \pi_B|$$

folgt mit T.23.10 die Existenz vertauschbarer $D, E < \mathcal{H}$ mit

$$D \cap E = 0$$

und

$$\delta(A, D) + \delta(B, E) < |\pi_A \pi_B|$$

Wegen $E \perp D$ ist $E < D^\perp$ und somit

$$\begin{aligned} \delta(A, D) + \delta(B, D^\perp) &\leq \delta(A, D) + \delta(B, E) \quad (\text{mit T.23.2}) \\ &< |\pi_A \pi_B| \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} |\pi_A \pi_B| &= |\pi_A \pi_{D^\perp} \pi_B + \pi_A \pi_D \pi_B| \\ &\leq |\pi_A \pi_{D^\perp} \pi_B| + |\pi_A \pi_D \pi_B| \quad (\text{T.23.1}) \\ &\leq |\pi_A \pi_{D^\perp}| + |\pi_D \pi_B| \quad (\text{L.23.15 und L.23.14}) \\ &= \delta(A, D) + \delta(B, D^\perp) \quad (\text{D.23.5 und L.23.13}) \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Widerspruch.

QED

L.23.20 Für $A_1, \dots, A_n < \mathcal{H}$ und vertauschbare $D_1, \dots, D_n < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = 0$ gilt:

$$\mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \mu(\forall_j \langle A_j \rangle) &\leq \rho^2(\forall_j \langle A_j \rangle) \\ &\leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2 \quad (\text{nach T.23.10}) \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.23.21 Für $A < \mathcal{H}$ und vertauschbare $D_1, \dots, D_n < \mathcal{H}$ gilt:

$$|\pi_A \pi_{\oplus_k D_k}|^2 \leq \sum_k |\pi_A \pi_{D_k}|^2$$

Beweis: Für alle k sei

$$E_k := D_k \cap [\oplus_{j < k} D_j]^\perp$$

Dann sind die E_k paarweise orthogonal und es ist

$$\oplus_k E_k = \oplus_k D_k$$

Ferner sei (a_j) eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , so dass A erzeugt wird von einer Teilmenge $\{a_j \mid j \in J_A\}$ der Basisvektoren. Dann ist:

$$\begin{aligned} |\pi_A \pi_{\oplus_k D_k}|^2 &= \sum_j |(\pi_A \pi_{\oplus_k D_k})^* a_j|^2 && \text{(L.23.4)} \\ &= \sum_j |\pi_{\oplus_k D_k} \pi_A a_j|^2 \\ &= \sum_{j \in J_A} |\pi_{\oplus_k D_k} a_j|^2 \\ &= \sum_{j \in J_A} |\pi_{\oplus_k E_k} a_j|^2 \\ &= \sum_{j \in J_A} |\sum_k \pi_{E_k} a_j|^2 \\ &= \sum_{j \in J_A} \sum_k |\pi_{E_k} a_j|^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= \sum_k \sum_{j \in J_A} |\pi_{E_k} a_j|^2 \\ &= \sum_k \sum_j |\pi_{E_k} \pi_A a_j|^2 \\ &= \sum_k \sum_j |(\pi_A \pi_{E_k})^* a_j|^2 \\ &= \sum_k |\pi_A \pi_{E_k}|^2 && \text{(L.23.4)} \\ &= \sum_k |\pi_A \pi_{D_k} \pi_{E_k}|^2 && \text{(da } E_k < D_k) \\ &\leq \sum_k |\pi_A \pi_{D_k}|^2 && \text{(mit L.23.15)} \end{aligned}$$

QED

L.23.22 Für $A < \mathcal{H}$ und vertauschbare $E_1, \dots, E_n < \mathcal{H}$ gilt:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \langle E_s \rangle) \geq |\pi_A \pi_{\oplus_s E_s}|^2$$

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass für alle s gilt:

$$\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \neq \emptyset$$

denn wenn es ein s gäbe mit

$$\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle = \emptyset$$

so wäre wegen T.23.8

$$A \perp E_s$$

und man könnte E_s auf beiden Seiten der Ungleichung entfernen, ohne dass sich die beiden Ausdrücke

$$\langle A \rangle \wedge \exists_s \langle E_s \rangle$$

und

$$\pi_A \pi_{\oplus_s E_s}$$

verändern.

Wir nehmen nun an, es sei

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \langle E_s \rangle) < |\pi_A \pi_{\oplus_s E_s}|^2$$

Dann gibt es zu

$$G := \langle A \rangle \wedge \exists_s \langle E_s \rangle$$

aufgrund der expliziten Darstellung von μ mittels

$$\mu(G) = \inf \{ \sum_k \rho^2(F_k) \mid F_1, F_2, \dots \in \mathcal{A}^\wedge \text{ und } G \subset \exists_k F_k \}$$

eine endliche oder unendliche Folge F_1, F_2, \dots von Elementen von \mathcal{A}^\wedge mit

$$G \subset \exists_k F_k$$

und

$$(**) \sum_k \rho^2(F_k) < |\pi_A \pi_{\oplus_s E_s}|^2$$

Da man stets Folgenglieder der Form $\langle \circ \rangle$ hinzufügen kann, hat die Folge der F_k o.B.d.A. unendlich viele Glieder.

Für jedes s gilt nun

$$\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \subset \exists_k F_k$$

und nach T.23.9 gibt es ein k mit

$$\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \subset F_k$$

Zu jedem s wähle also ein $f(s)$ aus dem Indexbereich von k , so dass gilt:

$$\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \subset F_{f(s)}$$

Damit folgt für alle k :

$$\forall_{s \in f^{-1}(k)} [\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \subset F_k]$$

Zu jedem k sei

$$D_k := \oplus \{ E_s \mid s \in f^{-1}(k) \}$$

Die D_k sind (ebenso wie die E_s) miteinander vertauschbar und es gilt:

$$\oplus_k D_k = \oplus_s E_s$$

Da es nur endlich viele Indizes s gibt, sind nur endlich viele der D_k vom Nullraum o verschieden.

Wegen $F_k \in \mathcal{A}^\wedge$ gibt es $B_{jk} < \mathcal{H}$ mit

$$F_k = \forall_j \langle B_{jk} \rangle$$

Für alle k folgt nun:

$$\forall_{s \in f^{-1}(k)} [\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \subset \forall_j \langle B_{jk} \rangle]$$

Nach T.23.7 ist dann (wegen $\langle A \rangle \wedge \langle E_s \rangle \neq \emptyset$)

$$\forall_{s \in f^{-1}(k)} \forall_j [A \subset B_{jk} \vee E_s \subset B_{jk}]$$

Es folgt (für alle k):

$$\forall_j [A \subset B_{jk} \vee \forall_{s \in f^{-1}(k)} (E_s \subset B_{jk})]$$

$$\forall_j [A \subset B_{jk} \vee D_k \subset B_{jk}]$$

$$\forall_j [(\langle A \rangle \subset \langle B_{jk} \rangle) \vee (\langle D_k \rangle \subset \langle B_{jk} \rangle)] \quad (\text{mit MON})$$

$$\forall_j [\langle A \rangle \wedge \langle D_k \rangle \subset \langle B_{jk} \rangle]$$

$$\langle A \rangle \wedge \langle D_k \rangle \subset \forall_j \langle B_{jk} \rangle$$

$$\rho^2(\langle A \rangle \wedge \langle D_k \rangle) \leq \rho^2(\forall_j \langle B_{jk} \rangle) \quad (\text{da } \rho \text{ monoton ist})$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} |\pi_A \pi_{\oplus_s E_s}|^2 &= |\pi_A \pi_{\oplus_k D_k}|^2 \\ &\leq \sum_k |\pi_A \pi_{D_k}|^2 \quad (\text{nach L.23.21}) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_k \rho^2(\langle A \rangle \wedge \langle D_k \rangle) \quad (\text{nach L.23.19})$$

$$\leq \sum_k \rho^2(\forall_j \langle B_{jk} \rangle)$$

$$= \sum_k \rho^2(F_k)$$

im Widerspruch zu (**).

QED

L.23.23 Für $A \subset \mathcal{H}$ und vertauschbare $E_1, \dots, E_n \subset \mathcal{H}$ gilt:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \forall_j \langle E_j \rangle) \leq |\pi_A \pi_{\cap_j E_j}|^2$$

Beweis: Es sei $E := \cap_j E_j$. Dann sind die E_j sowie E^\perp vertauschbar mit

$$\cap_j E_j \cap E^\perp = 0$$

Wegen L.23.20 ist dann

$$\begin{aligned} \mu(\langle A \rangle \wedge \forall_j \langle E_j \rangle) &\leq [\delta(A, E^\perp) + \sum_j \delta(E_j, E_j)]^2 \\ &= \delta^2(A, E^\perp) \quad (\text{L.23.17}) \end{aligned}$$

$$= |\pi_A \pi_{(E^\perp)^\perp}|^2 \quad (\text{D.23.5})$$

$$= |\pi_A \pi_E|^2$$

$$= |\pi_A \pi_{\cap_j E_j}|^2$$

QED

Für das Folgende formulieren wir als generelle Voraussetzung:

- (+) Es sei S eine endliche Indexmenge und zu jedem $s \in S$ sei J_s ebenfalls eine endliche Indexmenge. Zu $s \in S$ und $j \in J_s$ sei $E_{j_s} < \mathcal{H}$, und alle diese Unterräume seien miteinander vertauschbar.

L.23.24 Es sei die Voraussetzung (+) gegeben und

$$J := \times_{s \in S} J_s \\ := \{ g : S \rightarrow \bigcup_s J_s \mid \forall_{s \in S} [g(s) \in J_s] \}$$

sei das kartesische Produkt der Indexmengen J_s . Dann gelten:

$$(1) \exists_{s \in S} \forall_{j \in J_s} \langle E_{j_s} \rangle = \forall_{g \in J} \exists_{s \in S} \langle E_{g(s),s} \rangle$$

und

$$(2) \bigoplus_{s \in S} \bigcap_{j \in J_s} E_{j_s} = \bigcap_{g \in J} \bigoplus_{s \in S} E_{g(s),s}$$

Beweis: Die Aussage (1) beruht auf den Distributivgesetzen der Mengenlehre. Sie stellt eine Verallgemeinerung der folgenden Aussage dar:

$$(A \cap B \cap C) \cup (D \cap E) \\ = [A \cup (D \cap E)] \cap [B \cup (D \cap E)] \cap [C \cup (D \cap E)] \\ = (A \cup D) \cap (A \cup E) \cap (B \cup D) \cap (B \cup E) \cap (C \cup D) \cap (C \cup E)$$

Die Aussage (2) ergibt sich in ganz analoger Weise, da sich die E_{j_s} aufgrund ihrer Vertauschbarkeit auf der Basis derselben Orthonormalbasis darstellen lassen. Dabei wird jedes E_{j_s} von einer Teilmenge der Basisvektoren erzeugt.

QED

L.23.25 Unter der Voraussetzung (+) gilt:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{j_s} \rangle) \leq |\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{j_s}}|^2$$

Beweis: Es sei

$$J := \{ g : S \rightarrow \bigcup_s J_s \mid \forall_{s \in S} [g(s) \in J_s] \}$$

Da für alle $g \in J$ und $s \in S$

$$E_{g(s),s} < \bigoplus_s E_{g(s),s}$$

ist, folgt mit MON

$$\langle E_{g(s),s} \rangle \subset \langle \bigoplus_s E_{g(s),s} \rangle$$

und da dies für alle s gilt, ist für alle $g \in J$

$$\exists_s \langle E_{g(s),s} \rangle \subset \langle \bigoplus_s E_{g(s),s} \rangle$$

Es folgt nun:

$$\begin{aligned}
 & \mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{js} \rangle) \\
 &= \mu(\langle A \rangle \wedge \forall_{g \in J} \exists_s \langle E_{g(s),s} \rangle) && \text{(L.23.24(1))} \\
 &\leq \mu(\langle A \rangle \wedge \forall_{g \in J} \langle \bigoplus_s E_{g(s),s} \rangle) && \text{(da } \mu \text{ monoton ist)} \\
 &\leq |\pi_A \pi_{\bigoplus_{g \in J} \bigoplus_s E_{g(s),s}}|^2 && \text{(mit L.23.23)} \\
 &= |\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{js}}|^2 && \text{(L.23.24(2))} \quad \mathbf{QED}
 \end{aligned}$$

L.23.26 Unter der Voraussetzung (+) gilt:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{js} \rangle) \geq |\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{js}}|^2$$

Beweis: Es ist für alle $j \in J_s$

$$\bigcap_{j \in J_s} E_{js} < E_{js}$$

und somit (wegen MON):

$$\langle \bigcap_{j \in J_s} E_{js} \rangle \subset \forall_{j \in J_s} \langle E_{js} \rangle$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
 |\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{js}}|^2 &\leq \mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \langle \bigcap_j E_{js} \rangle) && \text{(mit L.23.22)} \\
 &\leq \mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{js} \rangle) && \text{(da } \mu \text{ monoton ist)} \quad \mathbf{QED}
 \end{aligned}$$

Theorem T.23.11 Unter der Voraussetzung (+) gilt:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{sj} \rangle) = |\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{sj}}|^2$$

Im Falle $\dim A < \infty$ ist außerdem:

$$\mu(\langle A \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle E_{sj} \rangle) = \text{tr}(\pi_A \pi_{\bigoplus_s \bigcap_j E_{sj}})$$

Beweis: Das Theorem folgt unmittelbar aus L.23.25, L.23.26 sowie L.23.11.

QED

Theorem T.23.12 Für vertauschbare $E_j < \mathcal{H}$ (mit endlicher Indexmenge) gilt:

$$\rho(\langle A \rangle \wedge \forall_j \langle E_j \rangle) = |\pi_A \pi_{\bigcap_j E_j}|$$

Beweis: Das Theorem ist ein Korollar aus T.23.11, da

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} = \rho^2 \quad \mathbf{QED}$$

B25. Endophysikalische Betrachtungen

Theorem T.25.1 μ ist das maximale äußere Maß auf \mathcal{A} , für welches gilt:

(*) Für beliebige $A_1, \dots, A_n < \mathcal{H}$ sowie $D_1, \dots, D_n < \mathcal{H}$ mit $(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$

gilt die Ungleichung

$$\mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2$$

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, dass das in Kapitel 23 definierte äußere Maß μ die Bedingung (*) erfüllt. Hierzu seien Unterräume $A_j < \mathcal{H}$ gegeben sowie $D_j < \mathcal{H}$ mit $(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$. Es ist dann

$$\rho(\forall_j \langle A_j \rangle) = \rho^\delta(A_1, \dots, A_n) \quad (\text{Definition von } \rho)$$

$$= \inf \{ \sum_j \delta(A_j, D_j) \mid D_j < \mathcal{H} \text{ und } (\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset \}$$

(Definition von ρ^δ)

$$\leq \sum_j \delta(A_j, D_j)$$

Wegen

$$\mu|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq \rho^2$$

folgt

$$\mu(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2$$

Somit erfüllt μ die Bedingung (*).

Es sei nun μ' ein weiteres äußeres Maß, das (*) erfüllt. Zu zeigen ist dann, dass $\mu' \leq \mu$ ist.

Zu beliebigen $A_j < \mathcal{H}$ gilt: Für alle $D_j < \mathcal{H}$ mit $(\forall_j \langle D_j \rangle) = \emptyset$ ist:

$$\mu'(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\sum_j \delta(A_j, D_j)]^2$$

Für die gegebenen A_j gilt dann:

$$\mu'(\forall_j \langle A_j \rangle) \leq [\rho^\delta(A_1, \dots, A_n)]^2 \quad (\text{Definition von } \rho^\delta)$$

$$= \rho^2(\forall_j \langle A_j \rangle) \quad (\text{Definition von } \rho)$$

Somit ist μ' ein äußeres Maß, für welches gilt:

$$(\mu')|_{\mathcal{A}^\wedge} \leq \rho^2$$

Aufgrund der Maximalität von μ folgt:

$$\mu' \leq \mu$$

QED

B29. Eine Schachtelungseigenschaft für t-zugängliche Ereignisse

Wir betrachten hier eine t-zugängliche Folge von Ereignissen

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n) \in \mathcal{E}$$

mit der Abhängigkeitsrelation \ll auf der Indexmenge

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Die Relation \ll ist dabei eine Teilrelation von $<$.

Aufgrund der Definition t-zugänglicher Ereignisfolgen gibt es zu jedem $k \in J$ eine makroskopische Eigenschaft $F_k \in \mathcal{S}$, so dass mit den Abkürzungen

$$A_k := U_{-t_k} E_k \quad (\text{für alle } k \in J)$$

$$D_k := U_{-t} F_k \quad (\text{für alle } k \in J)$$

sowie

$$J_k := \{j \in J \mid j \ll k\} \quad (\text{für alle } k \in J)$$

gilt: Für jede Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen

$$(i) \quad B_j = A_j \quad (\text{für alle } j \in J_k)$$

$$(ii) \quad B_j \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{für alle } j \in J \setminus J_k \setminus \{k\})$$

$$(iii) \quad B_k = \mathcal{H}$$

erfüllt, gilt die Dokumentbeziehung

$$(DB) \quad \pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Für alle $k \in J$ sei

$$A_{k;1} := A_k$$

$$A_{k;0} := (A_k)^\perp$$

$$A_{k;\emptyset} := \mathcal{H}$$

Analog dazu sei

$$D_{k;1} := D_k$$

$$D_{k;0} := (D_k)^\perp$$

$$D_{k;\emptyset} := \mathcal{H}$$

Für jedes $\tau \in \{0, 1, \emptyset\}$ ist folglich

$$A_{k;\tau} < \mathcal{H}$$

$$D_{k;\tau} < \mathcal{H}$$

Es sei

$$\mathcal{W} := \{ \sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\} \mid \forall_{k \in J} [\sigma(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{j \ll k} \sigma(j) = 1] \}$$

die Menge der "Belegungen" auf der Indexmenge J .

Ferner sei:

$$\begin{aligned} \pi_\sigma &:= \pi_{A_n; \sigma(n)} \cdots \pi_{A_1; \sigma(1)} && (\text{für alle } \sigma \in \mathcal{W}) \\ M_\sigma &:= \bigcap_{k \in J} A_{k; \sigma(k)} && (\text{für alle } \sigma \in \mathcal{W}) \\ M^\wedge &:= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \} \end{aligned}$$

Für alle $k \in J$ sei außerdem:

$$\begin{aligned} B_{k; \tau} &:= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) = \tau \} && (\text{für } \tau \in \{0, 1, \emptyset\}) \\ C_{k; \tau} &:= B_{k; \tau} \oplus B_{k; \emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp && (\text{für } \tau \in \{0, 1\}) \\ C_{k; \emptyset} &:= \mathcal{H} \end{aligned}$$

Theorem T.29.1 Die M_σ sind paarweise orthogonal.

Beweis: Es seien σ und σ' verschiedene Elemente von \mathcal{W} . Dazu sei k der kleinste Index, in dem sich σ und σ' voneinander unterscheiden. Wäre nun $\sigma(k) = \emptyset$, so gäbe es aufgrund der Definition von \mathcal{W} ein $j \ll k$ mit $\sigma(j) \neq 1$. Folglich wäre dann auch $\sigma'(j) \neq 1$ und somit $\sigma'(k) = \emptyset$, im Widerspruch zu $\sigma(k) \neq \sigma'(k)$.

Es ist somit $\sigma(k) \in \{0, 1\}$. In derselben Weise kann man zeigen, dass auch $\sigma'(k) \in \{0, 1\}$ ist. Da $\sigma(k) \neq \sigma'(k)$ ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma(k) = 1$ und $\sigma'(k) = 0$ ist.

Es folgen

$$\begin{aligned} A_{k; \sigma(k)} &= A_k \\ A_{k; \sigma'(k)} &= (A_k)^\perp \end{aligned}$$

und wegen

$$M_\sigma < A_{k; \sigma(k)}$$

und

$$M_{\sigma'} < A_{k; \sigma'(k)}$$

ist

$$M_\sigma \perp M_{\sigma'}$$

QED

Theorem T.29.2 Alle Unterräume M^\wedge , $B_{k; \tau}$ und $C_{k; \tau}$ sind paarweise miteinander vertauschbar.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Definition dieser Unterräume und der Orthogonalität der M_σ . **QED**

Für das folgende Lemma sei

$$\mathcal{W}' := \{ \sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\} \mid \forall_{k \in J} [\sigma(k) \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{j \ll k} \sigma(j) = 1] \}$$

Offenbar gilt dann $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$.

L.29.1 Für alle $k \in J$ und $\sigma \in \mathcal{W}'$ gilt mit den Abkürzungen

$$G_j := A_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

$$H_j := D_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

für jede Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen

$$(i') \quad B_j = G_j \quad (\text{für alle } j \in J_k)$$

$$(ii') \quad B_j \in \{G_j, H_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{für alle } j \in J \setminus J_k \setminus \{k\})$$

$$(iii') \quad B_k = \mathcal{H}$$

erfüllt, die Gleichung

$$(DB') \quad \pi_{G_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Bemerkung: Es handelt sich bei den Bedingungen (i') bis (iii') sowie (DB') um dieselben Aussagen, die auch bei der Definition der t-Zugänglichkeit auftreten, wobei lediglich überall A_j durch G_j und D_j durch H_j ersetzt wurde.

Beweis: Zu $k \in J$ und $\sigma \in \mathcal{W}'$ sei B_1, \dots, B_n eine Folge, die die Bedingungen (i') bis (iii') erfüllt.

Für den Fall $\sigma(k) = \emptyset$ ist die Behauptung trivial, denn es ist dann:

$$G_k = H_k = \mathcal{H}.$$

Für den Fall $\sigma(k) \neq \emptyset$ erfolgt der Beweis induktiv über

$$r := \# \{ j \in J \mid \sigma(j) = 0 \}$$

d.h. über die Anzahl der Nullen in der "Belegung" σ .

Fall $r = 0$

Für alle $j \ll k$ ist (wegen $\sigma(k) \neq \emptyset$ und $\sigma \in \mathcal{W}'$) $\sigma(j) = 1$.

Da $r = 0$ ist, gilt für alle $j \in J$

$$\sigma(j) \in \{1, \emptyset\}$$

und folglich:

$$G_j \in \{A_j, \mathcal{H}\}$$

$$H_j \in \{D_j, \mathcal{H}\}$$

$$B_j \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{wegen (i'), (ii') und (iii')})$$

Für $j \ll k$ gilt ferner

$$B_j = G_j = A_j \quad (\text{wegen (i') und } \sigma(j) = 1)$$

Außerdem ist wegen (iii')

$$B_k = \mathcal{H}$$

Somit sind die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wegen $\sigma(k) \in \{1, \emptyset\}$ und $\sigma(k) \neq \emptyset$ ist $\sigma(k) = 1$ und folglich

$$G_k = A_k \text{ und } H_k = D_k$$

Daher ist die zu beweisende Gleichung (DB') gerade eine der Dokumentbeziehungen (DB), die aufgrund der t-Zugänglichkeit von $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ gelten.

QED (Fall $r = 0$)

Fall $r > 0$ (Induktionsschluss)

Die Induktionsannahme besagt, dass für alle $\sigma' \in \mathcal{W}'$ mit

$$r' := \# \{ j \in J \mid \sigma'(j) = 0 \} < r$$

und für alle dazu passenden Folgen B_1, \dots, B_n die Gleichung (DB') gilt.

Es sei

$$v := \max \{ j \in J \mid \sigma(j) = 0 \}$$

die letzte Position, in der σ eine 0 aufweist. Da $r > 0$ ist, gibt es mindestens eine solche Position, d.h. es ist $v \in J$ und es gilt $\sigma(v) = 0$.

Es seien

$$\sigma'(v) := 1 \text{ und } \sigma'(j) := \sigma(j) \text{ für alle } j \neq v$$

$$\sigma''(v) := \emptyset \text{ und } \sigma''(j) := \sigma(j) \text{ für alle } j \neq v$$

σ' und σ'' gehören erst recht zu \mathcal{W}' .

Da σ' weniger Nullen aufweist als σ und $\sigma'(k) \neq \emptyset$ ist, kann die Induktionsannahme auf σ' angewendet werden. Für σ' gilt demnach zu passenden B_1, \dots, B_n die Gleichung (DB'). Falls $v \neq k$ ist, gilt dasselbe wegen $\sigma''(k) = \sigma(k) \neq \emptyset$ auch für σ'' .

Unterfall $v = k$

In diesem Fall passt jede zu σ passende Folge B_1, \dots, B_n auch zu σ' , da sich σ' nur bei dem Index k von σ unterscheidet. Zur Abkürzung setzen wir:

$$L := \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme auf σ' erhält man daher mit

$$G' := (G_k)^\perp$$

$$H' := (H_k)^\perp$$

die Gleichung:

$$\pi_{G'} L = \pi_{H'} L$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \pi_{G_k} L &= L - \pi_{G'} L \\ &= L - \pi_{H'} L \\ &= \pi_{H_k} L \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Aussage (DB'). **QED** (Unterfall $v = k$)

Unterfall $v \neq k$ und $B_v \in \{G_v, H_v\}$

Es sei

$$B' := (B_v)^\perp$$

Ist nun $B_1, \dots, B_v, \dots, B_n$ eine zu σ passende Folge, so passt die Folge $B_1, \dots, B', \dots, B_n$ zu σ' und ebenso $B_1, \dots, \mathcal{H}, \dots, B_n$ zu σ'' . Die Anwendung der Induktionsannahme auf σ' ergibt die Gleichung

$$\pi_{G_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B'} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B'} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Analog erhält man mit σ''

$$\pi_{G_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{\mathcal{H}} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{\mathcal{H}} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Durch Differenzbildung erhält man

$$\pi_{G_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_v} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_v} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

und damit die zu beweisende Aussage (DB').

QED (Unterfall $v \neq k$ und $B_v \in \{G_v, H_v\}$)

Unterfall $v \neq k$ und $B_v \notin \{G_v, H_v\}$

In diesem Fall ist $v \in J \setminus J_k \setminus \{k\}$ und $B_v = \mathcal{H}$. Die zu beweisende Gleichung (DB') ist dann gerade eine jener Gleichungen, die aufgrund der Induktionsannahme für σ' gelten.

QED (Unterfall $v \neq k$ und $B_v \notin \{G_v, H_v\}$)

QED (Fall $r > 0$)

QED

Bemerkung: Wegen $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ gilt L.29.1 insbesondere für alle $\sigma \in \mathcal{W}$.

L.29.2 Es sei $\sigma \in \mathcal{W}$. Mit den Abkürzungen

$$G_j := A_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

$$H_j := D_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

gilt dann für alle $k \in J \cup \{0\}$ die Aussage

$$\pi_{G_k} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über den Index k . Der Fall $k = 0$ ist trivial.

Es sei nun $k \in J$. Dann ist:

$$\begin{aligned} & \pi_{G_k} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \\ &= \pi_{H_k} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{aufgrund von L.29.1,} \\ & \quad \text{mit } B_j := G_j \text{ für } j < k \text{ und } B_j := \mathcal{H} \text{ für } j \geq k) \\ &= \pi_{H_k} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit der Induktionsannahme}) \quad \mathbf{QED} \end{aligned}$$

Theorem T.29.3 Für alle $\sigma \in \mathcal{W}$ gilt die Gleichung:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$$

Beweis: Es sei $\sigma \in \mathcal{W}$. Mit den Abkürzungen

$$G_j := A_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

$$H_j := D_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

folgt

$$\begin{aligned} & \pi_\sigma \pi_{UR} \\ &= \pi_{G_n} \cdots \pi_{G_{k+1}} \pi_{G_k} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{Definition von } \pi_\sigma) \\ &= \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_k} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.29.2}) \\ &= \pi_{H_k} \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{wegen } F_j \in \mathcal{S} \text{ sind die } F_j \text{ und} \\ & \quad \text{folglich auch die } H_j \text{ miteinander vertauschbar}) \\ &= \pi_{H_k} \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.29.2}) \\ &= \pi_{G_k} \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.29.1}) \end{aligned}$$

Es folgt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} \varphi \in G_k$$

Da dies für alle k gilt, folgt

$$\begin{aligned} \pi_\sigma \pi_{UR} \varphi &\in \bigcap_k G_k \\ &= M_\sigma \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \pi_\sigma \pi_{UR} &= \pi_{M_\sigma} \pi_\sigma \pi_{UR} \\ &= \pi_{M_\sigma} \pi_{G_n} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{Definition von } \pi_\sigma) \\ &= \pi_{M_\sigma} \pi_{UR} \end{aligned}$$

Letzteres gilt, weil (für alle k) $M_\sigma < G_k$ ist.

QED

Theorem T.29.4 Es sei I der Einheitsoperator auf \mathcal{H} . Dann gilt:

$$I = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_\sigma$$

Beweis: Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über n bewiesen.

Fall n = 1

Es ist dann $J = \{1\}$. Die Menge \mathcal{W} enthält genau die beiden Elemente σ_1 und σ_0 , wobei $\sigma_1(1) := 1$ und $\sigma_0(1) := 0$ ist. (Der Fall $\sigma(1) = \emptyset$ kann nicht eintreten, da es kein $j < 1$ geben kann mit $\sigma(j) \neq 1$.) Mit $A := A_1$ ist nun

$$\pi_{\sigma_1} = \pi_{A_1; \sigma_1(1)} = \pi_A$$

$$\pi_{\sigma_0} = \pi_{A_1; \sigma_0(1)} = \pi_{A^\perp}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_\sigma &= \pi_{\sigma_1} + \pi_{\sigma_0} \\ &= \pi_A + \pi_{A^\perp} \\ &= I \end{aligned}$$

QED (n = 1)

Fall n > 1 (Induktionsschluss)

Es sei \mathcal{W}' ebenso wie \mathcal{W} gebildet, aber zu der Indexmenge

$$J' := \{1, \dots, n-1\}$$

anstelle von J. Für alle $\tau \in \{0, 1, \emptyset\}$ und $\sigma' \in \mathcal{W}'$ bezeichne (σ', τ) jenes $\sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\}$, für das gilt:

$$\sigma|_{J'} = \sigma'$$

und

$$\sigma(n) = \tau$$

Nun seien

$$\mathcal{W}^+ := \{ \sigma' \in \mathcal{W}' \mid \forall_{j \ll n} \sigma'(j) = 1 \}$$

$$\mathcal{W}^- := \mathcal{W}' \setminus \mathcal{W}^+$$

Aufgrund der Definition von \mathcal{W} kann man leicht zeigen, dass

$$\mathcal{W} = \{ (\sigma', \tau) \mid (\sigma' \in \mathcal{W}^+ \text{ und } \tau \in \{0, 1\}) \text{ oder } (\sigma' \in \mathcal{W}^- \text{ und } \tau = \emptyset) \}$$

ist. Wegen

$$\begin{aligned} \pi_{(\sigma', \emptyset)} &= \pi_{\mathcal{H}} \pi_{\sigma'} && \text{(Def. von } \pi_\sigma) \\ &= \pi_{\sigma'} \end{aligned}$$

und (mit $A := A_n$)

$$\begin{aligned} \pi_{(\sigma', 1)} + \pi_{(\sigma', 0)} &= \pi_A \pi_{\sigma'} + \pi_{A^\perp} \pi_{\sigma'} && \text{(Def. von } \pi_\sigma) \\ &= \pi_{\sigma'} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_{\sigma} &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}^-} \pi_{(\sigma', \emptyset)} + \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}^+} (\pi_{(\sigma', 1)} + \pi_{(\sigma', 0)}) \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}^-} \pi_{\sigma'} + \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}^+} \pi_{\sigma'} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}} \pi_{\sigma'} \\ &= I \quad (\text{nach der Induktionsannahme}) \end{aligned}$$

QED (n > 1)
QED

Theorem T.29.5 Es gilt: $UR < M^{\wedge}$.

Beweis: Es ist:

$$\pi_{UR} = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_{\sigma} \pi_{UR} \quad (\text{T.29.4})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}} \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} \quad (\text{T.29.3})$$

Da die M_{σ} paarweise orthogonal sind (T.29.1), erhalten wir

$$\begin{aligned} UR &< \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_{\sigma} \\ &= M^{\wedge} \quad (\text{Def. von } M^{\wedge}) \end{aligned} \quad \mathbf{QED}$$

Theorem T.29.6 Für alle $k \in J$ gilt:

$$B_{k;\tau} < A_{k;\tau} < C_{k;\tau} \quad (\text{für } \tau \in \{0,1,\emptyset\})$$

Beweis: Zu $\sigma \in \mathcal{W}$ mit $\sigma(k) = \tau$ gilt:

$$\begin{aligned} M_{\sigma} &= \bigcap_{k \in J} A_{k;\sigma(k)} \\ &< A_{k;\sigma(k)} \\ &= A_{k;\tau} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} B_{k;\tau} &= \bigoplus \{ M_{\sigma} \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) = \tau \} \quad (\text{Def. von } B_{k;\tau}) \\ &< A_{k;\tau} \end{aligned}$$

Im Fall $\tau \in \{0,1\}$ ist (wegen der Definition von $C_{k;\tau}$ und $B_{k;\tau}$)

$$\begin{aligned} (C_{k;\tau})^{\perp} &= [(M^{\wedge})^{\perp} \oplus B_{k;\tau} \oplus B_{k;\emptyset}]^{\perp} \\ &= M^{\wedge} \cap (B_{k;\tau})^{\perp} \cap (B_{k;\emptyset})^{\perp} \quad (\text{mit T.29.2}) \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma} \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) \neq \tau \wedge \sigma(k) \neq \emptyset \} \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma} \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) = 1-\tau \} \\ &= B_{k;1-\tau} \quad (\text{Definition von } B_{k;\tau}) \\ &< A_{k;1-\tau} \quad (\text{siehe oben}) \\ &= (A_{k;\tau})^{\perp} \quad (\text{Definition von } A_{k;\tau}) \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_{k;\tau} < C_{k;\tau}$

Im Fall $\tau = \emptyset$ ist $A_{k;\tau} = \mathcal{H}$ und $C_{k;\tau} = \mathcal{H}$. Trivialerweise gilt dann ebenfalls:

$$A_{k;\tau} < C_{k;\tau} \quad \text{QED}$$

Theorem T.29.7 Für jedes $\sigma \in \mathcal{W}$ gilt:

$$\bigcap_{k \in J} B_{k;\sigma(k)} = M_\sigma$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \in J} B_{k;\sigma(k)} &= \bigcap_{k \in J} \bigoplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' \in \mathcal{W} \wedge \sigma'(k) = \sigma(k) \} && \text{(Def. von } B_{k;\tau}) \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' \in \mathcal{W} \wedge \forall_k [\sigma'(k) = \sigma(k)] \} && \text{(mit T.29.1)} \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' = \sigma \} \\ &= M_\sigma \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.29.3 Falls für $\sigma, \sigma' \in \mathcal{W}$ gilt:

$$\forall_{k \in J} [\sigma'(k) = \sigma(k) \text{ oder } \sigma'(k) = \emptyset]$$

so ist $\sigma' = \sigma$.

Beweis: Angenommen, es wäre $\sigma' \neq \sigma$. Dann sei

$$v := \min \{ k \in J \mid \sigma'(k) \neq \sigma(k) \}$$

Aus $\sigma'(v) \neq \sigma(v)$ folgt nach der Voraussetzung $\sigma'(v) = \emptyset$. Nach der Definition von \mathcal{W} existiert dann ein $j \ll v$ mit $\sigma'(j) \neq 1$. Wegen $j < v$ und der Minimalität von v folgt $\sigma(j) \neq 1$ und aufgrund der Definition von \mathcal{W} ist $\sigma(v) = \emptyset$, also $\sigma(v) = \sigma'(v)$. Dies ist ein Widerspruch. QED

Theorem T.29.8 Für jedes $\sigma \in \mathcal{W}$ gilt:

$$M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} C_{k;\sigma(k)} = M_\sigma$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} &M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} C_{k;\sigma(k)} \\ &= M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} [B_{k;\sigma(k)} \oplus B_{k;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp] && \text{(Def. von } C_{k;\tau}) \\ &= M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} [B_{k;\sigma(k)} \oplus B_{k;\emptyset}] \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' \in \mathcal{W} \wedge \forall_k [\sigma'(k) = \sigma(k) \vee \sigma'(k) = \emptyset] \} && \text{(mit T.29.1 und} \\ & && \text{Def. von } B_{k;\tau}) \\ &= \bigoplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' \in \mathcal{W} \wedge \sigma' = \sigma \} && \text{(mit L.29.3)} \\ &= M_\sigma \end{aligned} \quad \text{QED}$$

Theorem T.29.9 Für jedes $\sigma \in \mathcal{W}$ gilt:

$$\bigcap_{k \in J} C_{k;\sigma(k)} < \bigcap_{k \in J} B_{k;\sigma(k)} \oplus (M^\wedge)^\perp$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k \in J} C_{k; \sigma(k)} \\ &= [M^\wedge \cap \bigcap_{k \in J} C_{k; \sigma(k)}] \oplus [(M^\wedge)^\perp \cap \bigcap_{k \in J} C_{k; \sigma(k)}] \quad (\text{mit T.29.2}) \\ &< M_\sigma \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{T.29.8}) \\ &= \bigcap_{k \in J} B_{k; \sigma(k)} \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{T.29.7}) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.29.10 Zu $\sigma \in \mathcal{W}$ sei $G_k := A_{k; \sigma(k)}$ (für alle $k \in J$) sowie $A := \bigcap_k G_k$.

Dann gelten:

- (a) $\mu(\forall_k \langle G_k \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) = \text{tr } \pi_A \pi_{\text{UR}} \pi_A$
- (b) $\mu(\forall_k \langle G_k \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) = \text{tr } \pi_{G_n} \dots \pi_{G_1} \pi_{\text{UR}} \pi_{G_1} \dots \pi_{G_n}$
- (c) Falls $\dim \text{UR} < \infty$ ist, kann man anstelle von

$$\text{tr } \pi_A \pi_{\text{UR}} \pi_A$$
 auch schreiben

$$\text{tr } \pi_A \pi_{\text{UR}}$$

Beweis: Aufgrund der Definitionen ist $A = M_\sigma$. Ferner ist (wegen MON und der Monotonie von μ):

$$\begin{aligned} \mu(\forall_k \langle G_k \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) &\leq \mu(\forall_k \langle C_{k; \sigma(k)} \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) \quad (\text{T.29.6}) \\ &= |\pi_{\bigcap_k C_{k; \sigma(k)}} \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{mit T.23.11}) \\ &= |\pi_{\bigcap_k C_{k; \sigma(k)}} \pi_{M^\wedge} \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{mit T.29.5}) \\ &= |\pi_{(M^\wedge) \cap \bigcap_k C_{k; \sigma(k)}} \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{mit T.29.2}) \\ &= |\pi_A \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{T.29.8}) \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} \mu(\forall_k \langle G_k \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) &\geq \mu(\forall_k \langle B_{k; \sigma(k)} \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) \quad (\text{T.29.6}) \\ &= |\pi_{\bigcap_k B_{k; \sigma(k)}} \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{mit T.23.11}) \\ &= |\pi_A \pi_{\text{UR}}|^2 \quad (\text{T.29.7}) \end{aligned}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} (*) \quad \mu(\forall_k \langle G_k \rangle \wedge \langle \text{UR} \rangle) &= |\pi_A \pi_{\text{UR}}|^2 \\ &= \text{tr } \pi_A \pi_{\text{UR}} \pi_A \quad (\text{D.23.3}) \end{aligned}$$

Damit ist (a) gezeigt.

Wegen

$$\pi_{G_n} \dots \pi_{G_1} = \pi_\sigma \quad (\text{Definition von } \pi_\sigma)$$

und

$$\begin{aligned}\pi_{\sigma} \pi_{UR} &= \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} && (\text{T.29.3}) \\ &= \pi_A \pi_{UR}\end{aligned}$$

folgt daraus unmittelbar die Aussage (b). Die Behauptung (c) ist eine Konsequenz aus (*) und L.23.10. **QED**

B30. Makroskopische Kontexte und die Plausibilität des- physikalischen "tertium non datur"

Es sei ein makroskopischer Kontext gegeben, d.h. eine t-zugängliche Folge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ von Ereignissen mit einer Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$, wobei J aufgeteilt ist in die Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

und

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

so dass gilt:

$$\forall k \in J'' \quad \forall j \ll k \quad j \in J'$$

Es seien

$$\mathcal{E}' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J' \}$$

die Menge der zu diesem Kontext zählenden Voraussetzungen und

$$\mathcal{E}'' := \{ (E_j, t_j) \mid j \in J'' \}$$

die Menge der in dem Kontext interessierenden Ereignisse.

Ferner sei

$$G_o := \langle UR \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle E_j, t_j \rangle_o$$

die Grundbedingung sowie

$$N_o := \forall_{j \in J''} [\langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o]$$

das physikalische "tertium non datur", bezogen auf die im gegebenen Kontext interessierenden Ereignisse.

Außerdem sei

$$A_j := \bigcup_{-t_j} E_j \quad (\text{für alle } j \in J)$$

und (in Analogie zu G_o und N_o)

$$G_1 := \langle UR \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle A_j \rangle_o$$

$$N_1 := \forall_{j \in J''} [\langle A_j \rangle_o \vee \langle (A_j)^\perp \rangle_o]$$

Wegen SG ist dann offenbar

$$\langle E_j, t_j \rangle_o \cap \Omega = \langle A_j \rangle_o \cap \Omega \quad (\text{für alle } j \in J)$$

sowie

$$G_o \cap \Omega = G_1 \cap \Omega$$

$$N_o \cap \Omega = N_1 \cap \Omega$$

Die Menge \mathcal{W} und die Ausdrücke $A_{k;\tau}$ (für alle $\tau \in \{0, 1, \emptyset\}$ und $k \in J$) seien wie in Kapitel 29 definiert.

L.30.1 Es gilt:

$$(G_1 \wedge \exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \forall_{k \in J} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle_o) \cap \Omega \subset N_1$$

Beweis: Es sei $\sigma \in \mathcal{W}$ und $\omega \in (G_1 \wedge \forall_{k \in J} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle_o) \cap \Omega$. Ferner sei $j \in J''$.

Es genügt dann zu zeigen:

$$\omega \in \langle A_j \rangle_o \text{ oder } \omega \in \langle (A_j)^\perp \rangle_o$$

Falls $\sigma(j) = 1$ ist, gilt $\omega \in \langle A_{j;\sigma(j)} \rangle_o = \langle A_j \rangle_o$

Falls $\sigma(j) = 0$ ist, gilt $\omega \in \langle A_{j;\sigma(j)} \rangle_o = \langle (A_j)^\perp \rangle_o$

Im Fall $\sigma(j) = \emptyset$ gibt es wegen $\sigma \in \mathcal{W}$ ein $i \ll j$ mit $\sigma(i) \neq 1$. Da $j \in J''$ und $i \ll j$, ist $i \in J'$. Es sei nun

$$v := \min \{ i \in J' \mid \sigma(i) \neq 1 \}$$

Wäre nun $\sigma(v) = \emptyset$, so gäbe es wegen $\sigma \in \mathcal{W}$ ein $v' \ll v$ mit $\sigma(v') \neq 1$, im Widerspruch zur Minimalität von v . Somit ist $\sigma(v) = 0$.

Wegen $\omega \in G_1 \subset \langle A_v \rangle_o$ (da $v \in J'$) und andererseits

$$\omega \in \langle A_{v,\sigma(v)} \rangle_o = \langle (A_v)^\perp \rangle_o$$

erfüllt ω das Axiom SEC nicht, d.h. es ist $\omega \notin \Omega$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Der Fall $\sigma(j) = \emptyset$ kann also nicht eintreten. **QED**

Theorem T.30.1 Es ist

$$\square_{AX} (G_o \wedge \exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \forall_{k \in J} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle_o \rightarrow N_o)$$

Beweis: Die Aussage folgt aus L.30.1, da für alle $A, B \in \mathcal{A}_o$ gilt:

$$\square_{AX} (A \rightarrow B) \Leftrightarrow [A \cap \Omega \subset B]$$

und da $G_o \cap \Omega = G_1 \cap \Omega$ und $N_o \cap \Omega = N_1 \cap \Omega$ ist. **QED**

L.30.2 Für endlich viele $A_j < \mathcal{H}$ mit

$$\neg \hat{\diamond} (\forall_j \langle A_j \rangle_o)$$

gibt es vertauschbare Unterräume $D_j < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = o$, so dass für alle j gilt: $A_j < D_j$.

Beweis: Es sei $\neg \hat{\diamond} (\forall_j \langle A_j \rangle_o)$. Aufgrund der Definitionen von $\hat{\diamond}$ und $\langle A_j \rangle$ folgt daraus $\forall_j \langle A_j \rangle = \emptyset$. Wegen T.23.8 gibt es dann vertauschbare Unterräume $D_j < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = o$, so dass für alle j gilt: $A_j < D_j$. **QED**

Theorem T.30.2 Für endlich viele vertauschbare $B_j < \mathcal{H}$ gilt:

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \Leftrightarrow \bigcap_j B_j < UR^\perp$$

Beweis:

Zu " \Rightarrow ": Für vertauschbare $B_j < \mathcal{H}$ mit $\neg \hat{\Diamond}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$ gibt es nach L.30.2 vertauschbare Unterräume D_j sowie D , so dass gilt:

$$B_j < D_j \text{ und } UR < D \text{ und } \bigcap_j D_j \cap D = o$$

Es folgt $\bigcap_j D_j \perp D$, also $\bigcap_j D_j < D^\perp$, und somit:

$$\bigcap_j B_j < \bigcap_j D_j < D^\perp < UR^\perp \quad \text{QED ("}\Rightarrow\text{")}$$

Zu " \Leftarrow ": Für vertauschbare $B_j < \mathcal{H}$ mit $B := \bigcap_j B_j < UR^\perp$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall_j \langle B_j \rangle \wedge \langle UR \rangle &\subset \forall_j \langle B_j \rangle \wedge \langle B^\perp \rangle \quad (\text{mit MON}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Letzteres gilt wegen SEC, da die B_j sowie B^\perp vertauschbar sind und gilt:

$$\bigcap_j B_j \cap B^\perp = B \cap B^\perp = o$$

Wegen $\langle B_j \rangle = \langle B_j \rangle_o \cap \Omega$ und $\langle UR \rangle = \langle UR \rangle_o \cap \Omega$ folgt:

$$(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \cap \Omega = \emptyset$$

und somit

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \quad \text{QED ("}\Leftarrow\text{")}$$

QED

Für das Folgende nehmen wir an, die Ausdrücke $B_{j;\tau}$, $C_{j;\tau}$, M_σ und M^\wedge seien (für $j \in J$, $\tau \in \{0,1,\emptyset\}$ und $\sigma \in \mathcal{W}$) so definiert wie beim Beweis der Schachtelungseigenschaft in Kapitel 29. Außerdem sei $B_j := B_{j;1}$ und $C_j := C_{j;1}$. Es gelten dann:

$$B_{j;\tau} < A_{j;\tau} < C_{j;\tau}$$

$$B_j < A_j < C_j$$

$$UR < M^\wedge$$

$$C_{j;\tau} = B_{j;\tau} \oplus B_{j;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{für } \tau \in \{0,1\})$$

$$C_j = B_j \oplus B_{j;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp$$

Die M_σ sind paarweise orthogonal und alle $B_{j;\tau}$, $C_{j;\tau}$, B_j , C_j sowie M^\wedge sind miteinander vertauschbar.

L.30.3 Es sei $I \subset J$ abgeschlossen in dem Sinne, dass gilt:

$$\forall_{k \in I} \forall_{j \ll k} (j \in I)$$

Dann gilt die Gleichung

$$\bigcap_{i \in I} B_i \oplus (M^\wedge)^\perp = \bigcap_{i \in I} C_i$$

Beweis zu "<":

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} B_i \oplus (M^\wedge)^\perp &< \bigcap_{i \in I} (B_i \oplus B_{i;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp) \\ &= \bigcap_{i \in I} C_i \end{aligned}$$

QED ("<")

Beweis zu ">":

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i \in I} C_i \\ &= \bigcap_{i \in I} (B_i \oplus B_{i;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp) \\ &= \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \forall_{i \in I} (\sigma(i) = 1 \vee \sigma(i) = \emptyset) \} \oplus (M^\wedge)^\perp \end{aligned}$$

Für alle $\sigma \in \mathcal{W}$ folgt aus der Bedingung

$$\forall_{i \in I} (\sigma(i) = 1 \vee \sigma(i) = \emptyset)$$

die Aussage

$$\forall_{i \in I} (\sigma(i) = 1)$$

Andernfalls wäre mit

$$v := \min \{ i \in I \mid \sigma(i) \neq 1 \}$$

$\sigma(v) = \emptyset$, und es gäbe ein $j \ll v$ mit $\sigma(j) \neq 1$. Es wäre dann auch $j \in I$, im Widerspruch zur Minimalität von v .

Es folgt also weiter:

$$\begin{aligned} &\bigcap_{i \in I} C_i \\ &= \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \forall_{i \in I} (\sigma(i) = 1) \} \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &= \bigcap_{i \in I} B_i \oplus (M^\wedge)^\perp \end{aligned}$$

QED (">")

QED

L.30.4 Für alle $I \subset J$ gilt:

$$\hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1) \Leftrightarrow \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1 \wedge N_1)$$

Beweis: Die Richtung "<=" ist trivial; zu zeigen bleibt nur:

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1 \wedge N_1) \Rightarrow \neg \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1)$$

Es sei also

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1 \wedge N_1)$$

Es folgen:

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1 \wedge \exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \forall_{k \in J} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle_o) \quad (\text{mit L.30.1})$$

$$\forall_{\sigma \in \mathcal{W}} \neg \hat{\diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle A_j \rangle_o \wedge \forall_{k \in J} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

$$\forall_{\sigma \in \mathcal{W}} \neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I} \langle B_i \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle B_j \rangle_o \wedge \forall_{k \in J} \langle B_{k; \sigma(k)} \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

$$\forall_{\sigma \in \mathcal{W}} \neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I \cup J'} \langle B_i \rangle_o \wedge \forall_{k \in J} \langle B_{k; \sigma(k)} \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Mit T.30.2 folgt

$$\forall_{\sigma \in \mathcal{W}} [\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \cap \bigcap_{k \in J} B_{k; \sigma(k)} < UR^\perp]$$

$$\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}} [\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \cap \bigcap_{k \in J} B_{k; \sigma(k)}] < UR^\perp$$

$$\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \cap \oplus_{\sigma \in \mathcal{W}} \bigcap_{k \in J} B_{k; \sigma(k)} < UR^\perp$$

$$\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \cap \oplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_\sigma < UR^\perp \quad (\text{mit T.29.7})$$

$$\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \cap M^\wedge < UR^\perp \quad (\text{Definition von } M^\wedge)$$

$$\bigcap_{i \in I \cup J'} B_i < UR^\perp \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{da } \bigcap_i B_i \text{ mit } M^\wedge \text{ vertauschbar})$$

$$\bigcap_{i \in I \cup J'} C_i = \bigcap_{i \in I \cup J'} B_i \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{nach L.30.3, da } I \cup J' \text{ abgeschlossen ist})$$

$$< UR^\perp \oplus (M^\wedge)^\perp \oplus (M^\wedge)^\perp$$

$$= UR^\perp \quad (\text{da } UR < M^\wedge \text{ ist})$$

Da auch alle C_i vertauschbar sind, folgt nach T.30.2

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I \cup J'} \langle C_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Wegen $A_i < C_i$ folgt:

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I \cup J'} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \forall_{j \in J'} \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

$$\neg \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge G_1)$$

QED

Theorem T.30.3 Für jedes $I \subset J''$ gilt:

$$\hat{\Diamond}(\forall_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o) \Leftrightarrow \hat{\Diamond}(\forall_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o \wedge N_o)$$

Beweis: Wegen

$$G_o \cap \Omega = G_1 \cap \Omega \quad \text{und} \quad N_o \cap \Omega = N_1 \cap \Omega$$

sowie

$$\langle E_i, t_i \rangle_o \cap \Omega = \langle A_i \rangle_o \cap \Omega \quad (\text{für alle } i \in J)$$

ist dies eine unmittelbare Folge von L.30.4

QED

Wir definieren die zusätzlichen Axiome:

$$\text{INIT} := \{ \langle UR \rangle_o \}$$

$$\text{PRE}' := \{ \langle E_j, t_j \rangle_o \mid j \in J' \}$$

$$\text{NEG}'' := \{ \langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o \mid j \in J'' \}$$

Damit bilden wir die Axiomensysteme

$$AX_1 := AX \cup \text{INIT} \cup \text{PRE}'$$

$$AX_2 := AX \cup \text{INIT} \cup \text{PRE}' \cup \text{NEG}''$$

Bemerkung: Die Axiome INIT und PRE' sind äquivalent zu $\{G_o\}$ und NEG'' entspricht $\{N_o\}$. Daher ist das Axiomensystem AX_1 äquivalent zu $AX \cup \{G_o\}$, und ebenso ist AX_2 äquivalent zu $AX \cup \{G_o, N_o\}$.

Es sei

$$M'' := \{ \mathcal{B} \subset E'' \mid \mathcal{B} \text{ endlich} \}$$

die Menge aller empirischen Materialien im Rahmen der interessierenden Ereignisse des gegebenen makroskopischen Kontextes. Jedem empirischen Material

$$\mathcal{B} = \{(B_1, s_1), \dots, (B_m, s_m)\}$$

ist mit

$$F_{\mathcal{B}} := \langle B_1, s_1 \rangle_o \wedge \dots \wedge \langle B_m, s_m \rangle_o$$

das zugehörige mögliche Faktum zugeordnet. Der empirische Gehalt des Axiomensystems AX_1 – beschränkt auf den Kontext – ist definiert als:

$$\text{EMP}_{AX_1}(M'') := \{ \mathcal{B} \in M'' \mid \neg \Diamond_{AX_1}(F_{\mathcal{B}}) \}$$

Analog erfolgt die Definition für AX_2 .

Theorem T.30.4 Zu einem beliebigen Axiomensystem AX und zu jeder endlichen Folge von möglichen Fakten

$$G_1, \dots, G_s \in \mathcal{A}_o$$

gilt (für alle $A \in \mathcal{A}_o$):

$$\Diamond_{AX \cup \{G_1, \dots, G_s\}}(A) \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(A \wedge [G_1 \wedge \dots \wedge G_s])$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \Diamond_{AX \cup \{G_1, \dots, G_s\}}(A) &\Leftrightarrow \Omega_{AX \cup \{G_1, \dots, G_s\}} \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bigcap (AX \cup \{G_1, \dots, G_s\}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bigcap (AX) \cap \bigcap_j G_j \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \Omega_{AX} \cap (\forall_j G_j \cap A) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_j G_j \cap A) \\ &\Leftrightarrow \Diamond_{AX}(A \wedge [G_1 \wedge \dots \wedge G_s]) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.30.5 Es gilt:

$$\text{EMP}_{AX_1}(M'') = \text{EMP}_{AX_2}(M'')$$

Beweis: Es sei $\mathcal{B} \in \mathcal{M}''$, also

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\subset \mathcal{E}'' \\ &= \{ (E_j, t_j) \mid j \in J'' \} \end{aligned}$$

Dann gibt es $I \subset J''$ mit

$$\mathcal{B} = \{ (E_i, t_i) \mid i \in I \}$$

und somit

$$F_{\mathcal{B}} = \bigvee_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \in \text{EMP}_{\text{AX}_2}(\mathcal{M}'') &\Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}_2}(F_{\mathcal{B}}) \\ &\Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX} \cup \{G_o, N_o\}}(F_{\mathcal{B}}) \\ &\Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}}(F_{\mathcal{B}} \wedge G_o \wedge N_o) \quad (\text{T.30.4}) \\ &\Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}}(\bigvee_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o \wedge N_o) \end{aligned}$$

Ganz analog zeigt man:

$$\mathcal{B} \in \text{EMP}_{\text{AX}_1}(\mathcal{M}'') \Leftrightarrow \neg \diamond_{\text{AX}}(\bigvee_{i \in I} \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge G_o)$$

Mit T.30.3 folgt nun die Behauptung. **QED**

Theorem T.30.6 Auf der Indexmenge J seien zwei Abhängigkeitsrelationen \ll und \ll' gegeben. Dabei sei \ll eine Teilrelation von \ll' . Ist dann eine Folge (E_j, t_j) t -zugänglich bezüglich der Abhängigkeitsrelation \ll , so ist sie erst recht t -zugänglich bezüglich \ll' .

Beweis: Es sei eine Folge (E_j, t_j) gegeben, die bezüglich der Abhängigkeitsrelation \ll t -zugänglich ist.

Ferner sei B_1, \dots, B_n eine Folge, die bzgl. \ll' die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt, für die also u.a. gilt:

$$(i') \quad \forall_{j \ll' k} (B_j = A_j)$$

Da \ll eine Teilrelation von \ll' ist, gilt auch

$$(i) \quad \forall_{j \ll k} (B_j = A_j)$$

Bei der Definition der t -Zugänglichkeit ist nur die Bedingung (i) abhängig von der Relation \ll . Somit erfüllt die Folge B_1, \dots, B_n die Bedingungen (i) bis (iii) auch bezüglich \ll . Infolgedessen gilt für diese Folge die Dokumentbeziehung (DB). Da dies für alle Folgen B_1, \dots, B_n gilt, die die Bedingungen (i'), (ii) und (iii) erfüllen, ist die Folge (E_j, t_j) auch t -zugänglich bezüglich der Abhängigkeitsrelation \ll' . **QED**

Zu dem gegebenen makroskopischen Kontext mit der Abhängigkeitsrelation « definieren wir die Standard-Abhängigkeitsrelation «' mittels:

$$j \ll' k \Leftrightarrow j < k \text{ und } j \in J' \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

Da « eine Teilrelation von «' ist, handelt es sich auch bezüglich der Abhängigkeitsrelation «' um einen makroskopischen Kontext, für den die Schachtelungseigenschaft gilt.

Eine Vereinfachung des Beweises der Schachtelungseigenschaft ergibt sich hierfür, weil die Menge der Belegungen \mathcal{W} viel einfacher wird: Für «' erhält man nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \{ & (0, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset, \emptyset; \emptyset, \dots, \emptyset), \\ & (1, 0, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset, \emptyset; \emptyset, \dots, \emptyset), \\ & (1, 1, 0, \emptyset, \dots, \emptyset, \emptyset; \emptyset, \dots, \emptyset), \\ & \vdots \\ & (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0; \emptyset, \dots, \emptyset) \} \\ \cup \{ & (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1; \sigma') \mid \sigma' : J'' \rightarrow \{0,1\} \text{ beliebig} \} \end{aligned}$$

Es sei wie zuvor ein makroskopischer Kontext gegeben. Zu jedem $s \in \{1, \dots, S\}$ sowie $j \in \{1, \dots, n(s)\}$ gehöre (E_{sj}, t_{sj}) zu der Menge \mathcal{E}'' der interessierenden Ereignisse dieses Kontextes. Ferner seien

$$G := G_0 \cap \Omega$$

$$N := N_0 \cap \Omega$$

die entsprechenden Elemente von \mathcal{A} . Außerdem sei

$$A_{sj} := U_{-t_{sj}} E_{sj} \quad (\text{für } s \in \{1, \dots, S\} \text{ und } j \in \{1, \dots, n(s)\})$$

Zu jedem s und j gibt es wegen $(E_{sj}, t_{sj}) \in \mathcal{E}''$ ein $k \in J''$ mit $A_{sj} = A_k$. Damit sei $B_{sj} := B_k$ und $C_{sj} := C_k$, so dass gilt:

$$B_{sj} < A_{sj} < C_{sj}$$

L.30.5 Für alle $k \in J''$ gilt:

$$C_k \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \cap M^\wedge = B_k \cap \bigcap_{i \in J'} B_i$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & C_k \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \cap M^\wedge \\ &= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge [\sigma(k) = 1 \vee \sigma(k) = \emptyset] \\ & \quad \wedge \forall_{i \in J'} [\sigma(i) = 1 \vee \sigma(i) = \emptyset] \} \\ &= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \forall_{i \in J' \cup \{k\}} [\sigma(i) = 1 \vee \sigma(i) = \emptyset] \} \\ &= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \forall_{i \in J' \cup \{k\}} [\sigma(i) = 1] \} \end{aligned}$$

(Dies kann man wie im Beweis von L.30.3 schließen, da $J' \cup \{k\}$ abgeschlossen ist.)

$$\begin{aligned}
 &= \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge \sigma(k) = 1 \wedge \forall_{i \in J'} (\sigma(i) = 1) \} \\
 &= B_k \cap \bigcap_{i \in J'} B_i
 \end{aligned}$$

QED

L.30.6 Für alle s gilt:

$$\bigcap_{i \in J'} C_i \cap \bigcap_j C_{sj} \cap M^\wedge = \bigcap_{i \in J'} B_i \cap \bigcap_j B_{sj}$$

Beweis: Dies ist ein unmittelbares Korollar zu L.30.5

QED

L.30.7 Für alle $k \in J''$ ist

$$B_k \oplus (C_k)^\perp > M^\wedge \cap \bigcap_{i \in J'} B_i$$

Beweis: Es ist

$$C_k \cap (M^\wedge \cap \bigcap_i C_i) < B_k \quad (\text{L.30.5})$$

$$C_k < B_k \oplus (M^\wedge \cap \bigcap_i C_i)^\perp$$

$$(C_k)^\perp > (B_k)^\perp \cap (M^\wedge \cap \bigcap_i C_i)$$

$$\begin{aligned}
 B_k \oplus (C_k)^\perp &> B_k \oplus [(B_k)^\perp \cap (M^\wedge \cap \bigcap_i C_i)] \\
 &> M^\wedge \cap \bigcap_i C_i \\
 &> M^\wedge \cap \bigcap_i B_i
 \end{aligned}$$

QED

Theorem T.30.7

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G \wedge N)$$

Beweis: Die Richtung " \geq " ist trivial. Zu " \leq ": Es ist

$$G = \forall_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \langle UR \rangle$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 &\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G) \\
 &= \mu(\forall_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \\
 &\leq \mu(\forall_{i \in J'} \langle C_i \rangle \wedge \exists_s \forall_j \langle C_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \quad (\text{da } A_i < C_i \text{ usw.}) \\
 &= \mu(\exists_s (\forall_{i \in J'} \langle C_i \rangle \wedge \forall_j \langle C_{sj} \rangle) \wedge \langle UR \rangle) \\
 &= \text{tr } \pi_{\oplus_s} [\bigcap_i C_i \cap \bigcap_j C_{sj}] \pi_{UR} \quad (\text{mit T.23.11}) \\
 &= \text{tr } \pi_{\oplus_s} [\bigcap_i C_i \cap \bigcap_j C_{sj}] \pi_{M^\wedge} \pi_{UR} \quad (\text{da } UR < M^\wedge) \\
 &= \text{tr } \pi_{\oplus_s} [\bigcap_i C_i \cap \bigcap_j C_{sj} \cap M^\wedge] \pi_{UR} \\
 &= \text{tr } \pi_{\oplus_s} [\bigcap_i B_i \cap \bigcap_j B_{sj}] \pi_{UR} \quad (\text{mit L.30.6}) \\
 &= \text{tr } \pi_L \pi_{UR}
 \end{aligned}$$

mit

$$L := \oplus_s [\bigcap_i B_i \cap \bigcap_j B_{sj}]$$

Für alle $k \in J''$ sei

$$G_{k;1} := B_k$$

$$G_{k;0} := (C_k)^\perp$$

und man betrachte "Belegungen"

$$\sigma : J'' \rightarrow \{0,1\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} N &= \bigvee_{k \in J''} [\langle A_k \rangle \vee \langle (A_k)^\perp \rangle] \\ &= \exists_{\sigma: J'' \rightarrow \{0,1\}} \bigvee_{k \in J''} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} A_{k;1} &= A_k \\ &> B_k \\ &= G_{k;1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_{k;0} &= (A_k)^\perp \\ &> (C_k)^\perp \\ &= G_{k;0} \end{aligned}$$

Daher gilt stets

$$G_{k;\sigma(k)} < A_{k;\sigma(k)}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\mu(\exists_s \bigvee_j \langle A_{sj} \rangle \wedge G \wedge N) \\ &= \mu(\bigvee_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \exists_s \bigvee_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \exists_{\sigma} \bigvee_{k \in J''} \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \\ &\geq \mu(\bigvee_{i \in J'} \langle B_i \rangle \wedge \exists_s \bigvee_j \langle B_{sj} \rangle \wedge \exists_{\sigma} \bigvee_{k \in J''} \langle G_{k;\sigma(k)} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \\ &= \mu(\exists_s \exists_{\sigma} [\bigvee_{i \in J'} \langle B_i \rangle \wedge \bigvee_j \langle B_{sj} \rangle \wedge \bigvee_{k \in J''} \langle G_{k;\sigma(k)} \rangle] \wedge \langle UR \rangle) \\ &= \text{tr } \pi_{\oplus_s \oplus_{\sigma}} [\bigcap_i B_i \cap \bigcap_j B_{sj} \cap \bigcap_k G_{k;\sigma(k)}] \pi_{UR} \quad (\text{mit T.23.11}) \\ &= \text{tr } \pi_M \pi_{UR} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} M &:= \oplus_s \oplus_{\sigma} [\bigcap_i B_i \cap \bigcap_j B_{sj} \cap \bigcap_k G_{k;\sigma(k)}] \\ &= \oplus_s [\bigcap_i B_i \cap \bigcap_j B_{sj}] \cap \oplus_{\sigma} \bigcap_k G_{k;\sigma(k)} \\ &= L \cap \oplus_{\sigma} \bigcap_k G_{k;\sigma(k)} \end{aligned}$$

Da für alle $k \in J''$ gilt

$$\begin{aligned} G_{k;1} \oplus G_{k;0} &= B_k \oplus (C_k)^\perp \\ &> M^\wedge \cap \bigcap_i B_i \quad (\text{L.30.7}) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\sigma} \bigcap_k G_{k;\sigma(k)} &= \bigcap_{k \in J''} [G_{k;1} \oplus G_{k;0}] \\ &> M^{\wedge} \cap \bigcap_i B_i \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} M &> L \cap (M^{\wedge} \cap \bigcap_i B_i) \\ &= L \cap M^{\wedge} \end{aligned} \quad (\text{da } L \cap \bigcap_i B_i = L \text{ ist})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle^{\wedge} G^{\wedge} N) &\geq \text{tr } \pi_M \pi_{UR} \\ &\geq \text{tr } \pi_{L \cap M^{\wedge}} \pi_{UR} \\ &= \text{tr } \pi_L \pi_{M^{\wedge}} \pi_{UR} \\ &= \text{tr } \pi_L \pi_{UR} \quad (\text{da } UR < M^{\wedge} \text{ ist}) \\ &\geq \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle^{\wedge} G) \end{aligned} \quad \text{QED}$$

Theorem T.30.8

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid G) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid G^{\wedge} N)$$

Beweis: Im speziellen Fall $S = 0$ erhält man mit T.30.7:

$$\mu(G) = \mu(G^{\wedge} N)$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid G) &= \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle^{\wedge} G) / \mu(G) \\ &= \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle^{\wedge} G^{\wedge} N) / \mu(G^{\wedge} N) \quad (\text{mit T.30.7}) \\ &= \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid G^{\wedge} N) \end{aligned} \quad \text{QED}$$

Wir betrachten im folgenden eine Observable

$$L := \sum_j \lambda_j \pi_{M_j}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sowie orthogonalen $M_j < \mathcal{H}$ mit $M := \bigoplus_j M_j$. Tritt keines der Ereignisse (M_j, s) ein, so hat L gar keinen Wert. Hierbei sollen die Ereignisse (M_j, s) alle zu den interessierenden Ereignissen des gegebenen makroskopischen Kontextes gehören, d.h. es ist $(M_j, s) \in \mathcal{E}''$.

Zu möglichen Fakten $F, F' \in \mathcal{A}$ schreiben wir

$$F \Rightarrow F'$$

für die Aussage

$$\square(F \rightarrow F')$$

Theorem T.30.9 Im Falle $M = \mathcal{H}$ gilt:

$$N \Rightarrow \exists_j \langle M_j, s \rangle$$

Beweis: Es genügt zu zeigen:

$$N_0 \cap \Omega \subset \exists_j \langle M_j, s \rangle_0$$

denn dann folgt:

$$N_0 \wedge \neg \exists_j \langle M_j, s \rangle_0 \cap \Omega = \emptyset$$

$$N \wedge \neg \exists_j \langle M_j, s \rangle = \emptyset$$

$$\neg \hat{\Delta}(N \wedge \neg \exists_j \langle M_j, s \rangle)$$

$$\square(N \rightarrow \exists_j \langle M_j, s \rangle)$$

$$N \Rightarrow \exists_j \langle M_j, s \rangle$$

Es sei also $\omega \in N_0 \cap \Omega$. Dann ist

$$\omega \in N_0$$

$$= \forall_{k \in J} [\langle E_k, t_k \rangle_0 \vee \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_0]$$

$$\subset \forall_j [\langle M_j, s \rangle_0 \vee \langle (M_j)^\perp, s \rangle_0] \quad (\text{da alle } (M_j, s) \in \mathcal{E})$$

Angenommen, es sei

$$\omega \notin \exists_j \langle M_j, s \rangle_0$$

Dann wäre

$$\forall_j [\omega \notin \langle M_j, s \rangle_0]$$

$$\forall_j [\omega \in \langle (M_j)^\perp, s \rangle_0]$$

Da die $(M_j)^\perp$ vertauschbar sind mit

$$\bigcap_j (M_j)^\perp = (\bigoplus_j M_j)^\perp$$

$$= \mathcal{H}^\perp$$

$$= 0$$

wäre dann

$$\omega \notin \bigcap (\text{SEC})$$

und somit

$$\omega \notin \Omega$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

QED

Es seien nun (V_m, t_m) einige Ereignisse, die ebenfalls zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes gehören. Hierzu setzen wir

$$V := \forall_m \langle V_m, t_m \rangle$$

L.30.8 Es seien $A, B, C < \mathcal{H}$ und B und C miteinander vertauschbar. Ferner seien

$$A \perp B \cap C$$

und

$$A < C$$

Dann ist

$$A \perp B$$

Beweis: Aus

$$A \perp B \cap C$$

folgt:

$$\pi_A \pi_{B \cap C} = 0$$

$$\pi_A \pi_C \pi_B = 0 \quad (\text{da } B, C \text{ vertauschbar})$$

$$\pi_A \pi_B = 0 \quad (\text{da } A < C)$$

$$A \perp B$$

QED

L.30.9 Für alle $k \in J''$ gilt:

$$C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \cap M^\wedge = B_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} B_i$$

Beweis: Es ist

$$C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \cap M^\wedge$$

$$= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge [\sigma(k) = 0 \vee \sigma(k) = \emptyset] \\ \wedge \forall_{i \in J'} [\sigma(i) = 1 \vee \sigma(i) = \emptyset] \}$$

$$= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \wedge [\sigma(k) = 0] \wedge \forall_{i \in J'} [\sigma(i) = 1] \}$$

(Da $J' \cup \{k\}$ abgeschlossen ist, kann man wie im Beweis von L.30.3 schließen, dass weder $\sigma(k) = \emptyset$ noch eines der $\sigma(i) = \emptyset$ sein kann.)

$$= B_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} B_i$$

QED

Theorem T.30.10 Aus

$$G \wedge V \Rightarrow \neg \langle M^\perp, s \rangle$$

folgt

$$G \wedge V \Rightarrow \neg \forall_j \langle (M_j)^\perp, s \rangle$$

Beweis: Wegen $(M_j, s) \in \mathcal{E}''$ gibt es $k(j) \in J''$ so dass gilt:

$$(M_j, s) = (E_{k(j)}, t_{k(j)})$$

Es folgt

$$U_{-s} M_j = A_{k(j)}$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle (M_j)^\perp, s \rangle &= \langle U_{-s}(M_j)^\perp \rangle \\ &= \langle (U_{-s} M_j)^\perp \rangle \\ &= \langle (A_{k(j)})^\perp \rangle \\ &= \langle A_{k(j);0} \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle M^\perp, s \rangle &= \langle U_{-s} M^\perp \rangle \\ &= \langle U_{-s} (\bigoplus_j M_j)^\perp \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle U_{-s} \bigcap_j (M_j)^\perp \rangle \\
 &= \langle \bigcap_j (U_{-s} M_j)^\perp \rangle \\
 &= \langle \bigcap_j (A_{k(j)})^\perp \rangle \\
 &= \langle \bigcap_j A_{k(j);0} \rangle
 \end{aligned}$$

Wegen $(V_m, t_m) \in \mathcal{E}''$ gibt es $k'(m) \in J''$ so dass gilt:

$$(V_m, t_m) = (E_{k'(m)}, t_{k'(m)})$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \langle V_m, t_m \rangle &= \langle U_{-t_m} V_m \rangle \\
 &= \langle A_{k'(m)} \rangle
 \end{aligned}$$

Aus

$$G \wedge V \Rightarrow \neg \langle M^\perp, s \rangle$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
 &\square(G \wedge V \rightarrow \neg \langle M^\perp, s \rangle) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(G \wedge V \wedge \langle M^\perp, s \rangle) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \forall_m \langle V_m, t_m \rangle \wedge \langle M^\perp, s \rangle) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \forall_m \langle A_{k'(m)} \rangle \wedge \langle \bigcap_j A_{k(j);0} \rangle) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{i \in J'} \langle B_i \rangle \wedge \forall_m \langle B_{k'(m)} \rangle \wedge \langle \bigcap_j B_{k(j);0} \rangle) \\
 &UR \perp \bigcap_i B_i \cap \bigcap_m B_{k'(m)} \cap \bigcap_j B_{k(j);0} \quad (\text{mit T.30.2}) \\
 &UR \perp \bigcap_i C_i \cap \bigcap_m C_{k'(m)} \cap \bigcap_j C_{k(j);0} \cap M^\wedge \quad (\text{mit L.30.5 und L.30.9}) \\
 &UR \perp \bigcap_i C_i \cap \bigcap_m C_{k'(m)} \cap \bigcap_j C_{k(j);0} \quad (\text{mit L.30.8, da alle } C_k \\
 &\quad \text{und } C_{k;0} \text{ mit } M^\wedge \text{ vertauschbar sind und } UR < M^\wedge \text{ ist}) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{i \in J'} \langle C_i \rangle \wedge \forall_m \langle C_{k'(m)} \rangle \wedge \forall_j \langle C_{k(j);0} \rangle) \quad (\text{mit T.30.2}) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{i \in J'} \langle A_i \rangle \wedge \forall_m \langle A_{k'(m)} \rangle \wedge \forall_j \langle A_{k(j);0} \rangle) \\
 &\neg \hat{\Diamond}(G \wedge V \wedge \forall_j \langle (M_j)^\perp, s \rangle) \\
 &\square(G \wedge V \rightarrow \neg \forall_j \langle (M_j)^\perp, s \rangle) \\
 &G \wedge V \Rightarrow \neg \forall_j \langle (M_j)^\perp, s \rangle \quad \text{QED}
 \end{aligned}$$

Theorem T.30.11 Es gilt:

$$N \Rightarrow \forall_j [\langle M_j, s \rangle \vee \langle (M_j)^\perp, s \rangle]$$

Beweis: Wegen $(M_j, s) \in \mathcal{E}''$ ist die Behauptung trivial. QED

Für das Folgende sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine beliebige t-zugängliche Folge von

Ereignissen mit einer Abhängigkeitsrelation « auf dem Indexbereich

$$J := \{1, \dots, n\}$$

und die Relation « sei transitiv. Hierzu sei

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für alle } j \in J)$$

Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $I \subset J$ sei

$$\mathcal{B}_I := \{ \langle E_i, t_i \rangle \mid i \in I \}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^a &:= \{ \mathcal{B}_I \mid I \subset J \text{ und } I \text{ ist abgeschlossen} \} \\ &\subset \mathcal{M} \end{aligned}$$

Zu jedem $j \in J$ sei

$$N_j := (\forall_{i \ll j} \langle E_i, t_i \rangle_o) \rightarrow (\langle E_j, t_j \rangle_o \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle_o)$$

sowie

$$\text{NEG}^a := \{ N_j \mid j \in J \}$$

$$\text{AX}_1 := \text{AX} \cup \text{INIT}$$

$$\text{AX}_2 := \text{AX} \cup \text{INIT} \cup \text{NEG}^a$$

und

$$\text{EMP}_{\text{AX}_1}(\mathcal{M}^a) := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}^a \mid \neg \hat{\Diamond}_{\text{AX}_1}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}) \}$$

$$\text{EMP}_{\text{AX}_2}(\mathcal{M}^a) := \{ \mathcal{B} \in \mathcal{M}^a \mid \neg \hat{\Diamond}_{\text{AX}_2}(\mathcal{F}_{\mathcal{B}}) \}$$

L.30.10 Es gilt:

$$(\exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \forall_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o) \cap \Omega \subset \forall_j N_j$$

Beweis: Es sei $\sigma \in \mathcal{W}$ und $j \in J$. Es genügt dann zu zeigen:

$$(\forall_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o) \cap \Omega \subset N_j$$

Aufgrund der Definition von N_j muss hierzu die folgende Inklusion bewiesen werden:

$$\forall_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o \cap \forall_{i \ll j} \langle A_i \rangle_o \cap \Omega \subset (\langle A_j \rangle_o \vee \langle (A_j)^\perp \rangle_o)$$

Es sei also

$$\omega \in \forall_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o \cap \forall_{i \ll j} \langle A_i \rangle_o \cap \Omega$$

Es genügt nun zu zeigen:

$$\omega \in \langle A_j \rangle_o \text{ oder } \omega \in \langle (A_j)^\perp \rangle_o$$

Falls $\sigma(j) = 1$ ist, gilt $\omega \in \langle A_{j; \sigma(j)} \rangle_o = \langle A_j \rangle_o$

Falls $\sigma(j) = 0$ ist, gilt $\omega \in \langle A_{j; \sigma(j)} \rangle_o = \langle (A_j)^\perp \rangle_o$

Im Fall $\sigma(j) = \emptyset$ gibt es wegen $\sigma \in \mathcal{W}$ ein $i \ll j$ mit $\sigma(i) \neq 1$. Es sei dann

$$v := \min \{ i \mid i \ll j \text{ und } \sigma(i) \neq 1 \}$$

Wäre nun $\sigma(v) = \emptyset$, so gäbe es wegen $\sigma \in \mathcal{W}$ ein $v' \ll v$ mit $\sigma(v') \neq 1$. Da die Relation \ll transitiv ist, wäre auch $v' \ll j$, im Widerspruch zur Minimalität von v . Somit ist $\sigma(v) = 0$.

Wegen $\omega \in \langle A_v \rangle_o$ (da $v \ll j$) und andererseits

$$\omega \in \langle A_{v, \sigma(v)} \rangle_o = \langle (A_v)^\perp \rangle_o$$

erfüllt ω das Axiom SEC nicht, d.h. es ist $\omega \notin \Omega$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Der Fall $\sigma(j) = \emptyset$ kann also nicht eintreten. **QED**

L.30.11 Für jedes abgeschlossene $I \subset J$ gilt:

$$\diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \Leftrightarrow \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \bigvee_j N_j)$$

Beweis: Die Richtung " \Leftarrow " ist trivial; zu zeigen bleibt nur:

$$\neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \bigvee_j N_j) \Rightarrow \neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Es sei also

$$\neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \bigvee_j N_j)$$

Wegen L.30.10 und der Monotonie von \diamond folgt hieraus

$$\neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \exists_{\sigma \in \mathcal{W}} \bigvee_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o)$$

und somit

$$\bigvee_{\sigma \in \mathcal{W}} \neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \bigvee_{k \in J} \langle A_{k; \sigma(k)} \rangle_o)$$

Die Ausdrücke $B_{j; \tau}$, $C_{j; \tau}$, B_j , C_j , M_σ und M^\wedge seien wie zuvor definiert (vgl. die Definitionen vor L.30.3). Damit folgt:

$$\bigvee_{\sigma \in \mathcal{W}} \neg \diamond(\bigvee_{i \in I} \langle B_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \bigvee_{k \in J} \langle B_{k; \sigma(k)} \rangle_o)$$

$$\bigvee_{\sigma \in \mathcal{W}} \bigcap_{i \in I} B_i \cap \bigcap_{k \in J} B_{k; \sigma(k)} < UR^\perp \quad (\text{mit T.30.2})$$

$$\bigvee_{\sigma \in \mathcal{W}} \bigcap_{i \in I} B_i \cap M_\sigma < UR^\perp \quad (\text{mit T.29.7})$$

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} (\bigcap_{i \in I} B_i \cap M_\sigma) < UR^\perp$$

$$\bigcap_{i \in I} B_i \cap \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_\sigma < UR^\perp$$

$$\bigcap_{i \in I} B_i \cap M^\wedge < UR^\perp \quad (\text{Definition von } M^\wedge)$$

$$\bigcap_{i \in I} B_i < UR^\perp \quad (\text{da } (M^\wedge)^\perp < UR^\perp)$$

Nach L.30.3 ist

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} C_i &= \bigcap_{i \in I} B_i \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &< UR^\perp \oplus UR^\perp \\ &= UR^\perp \end{aligned} \quad (\text{da } (M^\wedge)^\perp < UR^\perp)$$

und mit T.30.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \neg \Diamond(\forall_{i \in I} \langle C_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \\ & \neg \Diamond(\forall_{i \in I} \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \end{aligned} \quad (\text{da } A_i < C_i)$$

QED

Theorem T.30.12 Es gilt:

$$\text{EMP}_{AX_1}(M^a) = \text{EMP}_{AX_2}(M^a)$$

Beweis: Es sei $\mathcal{B} \in M^a$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $I \subset J$ mit

$$\mathcal{B} = \{ (E_i, t_i) \mid i \in I \}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \Diamond_{AX_2}(F_{\mathcal{B}}) & \Leftrightarrow \Diamond_{AX \cup \text{INIT} \cup \text{NEG}^a}(F_{\mathcal{B}}) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}} \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \forall_j N_j) && (\text{mit T.30.4}) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_i \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \forall_j N_j) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_i \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \forall_j N_j) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_i \langle A_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) && (\text{mit L.30.11}) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(\forall_i \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX}(F_{\mathcal{B}} \wedge \langle UR \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX \cup \text{INIT}}(F_{\mathcal{B}}) && (\text{mit T.30.4}) \\ & \Leftrightarrow \Diamond_{AX_1}(F_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\text{EMP}_{AX_1}(M^a)$ und $\text{EMP}_{AX_2}(M^a)$ ergibt sich die Behauptung. **QED**

Für das Folgende sei zu jedem $s \in \{1, \dots, S\}$ eine abgeschlossene Teilmenge $I_s \subset J$ gegeben. Für alle $s \in \{1, \dots, S\}$ und $j \in I_s$ schreiben wir mit den oben eingeführten Symbolen:

$$\begin{aligned} A_{sj} & := A_j \\ B_{sj} & := B_j \\ C_{sj} & := C_j \\ B_{sj;\tau} & := B_{j;\tau} \quad (\text{für } \tau \in \{0, 1, \emptyset\}) \\ C_{sj;\tau} & := C_{j;\tau} \quad (\text{für } \tau \in \{0, 1, \emptyset\}) \end{aligned}$$

Ferner sei

$$N := \forall_j N_j \cap \Omega$$

das bedingte physikalische "tertium non datur" (als $N \in \mathcal{A}$).

Theorem T.30.13

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge N)$$

Beweis: Die Richtung " \geq " ist trivial. Zu " \leq ": Es ist

$$\begin{aligned} & \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \\ & \leq \mu(\exists_s \forall_j \langle C_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) && \text{(da } A_{sj} < C_{sj} \text{)} \\ & = \text{tr } \pi_{\oplus_s \cap_j C_{sj}} \pi_{UR} && \text{(mit T.23.11)} \\ & = \text{tr } \pi_L \pi_{UR} \end{aligned}$$

mit

$$L := \oplus_s \cap_j C_{sj}$$

Es ist

$$\begin{aligned} C_{sj} &= C_{sj;1} \\ &= B_{sj;1} \oplus B_{sj;\emptyset} \oplus (M^\wedge)^\perp && \text{(Def. von } C_{sj;1} \text{)} \\ &= \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma(j) = 1 \vee \sigma(j) = \emptyset \} \oplus (M^\wedge)^\perp && \text{(Def. von } B_{sj;\tau} \text{)} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} L &= \oplus_s \cap_j \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma(j) = 1 \vee \sigma(j) = \emptyset \} \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &= \oplus \{ M_\sigma \mid \exists_s \forall_j (\sigma(j) = 1 \vee \sigma(j) = \emptyset) \} \oplus (M^\wedge)^\perp \end{aligned}$$

wobei hier σ die Menge \mathcal{W} durchläuft.

Zu festem $s \in \{1, \dots, S\}$ gilt: Aus $\forall_j (\sigma(j) = 1 \vee \sigma(j) = \emptyset)$ folgt $\forall_j (\sigma(j) = 1)$, denn anderenfalls gäbe es ein minimales $j \in I_s$ mit $\sigma(j) = \emptyset$. Wegen $\sigma \in \mathcal{W}$ gäbe es dann $i \ll j$ mit $\sigma(i) \neq 1$. Da I_s abgeschlossen ist, wäre $i \in I_s$ und somit entweder $\sigma(i) = 1$ oder $\sigma(i) = \emptyset$. Wegen $\sigma(i) \neq 1$ müsste dann $\sigma(i) = \emptyset$ sein, im Widerspruch zur Minimalität von j .

Es gilt somit für alle s :

$$\forall_j (\sigma(j) = 1 \vee \sigma(j) = \emptyset) \Leftrightarrow \forall_j (\sigma(j) = 1)$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} L &= \oplus \{ M_\sigma \mid \exists_s \forall_j (\sigma(j) = 1) \} \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &= \oplus_s \cap_j \oplus \{ M_\sigma \mid \sigma(j) = 1 \} \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &= \oplus_s \cap_j B_{sj} \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &= M \oplus (M^\wedge)^\perp \end{aligned}$$

mit

$$M := \oplus_s \cap_j B_{sj}$$

Umgekehrt ist (wobei k die Menge J durchläuft)

$$\begin{aligned}
 & \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge N) \\
 & \geq \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge \exists_\sigma \forall_k \langle A_{k;\sigma(k)} \rangle) \quad (\text{mit L.30.10}) \\
 & \geq \mu(\exists_s \forall_j \langle B_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge \exists_\sigma \forall_k \langle B_{k;\sigma(k)} \rangle) \quad (\text{da } B_{k;\tau} < A_{k;\tau} \text{ und } B_{sj} < A_{sj}) \\
 & = \mu(\exists_s \exists_\sigma (\forall_j \langle B_{sj} \rangle \wedge \forall_k \langle B_{k;\sigma(k)} \rangle) \wedge \langle UR \rangle) \\
 & = \text{tr } \pi_{\oplus_s \oplus_\sigma [\cap_j B_{sj} \cap \cap_k B_{k;\sigma(k)}]} \pi_{UR} \quad (\text{mit T.23.11}) \\
 & = \text{tr } \pi_{[\oplus_s \cap_j B_{sj} \cap \oplus_\sigma \cap_k B_{k;\sigma(k)}]} \pi_{UR} \\
 & = \text{tr } \pi_{M \cap R} \pi_{UR}
 \end{aligned}$$

mit

$$R := \oplus_\sigma \cap_k B_{k;\sigma(k)}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 R & = \oplus_\sigma \cap_k \oplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma'(k) = \sigma(k) \} \\
 & = \oplus \{ M_{\sigma'} \mid \exists_\sigma \forall_k (\sigma'(k) = \sigma(k)) \} \\
 & = \oplus \{ M_{\sigma'} \mid \sigma' \in \mathcal{W} \} \\
 & = M^\wedge
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 & \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) \\
 & \leq \text{tr } \pi_L \pi_{UR} \\
 & = \text{tr } \pi_{[M \oplus (M^\wedge)^\perp]} \pi_{UR} \\
 & = \text{tr } \pi_M \pi_{UR} \quad (\text{da } UR < M^\wedge) \\
 & = \text{tr } \pi_{[M \cap (M^\wedge)]} \pi_{UR} \quad (\text{da } UR < M^\wedge) \\
 & = \text{tr } \pi_{M \cap R} \pi_{UR} \\
 & \leq \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge N)
 \end{aligned}$$

QED

Theorem T.30.14

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle \wedge N)$$

Beweis: Im speziellen Fall $S = 0$ erhält man mit T.30.13:

$$\mu(\langle UR \rangle) = \mu(\langle UR \rangle \wedge N)$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
 & \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle) \\
 & = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle) / \mu(\langle UR \rangle) \\
 & = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \wedge \langle UR \rangle \wedge N) / \mu(\langle UR \rangle \wedge N) \quad (\text{T.30.13}) \\
 & = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj} \rangle \mid \langle UR \rangle \wedge N)
 \end{aligned}$$

QED

B32. Allgemeine kommutative und quasi-klassische Kontexte

Gegeben sei ein quasi-klassischer Kontext. Es gibt demnach eine Menge S'' aus paarweise vertauschbaren Unterräumen von \mathcal{H} sowie ein regelmäßiges Zeitraaster

$$T' := \{\tau_1, \dots, \tau_M\}$$

und außerdem (zu jedem der Zeitpunkte τ_m) Eigenschaften

$$S_{m,r} \in S'' \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\})$$

so dass alle Ereignisse der Form $(S_{m,r}, \tau_m)$ mit $1 \leq m \leq M$ und $1 \leq r \leq R$ zu den interessierenden Ereignissen des Kontextes gehören.

Die Eigenschaften $S_{m,r}$ sind dann so gewählt, dass jedes $S_{m,r}$ (unter der Grundbedingung G_0 des Kontextes) im Zeitintervall $\Delta\tau := \tau_{m+1} - \tau_m$ aufgrund der Schrödingergleichung in sehr guter Näherung in die Eigenschaft $S_{m+1,r}$ (und ebenso $S_{m+1,r}$ im Zeitintervall $-\Delta\tau$ in $S_{m,r}$) übergeht.

Es sei

$$G := G_0 \cap \Omega$$

und

$$N := \forall_{j \in J'} [(E_j, t_j) \vee \langle (E_j)^\perp, t_j \rangle]$$

das physikalischen "tertium non datur" für die interessierenden Ereignisse des Kontextes.

Unter der Voraussetzung der Grundbedingung G sowie des physikalischen "tertium non datur" N soll gezeigt werden, dass das mögliche Ereignis

$$(S_{m,r}, \tau_m)$$

mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit genau dann eintritt, wenn auch

$$(S_{m+1,r}, \tau_{m+1})$$

eintritt, dass also folgende Beziehung gilt:

$$\forall (\langle S_{m,r}, \tau_m \rangle \leftrightarrow \langle S_{m+1,r}, \tau_{m+1} \rangle \mid G \wedge N) \approx 1$$

Mit $J' := \{1, \dots, p\}$ sei

$$\{(E_i, t_i) \mid i \in J'\}$$

die Menge der Voraussetzungen des gegebenen Kontextes. Für das Folgende sei r fest gewählt, und es sei o.B.d.A.

$$m = 1$$

sowie

$$F_k := U_{-\tau_k} S_{k,r} \quad (\text{für } k \in \{1, 2\})$$

Zu zeigen ist dann:

$$\nu(\langle F_1 \rangle \leftrightarrow \langle F_2 \rangle \mid G \wedge N) \approx 1$$

L.32.1 Mit den Bezeichnungen aus T.30.7 gilt: Für eine Abbildung ρ , die jedem s und j ein Element aus der Menge $\{0,1\}$ zuordnet, ist

$$\mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj;\rho(s,j)} \rangle \wedge G) = \mu(\exists_s \forall_j \langle A_{sj;\rho(s,j)} \rangle \wedge G \wedge N)$$

Dabei sind wie üblich definiert:

$$A_{sj;1} := A_{sj}$$

$$A_{sj;0} := (A_{sj})^\perp$$

Beweis: Wegen L.30.9 kann das Lemma L.30.5 verallgemeinert werden auf den Fall, dass (für $\rho_0 \in \{0,1\}$) C_k durch $C_{k;\rho_0}$ und B_k durch $B_{k;\rho_0}$ ersetzt wird.

Damit kann L.30.6 verallgemeinert werden auf den Fall, dass C_{sj} durch $C_{sj;\rho(s,j)}$ und B_{sj} durch $B_{sj;\rho(s,j)}$ ersetzt wird. Nun kann der Beweis von L.32.1 völlig analog zum Beweis von T.30.7 geführt werden. **QED**

L.32.2 Es gelten:

$$\mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \wedge G) = \mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \wedge G \wedge N)$$

$$\mu(G) = \mu(G \wedge N)$$

Beweis: Beide Aussagen sind spezielle Fälle von L.32.1. Für die erste Aussage setzt man (mit den Bezeichnungen aus T.30.7)

$$S := 1$$

$$n(1) := 2$$

$$(E_{11}, t_{11}) := (S_{1r}, \tau_1)$$

$$(E_{12}, t_{12}) := (S_{2r}, \tau_2)$$

$$\rho(1,1) := 1$$

$$\rho(1,2) := 0$$

Es ist dann:

$$A_{11} = F_1$$

$$A_{12} = F_2$$

Für die zweite Aussage muss man lediglich $S := 0$ setzen. **QED**

L.32.3 Es sei ein makroskopischer oder ein kommutativer Kontext gegeben mit der Indexmenge

$$J = J' \cup J''$$

und den interessierenden Ereignissen

$$\{(E_j, t_j) \mid j \in J''\}$$

Ist dann K'' eine Teilmenge von J'' , so ergibt die Beschränkung der interessierenden Ereignisse auf

$$\{ (E_k, t_k) \mid k \in K'' \}$$

(mit einer passenden neuen Nummerierung der Elemente dieser Menge) wieder einen derartigen Kontext.

Beweis: Die Behauptung ist leicht zu zeigen, da man in der Definition der t -Zugänglichkeit bei den Folgen B_1, \dots, B_n , die die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllen sollen, für alle $j \notin J_k$ als B_j speziell \mathcal{H} wählen kann. **QED**

Für das Folgende seien:

$$A_i := \bigcup_{-t_i} E_i \quad (\text{für } i \in J')$$

$$L := \pi_{A_p} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

L.32.4 Es gelten:

$$\mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \wedge G) = \text{tr } \pi_{(F_2)^\perp} \pi_{F_1} LL^* \pi_{F_1} \pi_{(F_2)^\perp}$$

$$\mu(G) = \text{tr } LL^*$$

Beweis: Beide Aussagen sind Konsequenzen von T.29.10(b). Hierzu muss man gemäß L.32.3 alle interessierenden Ereignisse mit Ausnahme von (S_{1r}, τ_1) und (S_{2r}, τ_2) (bzw. für die zweite Aussage überhaupt alle interessierenden Ereignisse) weglassen. **QED**

Für das Folgende nehmen wir an, dass $\dim UR < \infty$ und $L \neq 0$ ist. Es ist dann:

$$\text{tr } LL^* \in (0, \infty)$$

L.32.5 Es gilt:

$$\mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \mid G \wedge N) = \text{tr } \pi_{(F_2)^\perp} \pi_{F_1} LL^* \pi_{F_1} / \text{tr } LL^*$$

Beweis: Es ist

$$\mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \mid G \wedge N)$$

$$= \mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \wedge G \wedge N) / \mu(G \wedge N) \quad (\text{Definition von } \mu(\mid))$$

$$= \mu(\langle (F_2)^\perp \rangle \wedge \langle F_1 \rangle \wedge G) / \mu(G) \quad (\text{L.32.2})$$

$$= \text{tr } \pi_{(F_2)^\perp} \pi_{F_1} LL^* \pi_{F_1} \pi_{(F_2)^\perp} / \text{tr } LL^* \quad (\text{L.32.4})$$

QED

Theorem T.32.1 Falls die Dokumentbeziehung

$$\pi_{F_1} L \approx \pi_{F_2} L$$

gilt, ist

$$\nu(\langle F_1 \rangle \leftrightarrow \langle F_2 \rangle \mid G \wedge N) \approx 1$$

Beweis: Unter der gegebenen Voraussetzung ist

$$\begin{aligned}
 & \mu(\langle F_1 \rangle \wedge \neg \langle F_2 \rangle \mid G \wedge N) \\
 & \leq \mu(\langle F_1 \rangle \wedge \langle (F_2)^\perp \rangle \mid G \wedge N) && \text{(da } N \subset [\langle F_2 \rangle \vee \langle (F_2)^\perp \rangle] \\
 & && \text{und } \mu(\mid) \text{ monoton ist)} \\
 & = \text{tr } \pi_{(F_2)^\perp} \pi_{F_1} LL^* \pi_{F_1} \pi_{(F_2)^\perp} / \text{tr } LL^* && \text{(L.32.5)} \\
 & \approx \text{tr } \pi_{(F_2)^\perp} \pi_{F_2} LL^* \pi_{F_1} \pi_{(F_2)^\perp} / \text{tr } LL^* \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\mu(\langle F_2 \rangle \wedge \neg \langle F_1 \rangle \mid G \wedge N) \approx 0$$

und somit

$$\begin{aligned}
 & \mu(\neg(\langle F_1 \rangle \leftrightarrow \langle F_2 \rangle) \mid G \wedge N) \\
 & \leq \mu(\langle F_1 \rangle \wedge \neg \langle F_2 \rangle \mid G \wedge N) + \mu(\langle F_2 \rangle \wedge \neg \langle F_1 \rangle \mid G \wedge N) \\
 & \approx 0
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung unmittelbar aufgrund der Definition von $v(\mid)$.

QED

B33. Die Realität dokumentierter Ereignisse

Es sei ein makroskopischer Kontext gegeben, d.h. eine Folge t-zugänglicher Ereignisse

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

deren Indexbereich $\{1, \dots, n\}$ aufgeteilt ist in die Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, p\}$$

und

$$J'' := \{p+1, \dots, n\}$$

Zu jedem der interessierenden Ereignisse (E_k, t_k) gibt es dann zum Zeitpunkt t ein Dokument (F_k, t) , für welches unter den Voraussetzungen des Kontextes eine bedingte Dokumentbeziehung besteht.

Mit den Definitionen

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für alle } j \in \{1, \dots, n\})$$

$$D_k := U_{-t} F_k \quad (\text{für alle } k \in J'')$$

sowie

$$L := \pi_{A_p} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

bedeutet dies formal, dass für alle $k \in J''$ die Gleichung

$$(*) \pi_{A_k} L = \pi_{D_k} L$$

gilt.

Die Grundbedingung des Kontextes sei definiert als

$$G_o := \langle UR \rangle_o \wedge \forall_{i \in J'} \langle E_i, t_i \rangle_o$$

Theorem T.33.1 Es gilt im allgemeinen nicht:

$$\square_{AX} (G_o \wedge \langle F_k, t \rangle_o \rightarrow \langle E_k, t_k \rangle_o)$$

Beweis: Es genügt, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Dazu sei:

$$J' := \emptyset$$

$$t := 0$$

$$t_k := 0$$

$$E := E_k$$

$$F := F_k$$

Es folgt:

$$G_o = \langle UR \rangle_o$$

$$L = \pi_{UR}$$

$$A_k = E$$

$$D_k = F$$

Weiter seien

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^4$$

e_1, \dots, e_4 eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}

$$UR := [e_1, e_2]$$

$$F := [e_1, e_3]$$

$$E := [e_1, e_4]$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \pi_F \pi_{UR} &= \pi_{F \cap UR} \\ &= \pi_{[e_1]} \\ &= \pi_{E \cap UR} \\ &= \pi_E \pi_{UR} \end{aligned}$$

d.h. die Bedingung (*) ist erfüllt. Mit $n := 1$, $k := 1$ sowie $J'' := \{1\}$ ergibt dies einen sehr einfachen makroskopischen Kontext.

Es sei nun

$$\omega := \{ (A, \tau) \in \mathcal{E} \mid UR < U_{-\tau} A \text{ oder } F < U_{-\tau} A \}$$

Es ist dann leicht zu sehen, dass $\omega \in \bigcap(\text{MON}) \cap \bigcap(\text{SG})$ ist. Wäre nun

$$\omega \notin \bigcap(\text{SEC})$$

so gäbe es $s \in T$ sowie vertauschbare Unterräume $D_1, D_2, \dots < \mathcal{H}$ mit $\bigcap_j D_j = 0$ und

$$\omega \in \forall_j \langle D_j, s \rangle_0$$

Daraus folgt für alle j

$$\omega \in \langle D_j, s \rangle_0$$

$$(D_j, s) \in \omega$$

$$UR < U_{-s} D_j \text{ oder } F < U_{-s} D_j$$

Mit

$$D^{UR} := \bigcap \{ D_j \mid UR < U_{-s} D_j \}$$

$$D^F := \bigcap \{ D_j \mid F < U_{-s} D_j \}$$

folgt

$$0 = \bigcap_j D_j$$

$$= D^{UR} \cap D^F$$

und somit

$$D^{UR} \perp D^F$$

$$U_{-s} D^{UR} \perp U_{-s} D^F$$

$$UR \perp F \quad (\text{wegen } UR < U_{-s} D^{UR} \text{ und } F < U_{-s} D^F)$$

im Widerspruch zur Definition von UR und F .

Es gilt somit

$$\omega \in \bigcap(\text{SEC})$$

$$\omega \in \Omega$$

Da außerdem gilt:

$$\omega \in \langle \text{UR} \rangle_o \quad (\text{wegen } (\text{UR}, 0) \in \omega)$$

$$\omega \in \langle \text{F} \rangle_o \quad (\text{wegen } (\text{F}, 0) \in \omega)$$

$$\omega \notin \langle \text{E} \rangle_o \quad (\text{da weder } \text{UR} < \text{E} \text{ noch } \text{F} < \text{E} \text{ ist})$$

folgt

$$\Diamond_{\text{AX}}(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \langle \text{F} \rangle_o \wedge \neg \langle \text{E} \rangle_o)$$

$$\neg \Box_{\text{AX}}(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \langle \text{F} \rangle_o \rightarrow \langle \text{E} \rangle_o)$$

QED

Die t -Zugänglichkeit der Ereignisse $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ besagt, dass für alle $k \in J$ und für jede Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt, die Dokumentbeziehung (DB) gilt. Der betrachtete makroskopische Kontext beruht auf einer derartigen Folge.

Werden bei dieser Konstruktion die Bedingungen (i) und (ii) ersetzt durch die Aussagen

$$(i_D) \quad B_j = D_j \quad (\text{für alle } j \in J_k)$$

$$(ii_D) \quad B_j \in \{D_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{für alle } j \in J \setminus J_k \setminus \{k\})$$

so sprechen wir von einem D-Kontext. An der dritten Bedingung

$$(iii) \quad B_k = \mathcal{H}$$

ändert sich dabei nichts.

Unter einem Standard-Kontext verstehen wir einen makroskopischen Kontext, bei dem die Abhängigkeitsrelation « mit der Standard-Abhängigkeitsrelation «' übereinstimmt, so dass also gilt:

$$j \ll k \Leftrightarrow j < k \wedge j \in J' \quad (\text{für alle } j, k \in J)$$

L.33.1 Jeder makroskopische Kontext ergibt, wenn man « durch «' ersetzt, einen Standard-Kontext.

Beweis: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus T.30.6.

QED

L.33.2 Jeder Standard-Kontext ist ein D-Kontext.

Beweis: Zu zeigen ist, dass für jedes $k \in J$ und für alle Folgen $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen (i_D) , (ii_D) und (iii) erfüllen, die Dokumentbeziehung (DB) gilt. Es sei also $k \in J$ und hierzu eine entsprechende Folge gegeben. Mit p werde

wieder die Anzahl der Voraussetzungen des Kontextes bezeichnet. Es ist somit:

$$J' = \{1, \dots, p\}$$

Es sei $q := \min\{p, k-1\}$. Da « die Standard-Abhängigkeitsrelation ist, folgt $J_k = \{1, \dots, q\}$, und somit gilt für alle $j \leq q$ die Gleichung

$$B_j = D_j \quad (\text{wegen } (i_D))$$

Für $j > q$ ist $B_j \in \{D_j, \mathcal{H}\}$ und folglich auch $B_j \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\}$. Die Folge

$$A_1, \dots, A_q, B_{q+1}, \dots, B_n$$

erfüllt daher die Bedingungen (i) bis (iii), und es gilt die Dokumentbeziehung

$$\begin{aligned} \pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_{q+1}} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \\ = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_{q+1}} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \end{aligned}$$

Indem man für alle $j \in J$ setzt $\sigma(j) := 1$, erhält man mit L.29.2:

$$\begin{aligned} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} &= \pi_{D_q} \cdots \pi_{D_1} \pi_{UR} \\ &= \pi_{B_q} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_{q+1}} \pi_{B_q} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} \\ = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_{q+1}} \pi_{B_q} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} \end{aligned}$$

Dies ist die zu beweisende Beziehung (DB).

QED

L.33.3 Es sei ein D-Kontext mit der Standard-Abhängigkeitsrelation gegeben, in dem es genau ein interessierendes Ereignis gibt, d.h. es sei $n = p+1$ (mit den Bezeichnungen aus L.33.2). Nimmt man nun das Dokument (F_{p+1}, t) des interessierenden Ereignisses als ein weiteres interessierendes Ereignis hinzu, d.h. setzt man

$$\begin{aligned} n &:= p+2 \\ (E_{p+2}, t_{p+2}) &:= (F_{p+1}, t) \end{aligned}$$

so erhält man wiederum einen D-Kontext (mit der Standard-Abhängigkeitsrelation).

Beweis: Als Dokument für das neue interessierende Ereignis (E_{p+2}, t_{p+2}) kann man

$$(F_{p+2}, t) := (F_{p+1}, t)$$

verwenden. Das Ereignis (E_{p+2}, t_{p+2}) ist dann Dokument für sich selbst. Es sei nun $k \in \{1, \dots, p+2\}$ und $B_1, \dots, B_{p+2} < \mathcal{H}$ eine Folge, die die Bedingungen (i_D) , (ii_D) und (iii) erfüllt. Zu zeigen ist, dass die folgende Dokumentbeziehung gilt:

$$\pi_{A_k} \pi_{B_{p+2}} \pi_{B_{p+1}} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_{p+2}} \pi_{B_{p+1}} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Falls $B_{p+2} = \mathcal{H}$ ist, geht diese Gleichung über in eine jener Dokumentbeziehungen, die in dem ursprünglichen Kontext gelten.

Ist hingegen $B_{p+2} = D_{p+2}$, so gilt wegen

$$D_{p+2} = D_{p+1}$$

und

$$B_{p+1} \in \{D_{p+1}, \mathcal{H}\}$$

die Gleichung

$$\pi_{B_{p+2}} \pi_{B_{p+1}} = \pi_{D_{p+1}}$$

Somit geht die zu beweisende Beziehung auch in diesem Fall über in eine der Dokumentbeziehungen, die im ursprünglichen Kontext gelten. **QED**

L.33.4 Mit den in L.29.1 verwendeten Bezeichnungen gilt für jeden D-Kontext die Aussage: Für alle $k \in J$ und $\sigma \in \mathcal{W}'$ sowie für jede Folge $B_1, \dots, B_n < \mathcal{H}$, die die Bedingungen

$$(i_D') \quad B_j = H_j \quad (\text{für alle } j \in J_k)$$

$$(ii_D') \quad B_j \in \{H_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{für alle } j \in J \setminus J_k \setminus \{k\})$$

$$(iii') \quad B_k = \mathcal{H}$$

erfüllt, gilt die Gleichung

$$(DB') \quad \pi_{G_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Beweis: Der Beweis dieser Aussage kann ganz analog zu dem Beweis von L.29.1 geführt werden. (Man muss lediglich überall A_j durch D_j sowie G_j durch H_j und G_v durch H_v ersetzen.) **QED**

L.33.5 Mit den Bezeichnungen von L.29.2 gilt für jeden D-Kontext die Aussage: Für jedes $\sigma \in \mathcal{W}$ und $k \in J \cup \{0\}$ ist

$$\pi_{G_k} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR} = \pi_{H_k} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über den Index k . Der Fall $k = 0$ ist trivial. Es sei nun $k \in J$. Dann ist:

$$\pi_{G_k} \pi_{G_{k-1}} \dots \pi_{G_1} \pi_{UR}$$

$$= \pi_{G_k} \pi_{H_{k-1}} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit der Induktionsannahme})$$

$$= \pi_{H_k} \pi_{H_{k-1}} \dots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{aufgrund von L.33.4,}$$

mit $B_j := H_j$ für $j < k$

und $B_j := \mathcal{H}$ für $j \geq k$)

QED

L.33.6 Mit den Bezeichnungen von T.29.3 gilt für jeden D-Kontext die Aussage: Für alle $\sigma \in \mathcal{W}$ ist:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$$

Beweis: Es sei $\sigma \in \mathcal{W}$. Mit den Abkürzungen

$$G_j := A_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

$$H_j := D_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

folgt

$$\begin{aligned} & \pi_\sigma \pi_{UR} \\ &= \pi_{G_n} \cdots \pi_{G_{k+1}} \pi_{G_k} \pi_{G_{k-1}} \cdots \pi_{G_1} \pi_{UR} \quad (\text{Definition von } \pi_\sigma) \\ &= \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_k} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.33.5}) \\ &= \pi_{H_k} \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \\ & \hspace{15em} (\text{wegen } F_j \in \mathcal{S} \text{ sind die } F_j \text{ und folglich} \\ & \hspace{15em} \text{auch die } H_j \text{ miteinander vertauschbar}) \\ &= \pi_{G_k} \pi_{H_n} \cdots \pi_{H_{k+1}} \pi_{H_{k-1}} \cdots \pi_{H_1} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.33.4}) \end{aligned}$$

Der Beweis kann nun ebenso weitergeführt werden wie der Beweis von T.29.3.

QED

Für jeden D-Kontext kann man, ebenso wie im Kapitel 29, die Schachtelungseigenschaft beweisen, wobei alle auftretenden Terme in genau derselben Weise definiert werden wie dort.

Theorem T.33.2 Unter den Voraussetzungen von T.33.1 gilt für alle $k \in J''$

$$\square_{AX}(G_o \wedge \langle F_k, t \rangle_o \rightarrow \neg \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_o)$$

Beweis: Wegen L.32.3 kann man alle anderen interessierenden Ereignisse weglassen. Demnach kann man o.B.d.A. annehmen, dass $k = p+1$ und $J'' = \{k\}$ ist. Wegen T.30.6 kann man o.B.d.A. außerdem annehmen, dass « die Standard-Abhängigkeitsrelation ist. Der so erhaltene Kontext ist nach L.33.2 ein D-Kontext mit genau einem interessierenden Ereignis. In der in L.33.3 beschriebenen Weise kann man das Dokument dieses Ereignisses als ein weiteres interessierendes Ereignis hinzunehmen. Man erhält so wiederum einen D-Kontext. Es ist dann

$$J'' = \{k, k+1\}$$

und

$$(E_{k+1}, t_{k+1}) := (F_k, t)$$

Aus der Dokumentbeziehung

$$\pi_{A_k} L = \pi_{D_k} L$$

(mit den oben eingeführten Bezeichnungen) folgt

$$\begin{aligned} \pi_{D_k} \pi_{(A_k)^\perp} L &= \pi_{D_k} L - \pi_{D_k} \pi_{A_k} L \\ &= \pi_{D_k} L - \pi_{D_k} \pi_{D_k} L \\ &= o \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis der Schachtelungseigenschaft können wir $\sigma \in \mathcal{W}$ wählen mit

$$\sigma(k) := 0$$

und

$$\sigma(j) := 1 \quad (\text{für alle } j \in J' \cup \{k+1\})$$

Außerdem seien $B_{j;\tau}$ und $C_{j;\tau}$ sowie M^\wedge vertauschbare Unterräume von \mathcal{H} mit

$$B_{j;\tau} < A_{j;\tau} < C_{j;\tau} \quad (\text{für alle } j \in J \text{ und } \tau \in \{0,1\})$$

$$UR < M^\wedge$$

und

$$B_j := B_{j;1} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

$$C_j := C_{j;1} \quad (\text{für alle } j \in J)$$

Damit erhalten wir (wegen $A_{k+1} = D_k$)

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = \pi_\sigma \pi_{UR} \quad (\text{L.33.6})$$

$$= \pi_{D_k} \pi_{(A_k)^\perp} L \quad (\text{Definition von } \pi_\sigma)$$

$$= 0$$

und folglich

$$UR \perp M_\sigma$$

$$UR \perp A_{k+1} \cap A_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} A_i \quad (\text{Definition von } M_\sigma)$$

$$UR \perp B_{k+1} \cap B_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} B_i$$

$$UR \perp C_{k+1} \cap C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \cap M^\wedge \quad (\text{L.30.5 und L.30.9})$$

$$UR \perp C_{k+1} \cap C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i \quad (\text{mit L.30.8, da } UR < M^\wedge)$$

Mit

$$C := C_{k+1} \cap C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i$$

ist dann

$$UR < C^\perp$$

$$A_{k+1} < C_{k+1}$$

$$A_{k;0} < C_{k;0}$$

und für alle $i \in J'$

$$A_i < C_i$$

Wegen

$$C^\perp \cap C_{k+1} \cap C_{k;0} \cap \bigcap_{i \in J'} C_i = 0$$

folgt aufgrund von SEC

$$\neg \hat{\Delta}(\langle C^\perp \rangle_o \wedge \forall_i \langle C_i \rangle_o \wedge \langle C_{k+1} \rangle_o \wedge \langle C_{k;0} \rangle_o)$$

und mit MON:

$$\neg \hat{\Diamond}(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \forall_i \langle A_i \rangle_o \wedge \langle A_{k+1} \rangle_o \wedge \langle A_{k;0} \rangle_o)$$

Daraus folgt nun

$$\square(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \forall_i \langle A_i \rangle_o \wedge \langle A_{k+1} \rangle_o \rightarrow \neg \langle A_{k;0} \rangle_o)$$

$$\square(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \forall_i \langle A_i \rangle_o \wedge \langle D_k \rangle_o \rightarrow \neg \langle (A_k)^\perp \rangle_o)$$

$$\square(\langle \text{UR} \rangle_o \wedge \forall_i \langle E_i, t_i \rangle_o \wedge \langle F_k, t \rangle_o \rightarrow \neg \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_o) \quad (\text{mit SG})$$

$$\square(G_o \wedge \langle F_k, t \rangle_o \rightarrow \neg \langle (E_k)^\perp, t_k \rangle_o) \quad (\text{Definition von } G_o)$$

QED

B34. Makroskopische Experimente

Es sei

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

eine t -zugängliche Folge von Ereignissen und « eine Abhängigkeitsrelation auf dem Indexbereich

$$J := \{1, \dots, n\}$$

Die Indexmenge J sei aufgeteilt in die beiden Teilbereiche

$$K' := \{1, \dots, q\}$$

$$K'' := \{q+1, \dots, n\}$$

und es gelte:

$$\forall k \in K'' \quad \forall j \ll k \quad j \in K'$$

Damit ist ein makroskopischer Kontext gegeben.

Es sei R die Anzahl der im Rahmen des Experiments betrachteten Alternativen und zu jedem $r \in \{1, \dots, R\}$ sei S_r die Anzahl der möglichen Ausprägungen der r -ten Alternative. Dazu sei

$$D := \{ (r, s) \mid r \in \{1, \dots, R\} \wedge s \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

und

$$k : D \rightarrow K''$$

eine bijektive Abbildung. Damit sei:

$$E_{rs} := E_{k(r,s)}$$

$$t_{rs} := t_{k(r,s)}$$

so dass

$$\{ (E_{rs}, t_{rs}) \mid (r, s) \in D \}$$

die Menge der möglichen experimentellen Ergebnisse ist.

Wir definieren die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen als

$$\mathcal{B} := \{ \beta : \{1, \dots, R\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall r \beta(r) \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

und setzen

$$A_j := \bigcup_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in J)$$

$$A_{rs} := \bigcup_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } (r, s) \in D)$$

Für alle $(r, s) \in D$ gilt dann

$$A_{rs} = A_{k(r,s)}$$

Im folgenden verwenden wir die Indizes r und s grundsätzlich in dem Sinne, dass der Index r die Menge $\{1, \dots, R\}$ und der Index s (zu gegebenem r) den Bereich $s \in \{1, \dots, S_r\}$ durchläuft.

Es seien

$$G := \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \quad (\text{die Grundbedingung})$$

$$N := \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

$$M := \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$Q := N \wedge M$$

Zu jeder Ergebniskonstellation $\beta \in \mathcal{B}$ seien

$$N_\beta := \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle$$

$$Q_\beta := N_\beta \wedge M$$

Theorem T.34.1 Es ist

$$Q = \forall_r \overset{1}{\exists_s} \langle A_{rs} \rangle$$

Beweis: Für alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\omega \in Q$$

$$\Leftrightarrow \omega \in N \wedge \omega \in M$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle \wedge \omega \in \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \forall_r \exists_s (\omega \in \langle A_{rs} \rangle) \wedge \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\omega \in \langle A_{rs} \rangle \wedge \omega \in \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \forall_r \exists_s [(\omega \in \langle A_{rs} \rangle) \wedge \forall_{s \neq s'} \neg(\omega \in \langle A_{rs'} \rangle)]$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \forall_r \exists_s [\langle A_{rs} \rangle \wedge \forall_{s \neq s'} (\neg \langle A_{rs'} \rangle)]$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \forall_r \overset{1}{\exists_s} \langle A_{rs} \rangle$$

QED

Theorem T.34.2 Es ist

$$N = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} N_\beta$$

Beweis: Es ist

$$N = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} N_\beta$$

$$\Leftrightarrow \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall_\omega [\omega \in \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle \Leftrightarrow \omega \in \exists_{\beta \in \mathcal{B}} \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle]$$

$$\Leftrightarrow \forall_\omega [\forall_r \exists_s (\omega \in \langle A_{rs} \rangle) \Leftrightarrow \exists_{\beta \in \mathcal{B}} \forall_r (\omega \in \langle A_{r, \beta(r)} \rangle)]$$

Zu festem $\omega \in \Omega$ sei $M_{r,s} := \langle \omega \in \langle A_{rs} \rangle \rangle$ für alle r und s . Dann ist speziell:

$$M_{r, \beta(r)} \Leftrightarrow \omega \in \langle A_{r, \beta(r)} \rangle$$

Zu zeigen ist also:

$$\forall_r \exists_s M_{r,s} \Leftrightarrow \exists_{\beta \in \mathcal{B}} \forall_r M_{r, \beta(r)}$$

Zu " \Rightarrow ": Es sei $\forall_r \exists_s M_{r,s}$ gegeben. Dann sei zu jedem r

$$\beta(r) := \min \{ s \mid M_{r,s} \}$$

Damit erhält man

$$\forall_r M_{r,\beta(r)}$$

Zu " \Leftarrow ": Es sei $\beta \in \mathcal{B}$ mit $\forall_r M_{r,\beta(r)}$ gegeben. Dann gibt es zu jedem r ein s , nämlich $s := \beta(r)$, mit $M_{r,s}$. **QED**

Theorem T.34.3 Es ist

$$Q_\beta = \forall_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle]$$

Beweis: Es sei $\omega \in Q_\beta$. Dann folgt:

$$\omega \in N_\beta \wedge \omega \in M$$

$$\omega \in \forall_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \omega \in \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$\omega \in \forall_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \forall_{s \neq s'} \neg (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)]$$

$$\forall_r [(\omega \in \langle A_{r,\beta(r)} \rangle) \wedge \forall_{s \neq s'} \omega \notin (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)]$$

$$\forall_r [(\omega \in \langle A_{r,\beta(r)} \rangle) \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} \omega \notin (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{r,\beta(r)} \rangle)]$$

(indem man speziell $s' := \beta(r)$ setzt)

$$\forall_r [(\omega \in \langle A_{r,\beta(r)} \rangle) \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} (\omega \notin \langle A_{rs} \rangle)]$$

$$\omega \in \forall_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle]$$

QED (" \subset ")

Es sei nun umgekehrt

$$\omega \in \forall_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle]$$

und somit

$$\forall_r [(\omega \in \langle A_{r,\beta(r)} \rangle) \wedge \forall_{s \neq \beta(r)} (\omega \notin \langle A_{rs} \rangle)]$$

Es folgt dann einerseits

$$\begin{aligned} \omega &\in \forall_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle \\ &= N_\beta \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt $\omega \in M$. Es seien also r und $s \neq s'$ gegeben. Zu zeigen ist dann:

$$\omega \notin (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Da nur entweder s oder s' mit $\beta(r)$ übereinstimmen kann, gilt:

$$s \neq \beta(r) \vee s' \neq \beta(r)$$

O.B.d.A. sei also $s \neq \beta(r)$. Es folgt dann $\omega \notin \langle A_{rs} \rangle$ und damit die Behauptung.

QED (" \supset ")

QED

Theorem T.34.4 Die Q_β sind paarweise disjunkt.

Beweis: Es sei $\beta, \beta' \in \mathcal{B}$ mit $\beta \neq \beta'$. Dann gibt es ein r mit $\beta(r) \neq \beta'(r)$. Mit $s := \beta(r)$ und $s' := \beta'(r)$ erhalten wir:

$$s \neq s'$$

Aus der Annahme

$$\omega \in Q_\beta \cap Q_{\beta'}$$

folgt nun

$$\omega \in N_\beta \wedge N_{\beta'} \wedge M$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} \omega &\in \langle A_{r,\beta(r)} \rangle \\ &= \langle A_{rs} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &\in \langle A_{r,\beta'(r)} \rangle \\ &= \langle A_{rs'} \rangle \end{aligned}$$

$$\omega \notin (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Das ergibt einen Widerspruch.

QED

Die Bedingungen (EX1), (EX2') und (EX2) werden definiert als:

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \hat{\Diamond} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$(EX2') \quad \forall_r \neg \hat{\Diamond} (G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle)$$

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \hat{\Diamond} (G \wedge \forall_s (\langle A_{rs} \rangle^\perp))$$

Theorem T.34.5 Die Bedingung (EX1) ist äquivalent zu der Inklusion

$$G \subset M$$

Beweis: Zu " \Rightarrow ": Es gelte (EX1) und es sei $\omega \in G$. Zu r sowie $s \neq s'$ folgt mit (EX1)

$$\neg \hat{\Diamond} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

und somit

$$G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

Wegen $\omega \in G$ folgt:

$$\omega \notin (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$\omega \in \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

Es ist also:

$$\forall_r \forall_{s \neq s'} \omega \in \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$\omega \in \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$= M$$

QED (" \Rightarrow ")

Zu " \Leftarrow ": Es sei $G \subset M$ sowie r und $s \neq s'$ gegeben. Zu zeigen ist dann:

$$G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

Wegen $(\neg F \wedge F) = \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{A}$ gelten:

$$\neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle) \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

$$[\forall_r \forall_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)] \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

$$M \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset \quad (\text{Definition von } M)$$

$$G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset \quad (\text{da } G \subset M)$$

QED ("←")**QED**

Theorem T.34.6 Die Bedingung (EX2') ist äquivalent zu:

$$G \subset N$$

Beweis: Zu " \Rightarrow ": Es gelte (EX2') und es sei $\omega \in G$. Zu jedem r folgt

$$G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle = \emptyset \quad (\text{wegen (EX2')})$$

$$\omega \notin \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle \quad (\text{da } \omega \in G)$$

$$\exists_s (\omega \in \langle A_{rs} \rangle)$$

$$\omega \in \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

Da dies für alle r gilt, folgt

$$\omega \in \forall_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

$$= N$$

QED ("⇒")

Zu " \Leftarrow ": Es sei $G \subset N$ sowie r gegeben. Dann ist:

$$G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle \subset N \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle$$

$$\subset (\exists_s \langle A_{rs} \rangle) \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle$$

$$= \emptyset$$

$$\neg \hat{\Delta} (G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle)$$

Da dies für alle r gilt, folgt (EX2').

QED ("←")**QED**

Theorem T.34.7 Die Bedingung (EX2') ist im wesentlichen nur dann erfüllt, wenn $G = \emptyset$ ist. Mit "im wesentlichen" ist hier gemeint, dass für mindestens ein r keines der A_{rs} entweder UR oder eines der A_1, \dots, A_q umfasst.

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen des Theorems sei r so gewählt, dass die Bedingung

$$(*) \quad \forall_s [\neg (\text{UR} < A_{rs}) \wedge \forall_{j \in K'} \neg (A_j < A_{rs})]$$

erfüllt ist. Wir nehmen an, dass $G \neq \emptyset$ ist.

Es genügt dann zu zeigen:

$$G \wedge \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle \neq \emptyset$$

Mit $A_0 := \text{UR}$ sei

$$\omega := \{ (B, \tau) \in \mathcal{E} \mid \exists_{j \in \{0, \dots, q\}} (A_j < U_{-\tau} B) \}$$

Es ist dann leicht zu zeigen, dass $\omega \in \Pi(\text{MON})$ und $\omega \in \Pi(\text{SG})$ ist. Wäre nun $\omega \notin \Pi(\text{SEC})$, so gäbe es vertauschbare Unterräume $D_1, D_2, \dots < \mathcal{H}$ sowie $\tau' \in T$ mit $\bigcap_i D_i = 0$ und $\omega \in \forall_i \langle D_i, \tau' \rangle_0$.

Es folgt:

$$\forall_i [(D_i, \tau') \in \omega] \quad (\text{Definition von } \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$$

$$\forall_i \exists_{j \in \{0, \dots, q\}} (A_j < U_{-\tau'} D_i) \quad (\text{Definition von } \omega)$$

Es gibt dann eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, q\}$ mit

$$\forall_i (A_{f(i)} < U_{-\tau'} D_i)$$

Es sei

$$D^j := \mathcal{H} \cap \bigcap (\{ D_i \mid f(i) = j \}) \quad (\text{für alle } j \in \{0, \dots, q\})$$

Die D^j sind dann ebenfalls vertauschbar mit $\bigcap_j D^j = \emptyset$, und es gilt:

$$A_j < U_{-\tau'} D^j$$

Nun ist

$$G = \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

$$= \forall_{j \in \{0, \dots, q\}} \langle A_j \rangle \quad (\text{Definitionen von } K' \text{ und } A_0)$$

$$\subset \forall_{j \in \{0, \dots, q\}} \langle U_{-\tau'} D^j \rangle \quad (\text{mit MON})$$

$$= \emptyset \quad (\text{mit SG und SEC})$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist auch $\omega \in \bigcap (\text{SEC})$ und folglich $\omega \in \Omega$.

Aufgrund der Definition von ω gilt trivialerweise $\omega \in G$. Zu zeigen bleibt:

$$\omega \in \forall_s \neg \langle A_{rs} \rangle$$

bzw.

$$\forall_s (\omega \notin \langle A_{rs} \rangle)$$

Gäbe es ein s mit $\omega \in \langle A_{rs} \rangle$, so wäre $(A_{rs}, 0) \in \omega$, d.h. aufgrund der Definition von ω wäre:

$$UR < A_{rs} \text{ oder } \exists_{j \in K'} (A_j < A_{rs})$$

Dies steht im Widerspruch zur Bedingung (*).

QED

Theorem T.34.8 Die Bedingung (EX2) ist äquivalent zu

$$G \subset \forall_r \exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle$$

Beweis: Zu " \Rightarrow ": Es gelte die Bedingung (EX2) und es sei $\omega \in G$. Zu jedem r folgt:

$$(G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle) = \emptyset \quad (\text{wegen (EX2)})$$

$$\omega \notin \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle \quad (\text{da } \omega \in G)$$

$$\exists_s (\omega \in \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Da dies für alle r gilt, folgt

$$\forall_r \exists_s (\omega \in \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

$$\omega \in \forall_r \exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle$$

QED (" \Rightarrow ")

Zu " \Leftarrow ": Es sei $G \subset \forall_r \exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle$ und r gegeben. Dann ist:

$$\begin{aligned} G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle &\subset (\forall_r \exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle) \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle \\ &\subset (\exists_s \neg \langle (A_{rs})^\perp \rangle) \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\neg \hat{\diamond} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Da dies für alle r gilt, folgt (EX2).

QED (" \Leftarrow ")
QED

Theorem T.34.9 Zu jedem r gelte: Es gibt $t_r \in T$ mit $t_{rs} = t_r$ für alle s , und die Eigenschaften E_{rs} mit $s \in \{1, \dots, S_r\}$ sind paarweise orthogonal. Dann ist die Bedingung (EX1) erfüllt.

Beweis: Zu jedem r und zu $s \neq s'$ gilt unter den Voraussetzungen des Theorems:

$$\begin{aligned} A_{rs} &\perp A_{rs'} \\ \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle &= \emptyset \quad (\text{wegen SEC}) \\ \neg (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle) &= \Omega \end{aligned}$$

Da dies für alle r und $s \neq s'$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} G &\subset \Omega \\ &\subset \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg (\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle) \\ &= M \end{aligned}$$

Mit T.34.5 folgt nun die Behauptung.

QED

Wie zuvor sei für alle $j \in J$

$$\begin{aligned} A_{j;1} &:= A_j \\ A_{j;0} &:= (A_j)^\perp \\ A_{j;\emptyset} &:= \mathcal{H} \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis der Schachtelungseigenschaft seien $B_{j;\tau}$ und $C_{j;\tau}$ sowie M^\wedge vertauschbare Unterräume von \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned} B_{j;\tau} &< A_{j;\tau} < C_{j;\tau} \quad (\text{für alle } j \in J \text{ und } \tau \in \{0,1\}) \\ UR &< M^\wedge \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} B_j &:= B_{j;1} && (\text{für } j \in K') \\ C_j &:= C_{j;1} && (\text{für } j \in K') \\ A_{rs;\tau} &:= A_{k(r,s);\tau} && (\text{für } (r,s) \in D \text{ und } \tau \in \{0,1\}) \\ B_{rs;\tau} &:= B_{k(r,s);\tau} && (\text{für } (r,s) \in D \text{ und } \tau \in \{0,1\}) \\ C_{rs;\tau} &:= C_{k(r,s);\tau} && (\text{für } (r,s) \in D \text{ und } \tau \in \{0,1\}) \end{aligned}$$

sowie

$$B_{rs} := B_{rs;1} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

$$C_{rs} := C_{rs;1} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Es ist dann

$$B_j < A_j < C_j \quad (\text{für } j \in K')$$

$$B_{rs;\tau} < A_{rs;\tau} < C_{rs;\tau} \quad (\text{für } (r,s) \in D \text{ und } \tau \in \{0,1\})$$

und speziell

$$B_{rs} < A_{rs} < C_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Theorem T.34.10 Zu jedem r gelte: Es gibt $t_r \in T$ mit $t_{rs} = t_r$ für alle s , und die Eigenschaften E_{rs} mit $s \in \{1, \dots, S_r\}$ sind paarweise orthogonal. Dann folgt (EX2) aus der Annahme

$$(EX2'') \quad \forall_r \neg \hat{\Delta}(G \wedge \langle (A_r)^\perp \rangle)$$

mit

$$A_r := \oplus_s A_{rs}$$

Beweis: Es sei r fest. Dann gilt:

$$B_{rs;0} < (A_{rs})^\perp \quad (\text{für alle } s)$$

$$A_{rs} < (B_{rs;0})^\perp \quad (\text{für alle } s)$$

$$\begin{aligned} A_r &< \oplus_s (B_{rs;0})^\perp \\ &= (\bigcap_s B_{rs;0})^\perp \end{aligned}$$

$$\bigcap_s B_{rs;0} < (A_r)^\perp$$

Aus (EX2'') folgt dann:

$$\neg \hat{\Delta}(G \wedge \langle (A_r)^\perp \rangle)$$

$$G \wedge \langle (A_r)^\perp \rangle = \emptyset$$

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \langle (A_r)^\perp \rangle = \emptyset \quad (\text{Definition von } G)$$

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle B_j \rangle \wedge \langle \bigcap_s B_{rs;0} \rangle = \emptyset \quad (\text{MON})$$

$$UR \perp \bigcap_j B_j \cap \bigcap_s B_{rs;0} \quad (\text{mit T.30.2})$$

$$UR \perp \bigcap_j C_j \cap \bigcap_s C_{rs;0} \cap M^\wedge \quad (\text{mit L.30.9})$$

$$UR \perp \bigcap_j C_j \cap \bigcap_s C_{rs;0} \quad (\text{L.30.8, da } UR < M^\wedge)$$

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle C_j \rangle \wedge \forall_s \langle C_{rs;0} \rangle = \emptyset \quad (\text{mit T.30.2})$$

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \forall_s \langle A_{rs;0} \rangle = \emptyset \quad (\text{MON})$$

$$G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle = \emptyset \quad (\text{Def. von } G \text{ und } A_{rs;0})$$

$$\neg \hat{\Delta}(G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Da dies für alle r gilt, folgt

$$\forall_r \neg \hat{\Diamond} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

und somit die Behauptung. **QED**

Wir erinnern an die Definitionen:

$$\mathcal{W} := \{ \sigma : J \rightarrow \{0,1,\emptyset\} \mid \forall_{j \in J} [\sigma(j) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall_{i \ll j} \sigma(i) = 1] \}$$

$$M_\sigma := \bigcap_{j \in J} A_{j;\sigma(j)} \quad (\text{für } \sigma : J \rightarrow \{0,1,\emptyset\})$$

$$M^\wedge := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}} M_\sigma$$

Zu $\beta \in \mathcal{B}$ sei σ_β die Abbildung von J nach $\{0,1,\emptyset\}$, für welche gilt:

$$\sigma_\beta(j) = 1 \quad \text{für alle } j \in K'$$

$$\sigma_\beta(k(r,s)) = 1 \quad \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s = \beta(r)$$

$$\sigma_\beta(k(r,s)) = 0 \quad \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s \neq \beta(r)$$

L.34.1 Für alle $\beta \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\sigma_\beta \in \mathcal{W}$$

Beweis: Für jedes $j \in J$ gilt $\sigma_\beta(j) \neq \emptyset$, und für alle $i \ll j$ ist $i \in K'$ und somit $\sigma_\beta(i) = 1$. **QED**

Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}$ sei

$$\mathcal{W}_\beta := \{ \sigma \in \mathcal{W} \mid \forall_{j \in K'} \sigma(j) = 1 \wedge \forall_r \sigma(k(r,\beta(r))) = 1 \}$$

Zu jeder Teilmenge $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ sei außerdem

$$\mathcal{W}_{\mathcal{B}'} := \bigcup \{ \mathcal{W}_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

L.34.2 Für alle $\beta \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\sigma_\beta \in \mathcal{W}_\beta$$

Beweis: Es ist

$$\sigma_\beta(j) = 1 \quad \text{für alle } j \in K'$$

und für alle r

$$\sigma_\beta(k(r,\beta(r))) = 1$$

QED

Theorem T.34.11 Für alle $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ ist:

$$\bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}'} \left(\bigcap_{j \in K'} B_j \cap \bigcap_r B_{r,\beta(r)} \right) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}'} \left(\bigcap_{j \in K'} B_j \cap \bigcap_r B_{r,\beta(r)} \right) \\ &= \bigoplus \{ M_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{W} \text{ und } \exists \beta \in \mathcal{B}' [\forall_{j \in K'} \sigma(j) = 1 \wedge \forall_r \sigma(k(r,\beta(r))) = 1] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oplus \{ M_\sigma \mid \exists \beta \in \mathcal{B}' [\sigma \in \mathcal{W}_\beta] \} \\
&= \oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma
\end{aligned}$$

QED

Theorem T.34.12 Für alle $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ ist:

$$\oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} (\bigcap_{j \in K'} C_j \cap \bigcap_r C_{r, \beta(r)}) = (\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma) \oplus (M^\wedge)^\perp$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&\oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} (\bigcap_{j \in K'} C_j \cap \bigcap_r C_{r, \beta(r)}) \\
&= \oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} [(\bigcap_{j \in K'} B_j \cap \bigcap_r B_{r, \beta(r)}) \oplus (M^\wedge)^\perp] \quad (\text{mit L.30.3}) \\
&= \oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} (\bigcap_{j \in K'} B_j \cap \bigcap_r B_{r, \beta(r)}) \oplus (M^\wedge)^\perp \\
&= (\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma) \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{mit T.34.11})
\end{aligned}$$

QED

Für das Folgende setzen wir $\dim \text{UR} < \infty$ voraus.

Theorem T.34.13 Für jedes $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gilt:

$$\mu(G \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' N_\beta) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} \text{tr } \pi_{M_\sigma} \pi_{\text{UR}}$$

Beweis: Zu " \leq ": Es ist

$$\begin{aligned}
&\mu(G \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' N_\beta) \\
&= \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle) \\
&\leq \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle C_j \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' \forall_r \langle C_{r, \beta(r)} \rangle) \\
&= \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' [\forall_{j \in K'} \langle C_j \rangle \wedge \forall_r \langle C_{r, \beta(r)} \rangle]) \\
&= \text{tr } \pi_{\oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} [\bigcap_{j \in K'} C_j \cap \bigcap_r C_{r, \beta(r)}]} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{mit T.23.11}) \\
&= \text{tr } \pi_{(\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma) \oplus (M^\wedge)^\perp} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{mit T.34.12}) \\
&= \text{tr } \pi_{(\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_\sigma)} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{da } \text{UR} < M^\wedge) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} \text{tr } \pi_{M_\sigma} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{da die } M_\sigma \text{ orthogonal sind})
\end{aligned}$$

QED (" \leq ")

Zu " \geq ":

$$\begin{aligned}
&\mu(G \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' N_\beta) \\
&= \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' \forall_r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle) \\
&\geq \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle B_j \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' \forall_r \langle B_{r, \beta(r)} \rangle) \\
&= \mu(\langle \text{UR} \rangle \wedge \exists \beta \in \mathcal{B}' [\forall_{j \in K'} \langle B_j \rangle \wedge \forall_r \langle B_{r, \beta(r)} \rangle])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr } \pi_{\oplus_{\beta \in \mathcal{B}'} [\cap_{j \in K'} B_j \cap \cap_{r \in B_r, \beta(r)}]} \pi_{UR} && \text{(mit T.23.11)} \\
 &= \text{tr } \pi_{(\oplus_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} M_{\sigma})} \pi_{UR} && \text{(mit T.34.11)} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} && \text{(da die } M_{\sigma} \text{ orthogonal sind)}
 \end{aligned}$$

QED ("≥")
QED

Die Bedingungen (EX1) und (EX2) werden für den Beweis von T.34.13 nicht benötigt. Für das Folgende setzen wir aber voraus, dass diese beiden Bedingungen erfüllt sind.

Theorem T.34.14 Es gilt:

$$\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}} \wedge \sigma \notin \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \} \Rightarrow \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} = 0$$

Beweis: Es sei $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ und $\sigma \notin \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \}$. Dann gibt es ein $\beta \in \mathcal{B}$ mit $\sigma \in \mathcal{W}_{\beta}$. Dies besagt:

$$\forall_{j \in K'} \sigma(j) = 1 \text{ und } \forall_r \sigma(k(r, \beta(r))) = 1$$

Da $\sigma \in \mathcal{W}$ und $\sigma \neq \sigma_{\beta}$ ist, gibt es ein r sowie $s' \neq s := \beta(r)$ mit $\sigma(k(r, s')) = 1$.

Somit gilt:

$$\exists_r \exists_{s \neq s'} [\sigma(k(r, s)) = 1 \wedge \sigma(k(r, s')) = 1]$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma} &= \cap_{j \in J} A_{j; \sigma(j)} \\
 &< \cap_{j \in K'} A_j \cap A_{rs} \cap A_{rs'}
 \end{aligned}$$

Aufgrund von (EX1) gilt:

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

Wegen T.23.8 gibt es dann vertauschbare Unterräume D, D_j, D_{rs} und $D_{rs'}, < \mathcal{H}$ mit

$$\begin{aligned}
 UR &< D \\
 A_j &< D_j \quad (\text{für } j \in K') \\
 A_{rs} &< D_{rs} \\
 A_{rs'} &< D_{rs'}
 \end{aligned}$$

sowie

$$D \cap \cap_j D_j \cap D_{rs} \cap D_{rs'} = 0$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 M_{\sigma} &< \cap_j A_j \cap A_{rs} \cap A_{rs'} \\
 &< \cap_j D_j \cap D_{rs} \cap D_{rs'} < D^{\perp} < UR^{\perp}
 \end{aligned}$$

und somit

$$M_{\sigma} \perp UR$$

$$\pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} = 0$$

QED

Theorem T.34.15 Für alle $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{B}'} \cap \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \} = \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

Beweis: Zu " \subset ": Es sei $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}$ und $\beta \in \mathcal{B}$ mit $\sigma = \sigma_{\beta}$. Dann gibt es $\beta' \in \mathcal{B}'$ mit $\sigma \in \mathcal{W}_{\beta'}$. Es folgt:

$$\forall_r \sigma(k(r, \beta'(r))) = 1$$

Da für σ_{β} gilt:

$$\forall_r \forall_s [\sigma_{\beta}(k(r, s)) = 1 \Leftrightarrow s = \beta(r)]$$

folgt für alle r

$$\beta'(r) = \beta(r)$$

und somit $\beta = \beta'$ sowie

$$\sigma = \sigma_{\beta'}$$

$$\in \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

QED (" \subset ")

Zu " \supset ": Die Aussage ist trivial, da $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ und stets $\sigma_{\beta} \in \mathcal{W}_{\beta}$ ist. **QED (" \supset ")**

QED

Theorem T.34.16 Für jedes $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ gilt:

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_{\beta}) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} \text{tr} \pi_{M_{\sigma_{\beta}}} \pi_{UR}$$

Beweis: Wegen T.34.13 ist

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_{\beta}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}} \text{tr} \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR}$$

Zu jedem $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'}$ gilt entweder

$$\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'} \cap \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \}$$

$$= \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

(T.34.15)

oder aber

$$\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{B}'} \text{ und } \sigma \notin \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \}$$

Im letzteren Fall ist

$$\text{tr} \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} = 0$$

(T.34.14)

Daher folgt:

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_{\beta}) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} \text{tr} \pi_{M_{\sigma_{\beta}}} \pi_{UR}$$

QED

Es seien

$$q_\beta := \text{tr } \pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

$$\bar{q} := \sum_{\beta \in \mathcal{B}} q_\beta$$

$$p_\beta := q_\beta / \bar{q} \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

L.34.3 Mit der Definition von q_β lässt sich T.34.16 schreiben als:

$$\mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_\beta \quad (\text{für alle } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B})$$

L.34.4 Mit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ erhalten wir aus L.34.3 (wegen T.34.2):

$$\mu(G \wedge N) = \bar{q}$$

Theorem T.34.17 Es gilt:

$$\mu(\exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta \mid G \wedge N) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta \quad (\text{für alle } \mathcal{B}' \subset \mathcal{B})$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & \mu(\exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta \mid G \wedge N) \\ &= \mu(G \wedge N \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) / \mu(G \wedge N) \\ &= \mu(G \wedge \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} N_\beta) / \mu(G \wedge N) \quad (\text{da } N_\beta \subset N) \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_\beta / \bar{q} \quad (\text{L.34.3 und L.34.4}) \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta \end{aligned}$$

QED

Theorem T.34.18 Q ist die disjunkte Vereinigung der $N_\beta \wedge Q$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} N_\beta \wedge Q &= N_\beta \wedge N \wedge M && (\text{Definition von } Q) \\ &= N_\beta \wedge M && (\text{da } N_\beta \subset N) \\ &= Q_\beta && (\text{Definition von } Q_\beta) \end{aligned}$$

und Q ist die disjunkte Vereinigung der Q_β .

QED

Wir definieren

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A}(\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \})$$

Speziell sind M , N und Q sowie N_β und Q_β Elemente von \mathcal{A}_e .

Auf \mathcal{A}_e definieren wir

$$\mu_e(A) := \mu(A \mid G \wedge N) \quad (\text{für } A \in \mathcal{A}_e)$$

Theorem T.34.19 μ_e ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}_e .

Beweis: Zu zeigen ist insbesondere die Additivität von μ_e . Die

$$Q_\beta = \bigvee_r [\langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \bigvee_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle] \quad (\text{vgl. T.34.3})$$

sind, soweit sie nicht leer sind, atomare Elemente von \mathcal{A}_e . Jedes $A \in \mathcal{A}_e$ ist eine Vereinigung aus atomaren Elementen der Form

$$\bigvee_{(r,s) \in D'} \langle A_{rs} \rangle \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D'} \neg \langle A_{rs} \rangle$$

mit einer Menge $D' \subset D$.

Wegen $Q = \exists_{\beta \in \mathcal{B}} Q_\beta$ kann $A \wedge Q$ stets dargestellt werden als

$$A \wedge Q = \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} Q_\beta$$

mit passendem $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Dabei kann man leere Q_β weglassen, d.h. o.B.d.A. ist $Q_\beta \neq \emptyset$ für alle $\beta \in \mathcal{B}'$.

Es seien nun $A, B \in \mathcal{A}_e$ disjunkt. Dann gibt es $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ sowie $\mathcal{B}'' \subset \mathcal{B}$ mit

$$A \wedge Q = \exists_{\beta \in \mathcal{B}'} Q_\beta$$

$$B \wedge Q = \exists_{\beta \in \mathcal{B}''} Q_\beta$$

und $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = \emptyset$.

Wegen (EX1) ist $G \subset M$ (s. T.34.5) und somit $(G \wedge N) = (G \wedge Q)$. Für alle $A \in \mathcal{A}_e$ gilt daher:

$$(*) \quad \mu_e(A) = \mu_e(A \wedge Q)$$

Es folgt nun:

$$\mu_e(A \vee B) = \mu_e((A \wedge Q) \vee (B \wedge Q)) \quad (\text{mit } (*))$$

$$= \mu_e(\exists_{\beta \in \mathcal{B}'} Q_\beta \vee \exists_{\beta \in \mathcal{B}''} Q_\beta)$$

$$= \mu_e(\exists_{\beta \in \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''} Q_\beta)$$

$$= \mu_e(\exists_{\beta \in \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''} N_\beta) \quad (\text{mit } (*))$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''} p_\beta \quad (\text{T.34.17})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{B}''} p_\beta$$

Ganz analog ist

$$\mu_e(A) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_\beta$$

und

$$\mu_e(B) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}''} p_\beta$$

Daraus folgt

$$\mu_e(A \vee B) = \mu_e(A) + \mu_e(B)$$

und somit die Additivität von μ_e .

QED

Für das Folgende seien

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$W_1 := LL^*$$

$$W := W_1 / \text{tr } W_1$$

sowie

$$W' := \{ \sigma : J \rightarrow \{0,1,\emptyset\} \mid \forall_j \in J [\sigma(j) \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{i < j} \sigma(i) = 1] \}$$

$$\pi_\sigma := \pi_{A_n; \sigma(n)} \dots \pi_{A_1; \sigma(1)} \quad (\text{für alle } \sigma \in W')$$

$$M_\sigma := \bigcap_{k \in J} A_{k; \sigma(k)} \quad (\text{für alle } \sigma \in W')$$

Theorem T.34.20 Für alle $\sigma \in W'$ gilt die Gleichung

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = \pi_\sigma \pi_{UR}$$

Beweis: Die Beweise von L.29.2 und T.29.3 lassen sich für den Fall $\sigma \in W'$ wörtlich wiederholen. **QED**

Theorem T.34.21 Es sei g_1, \dots, g_m eine beliebige Folge, die aus verschiedenen Elementen von $K^n = \{q+1, \dots, n\}$ besteht. Ferner sei

$$\tau : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

bijektiv, also eine Permutation der Menge $\{1, \dots, m\}$. Dazu seien für alle $i \in \{1, \dots, m\}$

$$h_i := g_{\tau(i)}$$

$$G_i := A_{g_i}$$

$$H_i := A_{h_i}$$

Dann gilt die Gleichung

$$\pi_{G_m} \dots \pi_{G_1} L = \pi_{H_m} \dots \pi_{H_1} L$$

Bemerkung: Das Theorem besagt: Wenn G_1, \dots, G_m eine beliebige Teilfolge der A_{q+1}, \dots, A_n ist (ohne Wiederholungen), so kann man in dem Ausdruck

$$\pi_{G_m} \dots \pi_{G_1} \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

die Reihenfolge der G_i beliebig ändern.

Beweis: Nach L.32.3 kann man zunächst alle interessierenden Ereignisse (E_k, t_k) , die in der Folge $(E_{g_1}, t_{g_1}), \dots, (E_{g_m}, t_{g_m})$ nicht vorkommen, weglassen, d.h. man kann o.B.d.A. annehmen, dass $n = q + m$ ist, und $\{g_1, \dots, g_m\}$ mit $\{q+1, \dots, n\}$ übereinstimmt. Außerdem kann man o.B.d.A. annehmen, dass $g_i = q + i$ ist für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. (Man muss die für diesen speziellen Fall bewiesene Aussage dann zweimal anwenden, um die Behauptung des Theorems

für den allgemeinen Fall zu erhalten.) Mit der Standard-Abhängigkeitsrelation wird der gegebene Kontext nach L.33.2 zu einem D-Kontext. Aus der hierfür gemäß L.33.6 geltenden Gleichung $\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$ folgt mit jenem $\sigma \in \mathcal{W}$, welches alle $j \in J$ auf 1 abbildet, die Aussage:

$$\pi_{A_{q+m}} \cdots \pi_{A_{q+1}} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} = \pi[\bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_{k \in K''} A_k] \pi_{UR}$$

Werden in einem D-Kontext, der ausgestattet ist mit der Standard-Abhängigkeitsrelation, die interessierenden Ereignisse permutiert, so erhält man wiederum einen D-Kontext. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der D-Kontexte. Es gilt somit auch:

$$\begin{aligned} \pi_{A_{q+\tau(m)}} \cdots \pi_{A_{q+\tau(1)}} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \\ = \pi[\bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_{k \in K''} A_{\tau(k)}] \pi_{UR} \\ = \pi[\bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_{k \in K''} A_k] \pi_{UR} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. **QED**

Für das Folgende sei $\beta \in \mathcal{B}$ fest gewählt. Hierzu sei σ_0 die Abbildung von J nach $\{0, 1, \emptyset\}$, für welche gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_0(j) &= 1 && \text{für alle } j \in K' \\ \sigma_0(k(r,s)) &= 1 && \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s = \beta(r) \\ \sigma_0(k(r,s)) &= \emptyset && \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s \neq \beta(r) \end{aligned}$$

L.34.5 Es gilt

$$\pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR} = \pi_{\sigma_0} \pi_{UR}$$

Beweis: σ_0 unterscheidet sich von σ_β nur dadurch, dass σ_0 an den Stellen, an denen σ_β den Wert 0 hat, den Wert \emptyset aufweist. Sowohl σ_0 als auch σ_β gehört zu \mathcal{W}' .

Es sei $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ eine Folge von Elementen von \mathcal{W}' , für die gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 \\ \sigma_m &= \sigma_\beta \end{aligned}$$

und für alle $v \in \{1, \dots, m-1\}$ entsteht σ_{v+1} aus σ_v dadurch, dass an einer Stelle der Wert \emptyset durch den Wert 0 ersetzt wird. Es genügt dann zu zeigen:

$$\pi_{\sigma_{v+1}} \pi_{UR} = \pi_{\sigma_v} \pi_{UR} \quad (\text{für alle } v \in \{1, \dots, m-1\})$$

Zu gegebenem v sei k die Stelle, an der sich σ_{v+1} von σ_v unterscheidet. Es ist dann also

$$\sigma_v(k) = \emptyset$$

und

$$\sigma_{v+1}(k) = 0$$

Es sei (r,s) das eindeutig bestimmte Element von D mit
 $k = k(r,s)$

Da für alle r gilt:

$$\sigma_{\beta}(k(r,\beta(r))) = 1$$

und

$$\sigma_o(k(r,\beta(r))) = 1$$

gilt für alle $v \in \{1, \dots, m\}$:

$$\sigma_v(k(r,\beta(r))) = 1$$

und somit $s \neq \beta(r)$.

Es sei $\sigma \in \mathcal{W}'$ definiert durch

$$\sigma(k) := 1$$

und

$$\sigma(j) := \sigma_v(j) \quad (\text{für alle } j \neq k)$$

Wegen

$$\begin{aligned} A_{k;\emptyset} &= \mathcal{H} \\ &= A_k \oplus (A_k)^\perp \\ &= A_{k;1} \oplus A_{k;0} \end{aligned}$$

ist

$$\pi_{A_{k;\emptyset}} - \pi_{A_{k;0}} = \pi_{A_{k;1}}$$

und folglich

$$\pi_{\sigma_v} - \pi_{\sigma_{v+1}} = \pi_\sigma$$

Zu zeigen bleibt nun:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = 0$$

Es sei $s' := \beta(r)$. Dann ist $s \neq s'$ und wegen $\sigma(k(r,s)) = 1$ sowie $\sigma(k(r,s')) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} M_\sigma &= \bigcap_{j \in K'} A_{j;\sigma(j)} \cap \bigcap_{(r,s) \in D} A_{k(r,s);\sigma(k(r,s))} \\ &< \bigcap_{j \in K'} A_j \cap A_{rs} \cap A_{rs'} \end{aligned}$$

Daraus kann man – ebenso wie im Beweis von T.34.14 – mittels (EX1) schließen:

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = 0$$

Mit T.34.20 folgt dann:

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = 0$$

QED

Theorem T.34.22 Aus dem Produkt

$$\pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR} = \pi_{A_n, \sigma_\beta(n)} \cdots \pi_{A_1, \sigma_\beta(1)} \pi_{UR}$$

kann man alle Faktoren $\pi_{A_k, \sigma_\beta(k)}$ mit $k \in K''$ und $\sigma_\beta(k) = 0$ herausstreichen.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus L.34.5.

QED

L.34.6 Es ist

$$\pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} = \pi_{[\bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_r A_{r, \beta(r)}]} \pi_{UR}$$

Beweis: Da σ_β und σ_0 zu \mathcal{W}' gehören, kann man mittels T.34.20 aus L.34.5 schließen:

$$\pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} = \pi_{M_{\sigma_0}} \pi_{UR}$$

Nun ist aber

$$M_{\sigma_0} = \bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_r A_{r, \beta(r)}$$

QED

Es sei

$$\mathcal{W}_1 := \{ \sigma \in \mathcal{W} \mid \forall_{j \in K'} \sigma(j) = 1 \}$$

Theorem T.34.23 Es gilt:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \pi_\sigma = \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1}$$

Beweis: Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über $n \geq q$ bewiesen.

Fall $n = q$

Mit $\sigma_1(j) := 1$ für alle $j \in K'$ ist dann $\mathcal{W}_1 = \{ \sigma_1 \}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \pi_\sigma &= \pi_{\sigma_1} \\ &= \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \end{aligned}$$

QED ($n = q$)

Fall $n > q$ (Induktionsschluss)

Es sei $(\mathcal{W}_1)'$ ebenso wie \mathcal{W}_1 gebildet, aber zu der Indexmenge

$$J' := \{1, \dots, n-1\}$$

anstelle von J . Für alle $\tau \in \{0, 1, \emptyset\}$ und $\sigma' \in (\mathcal{W}_1)'$ bezeichne (σ', τ) jenes $\sigma : J \rightarrow \{0, 1, \emptyset\}$, für das gilt:

$$\sigma|_{J'} = \sigma'$$

und

$$\sigma(n) = \tau$$

Es ist nun

$$\mathcal{W}_1 = \{ (\sigma', \tau) \mid (\sigma' \in (\mathcal{W}_1)') \text{ und } \tau \in \{0,1\} \}$$

Mit $A := A_n$ ist

$$\begin{aligned} \pi_{(\sigma',1)} + \pi_{(\sigma',0)} &= \pi_A \pi_{\sigma'} + \pi_{A^\perp} \pi_{\sigma'} \quad (\text{Def. von } \pi_{\sigma'}) \\ &= \pi_{\sigma'} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \pi_{\sigma} &= \sum_{\sigma' \in (\mathcal{W}_1)'} (\pi_{(\sigma',1)} + \pi_{(\sigma',0)}) \\ &= \sum_{\sigma' \in (\mathcal{W}_1)'} \pi_{\sigma'} \\ &= \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \quad (\text{nach der Induktionsannahme}) \quad \mathbf{QED} \quad (n > q) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.34.24 Es ist

$$\pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR} = \pi_{\bigcap_{j \in K'} A_j} \pi_{UR}$$

Beweis: Gemäß L.32.3 kann man alle interessierenden Ereignisse des Kontextes weglassen und somit $n := q$ setzen.

Nach T.29.3 gilt hierfür

$$\pi_{\sigma} \pi_{UR} = \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR}$$

Indem man $\sigma(j) := 1$ setzt für alle $j \in \{1, \dots, q\}$, erhält man die Aussage des Theorems. **QED**

L.34.7 Für alle $\sigma \in \mathcal{W}_1$ mit

$$\sigma \notin \{ \sigma_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{B} \}$$

gilt:

$$\pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR} = 0$$

Beweis: Wegen T.34.14 muss die Behauptung nur noch bewiesen werden für $\sigma \in \mathcal{W}_1$ mit $\sigma \notin \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$.

Wegen $\sigma \in \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}$ muss für alle $k \in K$ gelten: $\sigma(k) \in \{0,1\}$.

Wegen $\sigma \notin \mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ und der Definition der \mathcal{W}_{β} gibt es ein r mit

$$\sigma(k(r,s)) = 0 \quad (\text{für alle } s)$$

Für dieses r ist

$$M_{\sigma} < \bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_s (A_{rs})^{\perp}$$

Wegen (EX2) ist

$$G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle = \emptyset$$

$$\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle = \emptyset$$

Nach T.23.8 gibt es dazu vertauschbare D , D_j und $D_{rs} < \mathcal{H}$ mit

$$UR < D$$

$$A_j < D_j \quad (\text{für } j \in K')$$

$$(A_{rs})^\perp < D_{rs} \quad (\text{für alle } s)$$

sowie

$$D \cap \bigcap_j D_j \cap \bigcap_s D_{rs} = 0$$

Es folgt

$$\bigcap_j D_j \cap \bigcap_s D_{rs} < D^\perp$$

$$M_\sigma < \bigcap_{j \in K'} A_j \cap \bigcap_s (A_{rs})^\perp$$

$$< \bigcap_{j \in K'} D_j \cap \bigcap_s D_{rs}$$

$$< D^\perp$$

$$< UR^\perp$$

Daraus folgt

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = 0$$

QED

Theorem T.34.25 Es gilt

$$\bar{q} = \text{tr } W_1$$

Beweis: Es ist

$$\bar{q} = \sum_\beta q_\beta$$

$$= \sum_\beta \text{tr } \pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} \quad (\text{Def. von } q_\beta)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \text{tr } \pi_{M_\sigma} \pi_{UR} \quad (\text{mit L.34.7, da alle } \sigma_\beta \in \mathcal{W}_1)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \text{tr } \pi_\sigma \pi_{UR} \quad (\text{T.34.20})$$

$$= \text{tr } \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{W}_1} \pi_\sigma \right) \pi_{UR}$$

$$= \text{tr } \pi_{A_q} \cdot \pi_{A_1} \pi_{UR} \quad (\text{T.34.23})$$

$$= \text{tr } \pi_{\bigcap_{j \in K'} A_j} \pi_{UR} \quad (\text{T.34.24})$$

$$= \text{tr } \pi_{\bigcap_{j \in K'} A_j} \pi_{UR} \pi_{UR} \pi_{\bigcap_{j \in K'} A_j}$$

$$= \text{tr } \pi_{A_q} \cdot \pi_{A_1} \pi_{UR} \pi_{UR} \pi_{A_1} \cdot \pi_{A_q} \quad (\text{mit T.34.24})$$

$$= \text{tr } L L^* \quad (\text{Def. von } L)$$

$$= \text{tr } W_1 \quad (\text{Def. von } W_1)$$

QED

Theorem T.34.26 Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}$ gelten:

$$(a) p_\beta = \text{tr } \pi_{A_{1,\beta(1)}} \cdots \pi_{A_{R,\beta(R)}} \overset{W}{\pi_{A_{R,\beta(R)}} \cdots \pi_{A_{1,\beta(1)}}}$$

$$(b) p_\beta = \text{tr } \pi_{\bigcap_r A_{r,\beta(r)}} \overset{W}{}$$

Beweis: Es sei $\beta \in \mathcal{B}$ fest gewählt. Mit dem früher definierten σ_0 entspricht die erste Behauptung (wegen T.34.21) der Aussage

$$(*) p_\beta = \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} (\pi_{\sigma_0})^* / \text{tr } W_1$$

Wegen $\bar{q} = \text{tr } W_1$ (T.34.25) genügt es zu zeigen:

$$q_\beta = \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} (\pi_{\sigma_0})^*$$

Es ist

$$\begin{aligned} q_\beta &= \text{tr } \pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} \\ &= \text{tr } \pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR} \end{aligned} \quad (\text{T.34.20})$$

$$= \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} \quad (\text{L.34.5})$$

$$= \text{tr } \pi_{M_{\sigma_0}} \pi_{UR} \quad (\text{T.34.20})$$

$$= \text{tr } \pi_{M_{\sigma_0}} \pi_{UR} \pi_{UR} \pi_{M_{\sigma_0}}$$

$$= \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} \pi_{UR} (\pi_{\sigma_0})^* \quad (\text{mit T.34.20})$$

$$= \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} (\pi_{\sigma_0})^* \quad \text{QED (a)}$$

Zu (b): Es sei

$$A := \bigcap_r A_{r,\beta(r)}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} &= \pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR} \end{aligned} \quad (\text{L.34.5})$$

$$= \pi_{M_{\sigma_\beta}} \pi_{UR} \quad (\text{T.34.20})$$

$$= \pi_{[A \cap \bigcap_{j \in K} A_j]} \pi_{UR} \quad (\text{L.34.6})$$

$$= \pi_A \pi_{[A \cap \bigcap_{j \in K} A_j]} \pi_{UR}$$

$$= \pi_A \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} \quad (\text{wie soeben gezeigt})$$

$$= \pi_A \pi_{A_{1,\beta(1)}} \cdots \pi_{A_{R,\beta(R)}} L \quad (\text{mit T.34.21})$$

$$= \pi_A L \quad (\text{da für alle } r \text{ gilt: } A < A_{r,\beta(r)})$$

Nun folgt mit (*):

$$\begin{aligned} p_\beta &= \text{tr } \pi_{\sigma_0} \pi_{UR} (\pi_{\sigma_0})^* / \text{tr } W_1 \\ &= \text{tr } \pi_A L L^* \pi_A / \text{tr } W_1 \\ &= \text{tr } \pi_A W \\ &= \text{tr } \pi_{\cap_r A_r, \beta(r)} W \end{aligned}$$

QED (b)

QED

B35. Zur Endlichkeit der Initialeigenschaft

Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 34 ("Makroskopische Experimente") seien $\langle A_1 \rangle, \dots, \langle A_q \rangle$ die Voraussetzungen eines Experiments. Dazu seien:

$$K' := \{1, \dots, q\}$$

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$A := \bigcap_{j \in K'} A_j$$

sowie

$$W_1 := LL^*$$

Theorem T.35.1 Wenn $\text{tr } W_1 = 0$ ist, so folgt:

$$\neg \hat{\Delta}(\langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle)$$

Beweis: Da im Beweis zu T.34.24 nur die Aussagen L.32.3 und T.29.3 verwendet werden, gilt T.34.24 für beliebiges UR, also insbesondere auch für den Fall $\dim UR = \infty$. Damit erhält man die Gleichung:

$$L = \pi_A \pi_{UR}$$

Aus $\text{tr } W_1 = 0$ folgt somit:

$$\text{tr } LL^* = 0$$

$$L = 0 \quad (\text{mit D.23.3 und L.23.5})$$

$$UR < A^\perp$$

Aufgrund der Schachtelungseigenschaft gibt es vertauschbare Unterräume B_j , C_j und M^\wedge mit

$$B_j < A_j < C_j \quad (\text{für alle } j \in K')$$

$$UR < M^\wedge$$

Dazu seien:

$$B := \bigcap_{j \in K'} B_j$$

$$C := \bigcap_{j \in K'} C_j$$

Es folgt:

$$B < A$$

$$A^\perp < B^\perp$$

$$UR < B^\perp \cap M^\wedge$$

$$= (B \oplus (M^\wedge)^\perp)^\perp$$

Wendet man T.29.9 an auf den Fall, dass (gemäß L.32.3) alle interessierenden Ereignisse weggelassen wurden und $\sigma(j) := 1$ ist für alle $j \in K'$, so erhält man:

$$\bigcap_{j \in K'} C_j < \bigcap_{j \in K'} B_j \oplus (M^\wedge)^\perp$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen ergibt dies:

$$C < B \oplus (M^\wedge)^\perp \\ (B \oplus (M^\wedge)^\perp)^\perp < C^\perp$$

und somit

$$UR < C^\perp$$

Da die C_j sowie C^\perp vertauschbar sind und

$$\bigcap_{j \in K} C_j \cap C^\perp = \emptyset$$

ist, folgt mit SEC

$$\bigvee_{j \in K} \langle C_j \rangle \wedge \langle C^\perp \rangle = \emptyset$$

Mit MON erhält man daraus

$$\bigvee_{j \in K} \langle A_j \rangle \wedge \langle UR \rangle = \emptyset$$

und somit

$$\neg \hat{\Delta}(\langle UR \rangle \wedge \bigvee_{j \in K} \langle A_j \rangle)$$

QED

Theorem T.35.2 Für $k \in \mathbb{Z}$ seien:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &:= e^{2\pi i \cdot kx/2C} / (2C)^{1/2} && (\text{für } x \in [-C, C]) \\ \varphi_k(x) &:= 0 && (\text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [-C, C]) \\ p_k &:= k \cdot 2\pi \hbar / 2C \end{aligned}$$

Ferner sei

$$P := -i\hbar(\partial/\partial x)$$

der Impulsoperator. Dann ist für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$P \varphi_k = p_k \varphi_k$$

d.h. φ_k ist Eigenvektor von P zum Eigenwert p_k .

Beweis: Es ist (für $x \in [-C, C]$)

$$\begin{aligned} (P \varphi_k)(x) &= -i\hbar(\partial/\partial x) e^{2\pi i \cdot kx/2C} / (2C)^{1/2} \\ &= -i\hbar \cdot 2\pi i k / 2C e^{2\pi i \cdot kx/2C} / (2C)^{1/2} \\ &= k \cdot 2\pi \hbar / 2C \varphi_k(x) \\ &= p_k \varphi_k(x) \end{aligned}$$

QED

Bemerkung: $\partial/\partial x$ muss an den Randpunkten $-C$ und C als rechts- bzw. linksseitige Ableitung verstanden werden.

Bemerkung: Wenn C groß ist, ist das Raster der p_k sehr fein und φ_k stellt den Impuls p_k mit hoher Genauigkeit dar.

B36. Das additive Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem Experiment

Wir betrachten ein makroskopisches Experiment, das innerhalb eines makroskopischen Kontextes stattfindet. Dazu sei

$$(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$$

eine t -zugängliche Folge von Ereignissen mit der Abhängigkeitsrelation « sowie

$$K' := \{1, \dots, q\} \quad (\text{Voraussetzungen des Experiments})$$

$$K'' := \{q+1, \dots, n\} \quad (\text{mögliche Ergebnisse})$$

mit

$$\forall_{k \in K''} \forall_{j \ll k} j \in K'$$

Zu $r \in \{1, \dots, R\}$ sei $S_r \in \mathbb{N}$ und hierzu

$$D := \{ (r, s) \mid r \in \{1, \dots, R\} \wedge s \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

sowie k eine Bijektion von D nach K'' . Es seien:

$$J := \{1, \dots, n\}$$

$$A_j := \bigcup_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in J)$$

$$E_{rs} := E_{k(r,s)} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

$$t_{rs} := t_{k(r,s)} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

$$A_{rs} := \bigcup_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Wir definieren

$$G := \langle UR \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

und gehen aus von den Annahmen:

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \hat{\Delta} (G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \hat{\Delta} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

Zu festem $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ bilden wir den Hilbertraum des \mathbf{N} -Multiversums:

$$\mathcal{H}^{\mathbf{N}} := \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \quad (\text{mit } \mathbf{N} \text{ Faktoren})$$

Zu Operatoren L_m auf \mathcal{H} definieren wir das Tensorprodukt mittels:

$$(L_1 \otimes \dots \otimes L_{\mathbf{N}})(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{\mathbf{N}}) := L_1 \varphi_1 \otimes \dots \otimes L_{\mathbf{N}} \varphi_{\mathbf{N}}$$

Zu $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ sowie $A < \mathcal{H}$ und einem Operator L auf \mathcal{H} seien außerdem:

$$\alpha_m(A) := \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes A \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$$

$$\alpha_m(L) := I \otimes \dots \otimes I \otimes L \otimes I \otimes \dots \otimes I$$

Die Faktoren A bzw. L stehen hier jeweils an der m -ten Stelle, und I bezeichnet den Einheitsoperator auf \mathcal{H} .

Wir formulieren nun einige Aussagen, deren Beweise entweder trivial sind oder sich aufgrund bekannter Eigenschaften des Tensorprodukts leicht führen lassen. Dabei seien:

$$m, m' \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \text{ und } j \in \mathbb{N}$$

A, B bzw. A_m Unterräume von \mathcal{H}

L, M, L_m, M_m, L_j bzw. L_{mj} Operatoren auf \mathcal{H}

$$\underline{\text{L.36.1}} \quad \alpha_m(A^\perp) = [\alpha_m(A)]^\perp$$

$$\underline{\text{L.36.2}} \quad \alpha_m(A) = \alpha_m(B) \Rightarrow A = B$$

$$\underline{\text{L.36.3}} \quad \alpha_m(A \cap B) = \alpha_m(A) \cap \alpha_m(B)$$

$$\underline{\text{L.36.4}} \quad A \text{ und } B \text{ vertauschbar} \Rightarrow \alpha_m(A) \text{ und } \alpha_m(B) \text{ vertauschbar}$$

$$\underline{\text{L.36.5}} \quad \prod_m \alpha_m(A_m) = \otimes_m A_m$$

$$\underline{\text{L.36.6}} \quad \alpha_m(L + M) = \alpha_m(L) + \alpha_m(M)$$

$$\underline{\text{L.36.7}} \quad \alpha_m(c L) = c \alpha_m(L) \quad (\text{für } c \in \mathbb{C})$$

$$\underline{\text{L.36.8}} \quad \alpha_m(L M) = \alpha_m(L) \alpha_m(M)$$

$$\underline{\text{L.36.9}} \quad \alpha_m(L^j) = [\alpha_m(L)]^j$$

$$\underline{\text{L.36.10}} \quad \alpha_m(\pi_A) = \pi_{\alpha_m(A)}$$

$$\underline{\text{L.36.11}} \quad m \neq m' \Rightarrow \alpha_m(L) \text{ und } \alpha_{m'}(M) \text{ sind vertauschbar}$$

$$\underline{\text{L.36.12}} \quad m \neq m' \Rightarrow \alpha_m(A) \text{ und } \alpha_{m'}(B) \text{ sind vertauschbar}$$

$$\underline{\text{L.36.13}} \quad \alpha_m(\prod_j L_j) = \prod_j \alpha_m(L_j) \quad (\text{Bei dieser Produktbildung kommt es auf die Reihenfolge der Operatoren an.})$$

$$\underline{\text{L.36.14}} \quad \prod_m \alpha_m(L_m) = \otimes_m L_m$$

$$\underline{\text{L.36.15}} \quad \otimes_m (L_m M_m) = (\otimes_m L_m) (\otimes_m M_m)$$

$$\underline{\text{L.36.16}} \quad \otimes_m (L_m (L_m)^*) = (\otimes_m L_m) (\otimes_m L_m)^*$$

$$\underline{\text{L.36.17}} \quad \prod_j \prod_m \alpha_m(L_{mj}) = \prod_m \prod_j \alpha_m(L_{mj}) \quad (\text{dies folgt aus den Aussagen L.36.13, L.36.14 und L.36.15})$$

$$\underline{\text{L.36.18}} \quad \prod_m \alpha_m(L_m) \cdot \prod_m \alpha_m(M_m) = \prod_m [\alpha_m(L_m) \cdot \alpha_m(M_m)]$$

$$\underline{\text{L.36.19}} \quad \text{tr}(\otimes_m L_m) = \prod_m \text{tr } L_m$$

Es seien nun:

$$H_m := \alpha_m(H)$$

$$U_{m,t} := e^{-itH_m/\hbar}$$

$$H^{\mathbf{N}} := \sum_m H_m$$

$$U_t^{\mathbf{N}} := U_t \otimes \dots \otimes U_t \quad (\text{mit } \mathbf{N} \text{ Faktoren})$$

$$UR^{\mathbf{N}} := UR \otimes \dots \otimes UR \quad (\text{mit } \mathbf{N} \text{ Faktoren})$$

Theorem T.36.1 Es gilt:

$$U_t^{\mathbf{N}} = e^{-itH^{\mathbf{N}}/\hbar}$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned} U_{m,t} &= e^{-itH_m/\hbar} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (-it/\hbar)^j/j! (H_m)^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (-it/\hbar)^j/j! (\alpha_m(H))^j \\ &= \alpha_m\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} (-it/\hbar)^j/j! H^j\right) \quad (\text{mit L.36.6, L.36.7 und L.36.9}) \\ &= \alpha_m(e^{-itH/\hbar}) \\ &= \alpha_m(U_t) \end{aligned}$$

Aufgrund von L.36.11 sind die H_m paarweise miteinander vertauschbar. Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ lässt sich mit der Reihenentwicklung beweisen, dass gilt:

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

Auf demselben Wege erhält man für vertauschbare Operatoren L und M :

$$e^{L+M} = e^L e^M$$

Damit ist nun:

$$\begin{aligned} e^{-itH^{\mathbf{N}}/\hbar} &= e^{-it\sum_m H_m/\hbar} \\ &= \prod_m e^{-itH_m/\hbar} \\ &= \prod_m U_{m,t} \\ &= \prod_m \alpha_m(U_t) \quad (\text{siehe oben}) \\ &= \otimes_m U_t \quad (\text{mit L.36.14}) \\ &= U_t^{\mathbf{N}} \quad (\text{Definition von } U_t^{\mathbf{N}}) \end{aligned}$$

QED

Wir definieren:

$$\begin{aligned} E_{m,j} &:= \alpha_m(E_j) \quad (\text{für } j \in J) \\ E_{m,rs} &:= \alpha_m(E_{rs}) \quad (\text{für } (r,s) \in D) \\ A_{m,j} &:= \alpha_m(A_j) \quad (\text{für } j \in J) \\ A_{m,rs} &:= \alpha_m(A_{rs}) \quad (\text{für } (r,s) \in D) \end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{U}^{\mathbf{N}} := \{ A \mid A < \mathcal{H}^{\mathbf{N}} \}$$

Zu $\mathcal{H}^{\mathbf{N}}$ und $U_t^{\mathbf{N}}$ werden die Begriffe $\mathcal{E}^{\mathbf{N}}$, $\Omega_0^{\mathbf{N}}$, $\langle A, t \rangle_0^{\mathbf{N}}$, $A_0^{\mathbf{N}}$, $AX^{\mathbf{N}}$, $\Omega^{\mathbf{N}}$, $\langle A, t \rangle^{\mathbf{N}}$, $A^{\mathbf{N}}$ und $\mu^{\mathbf{N}}$ für das \mathbf{N} -Multiversum analog zu den entsprechenden Begriffen für das reale Universum definiert. Die makroskopischen Eigenschaften des \mathbf{N} -Multiversums sind durch

$$S^{\mathbf{N}} := \{ \alpha_m(S) \mid m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \wedge S \in \mathcal{S} \}$$

gegeben.

Die Abhängigkeitsrelation « auf der Indexmenge

$$J^{\mathbf{N}} := \{(1.1), \dots, (\mathbf{N}.1), \dots, (1.n), \dots, (\mathbf{N}.n)\}$$

wird definiert mittels

$$(x.j) \ll (y.k) : \Leftrightarrow (x = y) \wedge (j \ll k)$$

für $x, y \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ und $j, k \in J$. Außerdem seien

$$(K')^{\mathbf{N}} := \{(1.1), \dots, (\mathbf{N}.1), \dots, (1.q), \dots, (\mathbf{N}.q)\}$$

$$(K'')^{\mathbf{N}} := \{(1.q+1), \dots, (\mathbf{N}.q+1), \dots, (1.n), \dots, (\mathbf{N}.n)\}$$

L.36.20 Bei der Definition der t-Zugänglichkeit kann man in der Bedingung (ii) die Einschränkung

$$j \in J \setminus J_k \setminus \{k\}$$

weglassen, da sich die Aussage (ii) für den Fall

$$j \in J_k \cup \{k\}$$

unmittelbar aus den Bedingungen (i) und (iii) ergibt.

L.36.21 Seien $A, B < \mathcal{H}$ sowie $x, y \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ mit $x \neq y$. Dann ist $\pi_{\alpha_x(A)}$ mit $\pi_{\alpha_y(B)}$ vertauschbar.

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus L.36.12.

QED

L.36.22 Es ist

$$\pi_{UR^{\mathbf{N}}} = \prod_m \pi_{\alpha_m(UR)}$$

Beweis: Wegen L.36.12 sind die $\alpha_m(UR)$ paarweise vertauschbar. Daher ist

$$\begin{aligned} \prod_m \pi_{\alpha_m(UR)} &= \pi_{\cap_m \alpha_m(UR)} \\ &= \pi_{\otimes_m UR} \quad (\text{nach L.36.5}) \\ &= \pi_{UR^{\mathbf{N}}} \quad (\text{Definition von } UR^{\mathbf{N}}) \end{aligned}$$

QED

Theorem T.36.2 Die Ereignisfolge

$$(E_{1.1}, t_1), \dots, (E_{\mathbf{N}.1}, t_1), \dots, (E_{1.n}, t_n), \dots, (E_{\mathbf{N}.n}, t_n)$$

stellt mit der Relation « und den Teilbereichen $(K')^{\mathbf{N}}$ und $(K'')^{\mathbf{N}}$ einen makroskopischen Kontext dar.

Beweis: Aufgrund der Konstruktion stellt $(K')^{\mathbf{N}}$ den vorderen und $(K'')^{\mathbf{N}}$ den hinteren Teil des Indexbereichs der betrachteten Ereignisfolge dar. Für $(x.j) \ll (y.k)$ folgt aufgrund der Definition $j \ll k$ und hieraus $j \in K'$ sowie $(x.j) \in (K')^{\mathbf{N}}$. Zu zeigen bleibt nur die t-Zugänglichkeit der in T.36.2 angegebenen Ereignisfolge.

Da die Folge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ als t -zugänglich vorausgesetzt wurde, gibt es $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}$, so dass für jedes $k \in J$ und für jede Folge B_1, \dots, B_n aus Unterräumen von \mathcal{H} , welche die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt, die Dokumentbeziehung (DB) gilt. Zu diesen F_j sei $D_j := U_{-t} F_j$ (für $j \in J$) sowie

$$\begin{aligned} F_{m,j} &:= \alpha_m(F_j) && (\text{für } m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \text{ und } j \in J) \\ D_{m,j} &:= \alpha_m(D_j) && (\text{für } m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \text{ und } j \in J) \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann für alle $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ und $j \in J$

$$F_{m,j} \in \mathcal{S}^{\mathbf{N}}$$

d.h. $(F_{m,j}, t)$ ist als Dokument für $(E_{m,j}, t)$ geeignet. Für alle m und j gilt:

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \alpha_m(A_j) \\ &= \alpha_m(U_{-t_j} E_j) \\ &= \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes (U_{-t_j} E_j) \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \\ &= U_{-t_j} \mathcal{H} \otimes \dots \otimes U_{-t_j} \mathcal{H} \otimes U_{-t_j} E_j \otimes U_{-t_j} \mathcal{H} \otimes \dots \otimes U_{-t_j} \mathcal{H} \\ &= (U_{-t_j} \otimes \dots \otimes U_{-t_j}) (\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes E_j \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}) \\ &= U_{-t_j}^{\mathbf{N}} \alpha_m(E_j) \\ &= U_{-t_j}^{\mathbf{N}} E_{m,j} \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man zeigen:

$$D_{m,j} = U_{-t}^{\mathbf{N}} F_{m,j}$$

Es sei nun ein Index $(y,k) \in J^{\mathbf{N}}$ fest gegeben. Ferner sei

$$B_{1,1}, \dots, B_{\mathbf{N},1}, \dots, B_{1,n}, \dots, B_{\mathbf{N},n}$$

eine Folge von Unterräumen von $\mathcal{H}^{\mathbf{N}}$, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

- (i)^N $B_{x,j} = A_{x,j}$ für alle $(x,j) \in J^{\mathbf{N}}$ mit $(x,j) \ll (y,k)$
- (ii)^N $B_{x,j} \in \{A_{x,j}, D_{x,j}, \mathcal{H}^{\mathbf{N}}\}$ für alle $(x,j) \in J^{\mathbf{N}}$
- (iii)^N $B_{y,k} = \mathcal{H}^{\mathbf{N}}$

Zu beweisen ist die Dokumentbeziehung

$$\begin{aligned} (\text{DB}^{\mathbf{N}}) \quad &\pi_{A_{y,k}} \pi_{B_{\mathbf{N},n}} \dots \pi_{B_{1,n}} \dots \pi_{B_{\mathbf{N},1}} \dots \pi_{B_{1,1}} \pi_{U_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}} \\ &= \pi_{D_{y,k}} \pi_{B_{\mathbf{N},n}} \dots \pi_{B_{1,n}} \dots \pi_{B_{\mathbf{N},1}} \dots \pi_{B_{1,1}} \pi_{U_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}^{\mathbf{N}} = \alpha_x(\mathcal{H})$ ist für jedes $x \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$, folgt aus (ii)^N:

$$B_{x,j} \in \{\alpha_x(A_j), \alpha_x(D_j), \alpha_x(\mathcal{H})\} \quad \text{für alle } (x,j) \in J^{\mathbf{N}}$$

Zu jedem $(x,j) \in J^{\mathbf{N}}$ sei somit

$$B_j(x) \in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\}$$

mit

$$B_{x,j} = \alpha_x(B_j(x))$$

Speziell sei

$$B_j := B_j(y) \quad (\text{für alle } j \in J)$$

so dass stets gilt:

$$B_{y,j} = \alpha_y(B_j)$$

Wir wollen nun die folgende Dokumentbeziehung beweisen:

$$(DB) \quad \pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Aufgrund der vorausgesetzten t-Zugänglichkeit der Ereignisfolge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ genügt es dazu zu zeigen, dass die Bedingungen (i) bis (iii) für die Folge B_1, \dots, B_n erfüllt sind.

Zu (i): Es sei $j \ll k$. Dann ist (aufgrund der Definition von \ll für das \mathbf{N} -Multiversum) auch $(y, j) \ll (y, k)$. Aus (i)^N folgt:

$$\begin{aligned} B_{y,j} &= A_{y,j} \\ \alpha_y(B_j) &= \alpha_y(A_j) \\ B_j &= A_j \quad (\text{mit L.36.2}) \end{aligned} \qquad \text{QED (i)}$$

Zu (ii): Aus (ii)^N folgt:

$$\begin{aligned} B_{y,j} &\in \{A_{y,j}, D_{y,j}, \mathcal{H}^{\mathbf{N}}\} \\ \alpha_y(B_j) &\in \{\alpha_y(A_j), \alpha_y(D_j), \alpha_y(\mathcal{H})\} \\ B_j &\in \{A_j, D_j, \mathcal{H}\} \quad (\text{mit L.36.2}) \end{aligned} \qquad \text{QED (ii)}$$

Zu (iii): Aus (iii)^N folgt:

$$\begin{aligned} B_{y,k} &= \mathcal{H}^{\mathbf{N}} \\ \alpha_y(B_k) &= \alpha_y(\mathcal{H}) \\ B_k &= \mathcal{H} \quad (\text{mit L.36.2}) \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} \text{QED (iii)} \\ \text{QED (DB)} \end{array}$$

Aus (DB) folgt nun:

$$\begin{aligned} &\pi_{A_{y,k}} \pi_{B_{y,n}} \cdots \pi_{B_{y,1}} \pi_{\alpha_y(UR)} \\ &= \pi_{\alpha_y(A_k)} \pi_{\alpha_y(B_n)} \cdots \pi_{\alpha_y(B_1)} \pi_{\alpha_y(UR)} \\ &= \alpha_y(\pi_{A_k}) \alpha_y(\pi_{B_n}) \cdots \alpha_y(\pi_{B_1}) \alpha_y(\pi_{UR}) \quad (\text{mit L.36.10}) \\ &= \alpha_y(\pi_{A_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}) \quad (\text{mit L.36.8}) \\ &= \alpha_y(\pi_{D_k} \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}) \quad (\text{wegen(DB)}) \\ &= \alpha_y(\pi_{D_k}) \alpha_y(\pi_{B_n}) \cdots \alpha_y(\pi_{B_1}) \alpha_y(\pi_{UR}) \quad (\text{mit L.36.8}) \\ &= \pi_{\alpha_y(D_k)} \pi_{\alpha_y(B_n)} \cdots \pi_{\alpha_y(B_1)} \pi_{\alpha_y(UR)} \quad (\text{mit L.36.10}) \\ &= \pi_{D_{y,k}} \pi_{B_{y,n}} \cdots \pi_{B_{y,1}} \pi_{\alpha_y(UR)} \end{aligned}$$

und somit die Gleichung

$$(DB_y) \pi_{A_{y,k}} \pi_{B_{y,n}} \cdots \pi_{B_{y,1}} \pi_{\alpha_y(\text{UR})} = \pi_{D_{y,k}} \pi_{B_{y,n}} \cdots \pi_{B_{y,1}} \pi_{\alpha_y(\text{UR})}$$

Die zu beweisende Gleichung (DB^N) erhält man aus (DB_y), indem man die fehlenden Faktoren in der richtigen Reihenfolge auf beiden Seiten der Gleichung (DB_y) vor den dort stehenden Term schreibt und dann mittels L.36.21 einzeln nach hinten verschiebt. Jeder dieser Faktoren hat entweder die Form

$$\pi_{B_{x,j}} \text{ mit } B_{x,j} = \alpha_x(B_j(x)) \text{ und } x \neq y$$

oder (aufgrund von L.36.22) die Form

$$\pi_{\alpha_x(\text{UR})} \text{ mit } x \neq y$$

also allgemein die Form $\pi_{\alpha_x(G)}$ mit $G < \mathcal{H}$ und $x \neq y$, so dass L.36.21 anwendbar ist. **QED**

Wir erinnern an die Definitionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \{ \beta : \{1, \dots, R\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_r \beta(r) \in \{1, \dots, S_r\} \} \\ G &:= \langle \text{UR} \rangle \wedge \bigwedge_{j \in K'} \langle A_j \rangle \\ N &:= \bigwedge_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle \\ M &:= \bigwedge_r \bigwedge_{s \neq s'} \neg(\langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle) \\ Q &:= N \wedge M \\ N_\beta &:= \bigwedge_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle && \text{(für } \beta \in \mathcal{B} \text{)} \\ Q_\beta &:= N_\beta \wedge M && \text{(für } \beta \in \mathcal{B} \text{)} \\ \mathcal{A}_e &:= \mathcal{A}(\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r,s) \in D \}) \\ \mu_e(A) &:= \mu(A \mid G \wedge N) && \text{(für alle } A \in \mathcal{A}_e \text{)} \end{aligned}$$

In Analogie hierzu definieren wir für jedes $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$:

$$\begin{aligned} G_m &:= \langle \text{UR}^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigwedge_{j \in K'} \langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}} \\ N_m &:= \bigwedge_r \exists_s \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \\ M_m &:= \bigwedge_r \bigwedge_{s \neq s'} \neg(\langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}}) \\ Q_m &:= N_m \wedge M_m \\ N_{m,\beta} &:= \bigwedge_r \langle A_{m,r,\beta(r)} \rangle^{\mathbf{N}} && \text{(für } \beta \in \mathcal{B} \text{)} \\ Q_{m,\beta} &:= N_{m,\beta} \wedge M_m && \text{(für } \beta \in \mathcal{B} \text{)} \end{aligned}$$

Zur Darstellung des Gesamtexperiments im **N**-Multiversum sei:

$$D^{\mathbf{N}} := \{ ((m,r),s) \mid m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \wedge (r,s) \in D \}$$

Die Bijektion $k^{\mathbf{N}}$ von $D^{\mathbf{N}}$ nach $(K^{\mathbf{N}})^{\mathbf{N}}$ wird definiert durch:

$$k^{\mathbf{N}}((m,r),s) := m.k(r,s) \quad \text{(für alle } ((m,r),s) \in D^{\mathbf{N}} \text{)}$$

Für das Gesamtexperiment werden entsprechend definiert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^{\mathbf{N}} &:= \{ \beta : \{1, \dots, \mathbf{N}\} \times \{1, \dots, \mathbf{R}\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_m \forall_r \beta(m, r) \in \{1, \dots, S_r\} \} \\
 G^{\mathbf{N}} &:= \langle UR^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_{(m, j) \in (K')^{\mathbf{N}}} \langle A_{m, j} \rangle^{\mathbf{N}} \\
 N^{\mathbf{N}} &:= \bigvee_{(m, r)} \exists_s \langle A_{m, rs} \rangle^{\mathbf{N}} \\
 M^{\mathbf{N}} &:= \bigvee_{(m, r)} \bigvee_{s \neq s'} \neg (\langle A_{m, rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m, rs'} \rangle^{\mathbf{N}}) \\
 Q^{\mathbf{N}} &:= N^{\mathbf{N}} \wedge M^{\mathbf{N}} \\
 N_{\beta}^{\mathbf{N}} &:= \bigvee_{(m, r)} \langle A_{m, r, \beta(m, r)} \rangle^{\mathbf{N}} \\
 Q_{\beta}^{\mathbf{N}} &:= N_{\beta}^{\mathbf{N}} \wedge M^{\mathbf{N}} \\
 A_e^{\mathbf{N}} &:= \mathcal{A}(\{ \langle A_{m, rs} \rangle^{\mathbf{N}} \mid m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \wedge (r, s) \in D \}) \\
 \mu_e^{\mathbf{N}}(A) &:= \mu^{\mathbf{N}}(A \mid G^{\mathbf{N}} \wedge N^{\mathbf{N}}) \quad (\text{für alle } A \in A_e^{\mathbf{N}})
 \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Gleichungen:

L.36.23 $G^{\mathbf{N}} = \bigvee_m G_m$

L.36.24 $N^{\mathbf{N}} = \bigvee_m N_m$

L.36.25 $M^{\mathbf{N}} = \bigvee_m M_m$

L.36.26 $Q^{\mathbf{N}} = \bigvee_m Q_m$

Zu $\beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}}$ sei für alle $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$

$$\beta_m(r) := \beta(m, r) \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, \mathbf{R}\})$$

Dann ist $\beta_m \in \mathcal{B}$ für alle m und es gelten:

L.36.27 $N_{\beta}^{\mathbf{N}} = \bigvee_m N_{m, \beta_m}$

L.36.28 $Q_{\beta}^{\mathbf{N}} = \bigvee_m Q_{m, \beta_m}$

Zum Beweis der Aussagen L.36.23 bis L.36.28: Es ist

$$\begin{aligned}
 G^{\mathbf{N}} &= \langle UR^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_{(m, j) \in (K')^{\mathbf{N}}} \langle A_{m, j} \rangle^{\mathbf{N}} \\
 &= \langle UR^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_m \bigvee_{j \in K'} \langle A_{m, j} \rangle^{\mathbf{N}} \\
 &= \bigvee_m G_m
 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise lassen sich L.36.24, L.36.25 und L.36.27 beweisen. Mit L.36.25 kann unmittelbar von L.36.24 auf L.36.26 und von L.36.27 auf L.36.28 geschlossen werden.

Bemerkung: Aufgrund von L.36.23 und L.36.24 sind die in Kapitel 36 angegebenen Definitionen von $G^{\mathbf{N}}$ und $N^{\mathbf{N}}$ äquivalent zu den hier verwendeten.

L.36.29 Aus (EX1) folgt für alle $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ die Bedingung

$$(EX1)_m \bigvee_r \bigvee_{s \neq s'} [G_m \wedge \langle A_{m, rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m, rs'} \rangle^{\mathbf{N}} = \emptyset]$$

Beweis: Es sei (EX1) gegeben. Ferner sei $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ sowie $r \in \{1, \dots, \mathbf{R}\}$ und $s \neq s'$. Wegen (EX1) ist dann

$$\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle = \emptyset$$

Nach T.23.8 gibt es vertauschbare Unterräume D, D_j, D_{rs} und $D_{rs'}$ von \mathcal{H} mit

$$\text{UR} < D$$

$$A_j < D_j \quad (\text{für } j \in K')$$

$$A_{rs} < D_{rs}$$

$$A_{rs'} < D_{rs'}$$

sowie

$$D \cap \bigcap_{j \in K'} D_j \cap D_{rs} \cap D_{rs'} = \mathbf{o}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{UR}^{\mathbf{N}} &= \otimes_m \text{UR} \\ &< \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes D \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \\ &= \alpha_m(D) \\ &=: D_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \alpha_m(A_j) \\ &< \alpha_m(D_j) \\ &=: D_{m,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m,rs} &= \alpha_m(A_{rs}) \\ &< \alpha_m(D_{rs}) \\ &=: D_{m,rs} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m,rs'} &= \alpha_m(A_{rs'}) \\ &< \alpha_m(D_{rs'}) \\ &=: D_{m,rs'} \end{aligned}$$

Wegen L.36.4 sind auch $D_m, D_{m,j}, D_{m,rs}$ und $D_{m,rs'}$ miteinander vertauschbar und aufgrund von L.36.3 ist

$$D_m \cap \bigcap_{j \in K'} D_{m,j} \cap D_{m,rs} \cap D_{m,rs'} = \mathbf{o}$$

Mit SEC und MON (für das \mathbf{N} -Multiversum) folgt:

$$\begin{aligned} \langle \text{UR}^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}} &= \emptyset \\ G_m \wedge \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}} &= \emptyset \end{aligned}$$

QED

L.36.30 Aus (EX2) folgt für alle $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ die Bedingung

$$(EX2)_m \quad \forall_r [G_m \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} = \emptyset]$$

Beweis: Es sei (EX2) gegeben und $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ sowie $r \in \{1, \dots, \mathbf{R}\}$. Wegen (EX2) ist dann

$$\langle \text{UR} \rangle \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_j \rangle \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle = \emptyset$$

Nach T.23.8 gibt es vertauschbare Unterräume D , D_j und D_{rs} von \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned} \text{UR} &< D \\ A_j &< D_j \quad (\text{für } j \in K') \\ (A_{rs})^\perp &< D_{rs} \quad (\text{für } s \in \{1, \dots, S_r\}) \end{aligned}$$

sowie

$$D \cap \bigcap_{j \in K'} D_j \cap \bigcap_s D_{rs} = 0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{UR}^{\mathbf{N}} &= \otimes_m \text{UR} \\ &< \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \otimes D \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \\ &= \alpha_m(D) \\ &=: D_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \alpha_m(A_j) \\ &< \alpha_m(D_j) \\ &=: D_{m,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_{m,rs})^\perp &= \alpha_m((A_{rs})^\perp) \quad (\text{L.36.1}) \\ &< \alpha_m(D_{rs}) \\ &=: D_{m,rs} \end{aligned}$$

Wegen L.36.4 sind auch D_m , $D_{m,j}$ und $D_{m,rs}$ miteinander vertauschbar und aufgrund von L.36.3 ist

$$D_m \cap \bigcap_{j \in K'} D_{m,j} \cap \bigcap_s D_{m,rs} = 0$$

Mit SEC und MON (für das \mathbf{N} -Multiversum) folgt:

$$\begin{aligned} \langle \text{UR}^{\mathbf{N}} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \forall_{j \in K'} \langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} &= \emptyset \\ G_m \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} &= \emptyset \end{aligned}$$

QED

L.36.31 Aus $\forall_m (\text{EX1})_m$ folgt die Bedingung

$$(\text{EX1})^{\mathbf{N}} \forall_{(m,r)} \forall_{s \neq s'} [G^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}} = \emptyset]$$

Beweis: Es sei

$$(m,r) \in \{1, \dots, \mathbf{N}\} \times \{1, \dots, \mathbf{R}\}$$

sowie $s \neq s'$. Dann ist

$$\begin{aligned} G^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}} \\ &< G_m \wedge \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \langle A_{m,rs'} \rangle^{\mathbf{N}} \quad (\text{mit L.36.23}) \\ &= \emptyset \quad (\text{mit } (\text{EX1})_m) \end{aligned}$$

QED

L.36.32 Aus $\forall_m(\text{EX2})_m$ folgt die Bedingung

$$(\text{EX2})^{\mathbf{N}} \quad \forall_{(m,r)} [G^{\mathbf{N}} \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} = \emptyset]$$

Beweis: Es sei

$$(m,r) \in \{1,\dots,\mathbf{N}\} \times \{1,\dots,\mathbf{R}\}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} G^{\mathbf{N}} \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} &\subset G_m \wedge \forall_s \langle (A_{m,rs})^\perp \rangle^{\mathbf{N}} && \text{(mit L.36.23)} \\ &= \emptyset && \text{(mit } (\text{EX2})_m) \end{aligned}$$

QED

Bemerkung: Wegen L.36.29 bis L.36.32 folgt aus den Bedingungen (EX1) und (EX2), dass die entsprechenden Bedingungen auch für das Gesamtexperiment im \mathbf{N} -Multiversum gelten.

Theorem T.36.3 $\mu_{\mathbf{e}}^{\mathbf{N}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{N}}$.

Beweis: Es liegt hier ein makroskopisches Experiment im \mathbf{N} -Multiversum vor. Die (E_{m,j,t_j}) mit $m \in \{1,\dots,\mathbf{N}\}$ und $j \in J$ bilden den makroskopischen Kontext. Die experimentellen Voraussetzungen werden gebildet von den $\langle A_{m,j} \rangle^{\mathbf{N}}$ mit $m \in \{1,\dots,\mathbf{N}\}$ und $j \leq q$. Die möglichen experimentellen Ergebnisse sind die $\langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}$ mit $m \in \{1,\dots,\mathbf{N}\}$ und $(r,s) \in D$. Die zu diesem Gesamtexperiment gehörenden Bedingungen (EX1) $^{\mathbf{N}}$ und (EX2) $^{\mathbf{N}}$ sind erfüllt. Somit ist T.34.19 hier anwendbar und folglich ist $\mu_{\mathbf{e}}^{\mathbf{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{N}}$.

QED

Wir führen hier eine Schreibweise für Produkte ein, bei denen es – wie z.B. bei der Multiplikation von Matrizen oder der Komposition von Abbildungen – auf die Beachtung der Reihenfolge der Faktoren ankommt. In diesem Sinne steht der Ausdruck

$$\prod_{j=k..1} G_j$$

für das Produkt

$$G_k \cdots G_1$$

Mit dieser Schreibweise seien:

$$L^{\mathbf{N}} := \left(\prod_{j=q..1} \prod_{m=\mathbf{N}..1} \pi_{A_{m,j}} \right) \pi_{UR^{\mathbf{N}}}$$

$$L := \left(\prod_{j=q..1} \pi_{A_j} \right) \pi_{UR}$$

L.36.33 Es gilt:

$$L^{\mathbf{N}} = \otimes_m L$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{UR}^{\mathbf{N}}} &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \pi_{\alpha_m(\mathbf{UR})} \quad (\text{nach L.36.22}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(\pi_{\mathbf{UR}}) \quad (\text{mit L.36.10}) \end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$\begin{aligned} &\prod_{j=q..1} \prod_{m=\mathbf{N}..1} \pi_{A_{m,j}} \\ &= \prod_{j=q..1} \prod_{m=\mathbf{N}..1} \pi_{\alpha_m(A_j)} \quad (\text{Definition von } A_{m,j}) \\ &= \prod_{j=q..1} \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(\pi_{A_j}) \quad (\text{L.36.10}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \prod_{j=q..1} \alpha_m(\pi_{A_j}) \quad (\text{L.36.17}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(\prod_{j=q..1} \pi_{A_j}) \quad (\text{L.36.13}) \end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned} L^{\mathbf{N}} &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(\prod_{j=q..1} \pi_{A_j}) \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(\pi_{\mathbf{UR}}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} [\alpha_m(\prod_{j=q..1} \pi_{A_j}) \alpha_m(\pi_{\mathbf{UR}})] \quad (\text{L.36.18}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m[(\prod_{j=q..1} \pi_{A_j}) \pi_{\mathbf{UR}}] \quad (\text{L.36.8}) \\ &= \prod_{m=\mathbf{N}..1} \alpha_m(L) \quad (\text{Def. von } L) \\ &= \otimes_m L \quad (\text{L.36.14}) \end{aligned}$$

QED

Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}$ seien

$$\begin{aligned} Z_\beta &:= \prod_{r=1..R} \pi_{A_{r,\beta(r)}} L \\ p_\beta &:= \text{tr } Z_\beta (Z_\beta)^* / \text{tr } LL^* \end{aligned}$$

Aufgrund von T.34.17 und T.34.26 sowie der Definition von μ_e ist dann

$$\mu_e(N_\beta) = p_\beta \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B})$$

Diese Aussage kann auch auf das Gesamtexperiment im \mathbf{N} -Multiversum angewendet werden. Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}}$ sei

$$Z_\beta^{\mathbf{N}} := \left[\prod_{r=1..R} \prod_{m=\mathbf{N}..1} \pi_{A_{m,r,\beta(m,r)}} \right] L^{\mathbf{N}}$$

Es gilt dann:

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(N_\beta^{\mathbf{N}}) = \text{tr } Z_\beta^{\mathbf{N}} (Z_\beta^{\mathbf{N}})^* / \text{tr } L^{\mathbf{N}} (L^{\mathbf{N}})^* \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}})$$

Zu $\beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}}$ und $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ sei wie zuvor

$$\beta_m(r) := \beta(m,r) \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\})$$

so dass für alle m gilt:

$$\beta_m \in \mathcal{B}$$

L.36.34 Für alle $\beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}}$ gilt:

$$Z_{\beta}^{\mathbf{N}} = \otimes_m Z_{\beta_m}$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned} Z_{\beta}^{\mathbf{N}} &= \left[\prod_{r=1..R} \prod_m \pi_{A_{m,r}, \beta(m,r)} \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(Def. von } Z_{\beta}^{\mathbf{N}}) \\ &= \left[\prod_{r=1..R} \prod_m \pi_{\alpha_m(A_{r, \beta(m,r)})} \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(Def. von } A_{m,rs}) \\ &= \left[\prod_{r=1..R} \prod_m \pi_{\alpha_m(A_{r, \beta_m(r)})} \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(Def. von } \beta_m) \\ &= \left[\prod_{r=1..R} \prod_m \alpha_m(\pi_{A_{r, \beta_m(r)}}) \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(mit L.36.10)} \\ &= \left[\prod_m \prod_{r=1..R} \alpha_m(\pi_{A_{r, \beta_m(r)}}) \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(mit L.36.17)} \\ &= \left[\prod_m \alpha_m \left(\prod_{r=1..R} \pi_{A_{r, \beta_m(r)}} \right) \right] L^{\mathbf{N}} && \text{(mit L.36.13)} \\ &= \left[\otimes_m \prod_{r=1..R} \pi_{A_{r, \beta_m(r)}} \right] \otimes_m L && \text{(L.36.14, L.36.33)} \\ &= \otimes_m \left[\left(\prod_{r=1..R} \pi_{A_{r, \beta_m(r)}} \right) L \right] && \text{(mit L.36.15)} \\ &= \otimes_m Z_{\beta_m} && \text{(Def. von } Z_{\beta}) \quad \mathbf{QED} \end{aligned}$$

L.36.35 Für alle $\beta \in \mathcal{B}^{\mathbf{N}}$ gilt:

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(N_{\beta}^{\mathbf{N}}) = \prod_m p_{\beta_m}$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned} \mu_e^{\mathbf{N}}(N_{\beta}^{\mathbf{N}}) &= \text{tr } Z_{\beta}^{\mathbf{N}}(Z_{\beta}^{\mathbf{N}})^* / \text{tr } L^{\mathbf{N}}(L^{\mathbf{N}})^* && \text{(siehe oben)} \\ &= \text{tr } (\otimes_m Z_{\beta_m})(\otimes_m Z_{\beta_m})^* / \text{tr } (\otimes_m L)(\otimes_m L)^* && \\ & && \text{(L.36.33, L.36.34)} \\ &= \text{tr } \otimes_m Z_{\beta_m}(Z_{\beta_m})^* / \text{tr } \otimes_m LL^* && \text{(mit L.36.16)} \\ &= \prod_m \text{tr } Z_{\beta_m}(Z_{\beta_m})^* / \prod_m \text{tr } LL^* && \text{(mit L.36.19)} \\ &= \prod_m \left[\text{tr } Z_{\beta_m}(Z_{\beta_m})^* / \text{tr } LL^* \right] \\ &= \prod_m p_{\beta_m} && \text{(Def. von } p_{\beta}) \quad \mathbf{QED} \end{aligned}$$

Zu gegebenem $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ können die Beweise der Theoreme T.34.1 bis T.34.5 nahezu wörtlich übertragen werden auf den Fall, dass überall $\langle A_{rs} \rangle$ durch $\langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}$ ersetzt wird. Auf diese Weise erhalten wir folgende Aussagen:

$$\text{L.36.36 } Q_m = \bigvee_r \bigexists_s \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}$$

$$\text{L.36.37 } N_m = \bigexists_{\beta \in \mathcal{B}} N_{m,\beta}$$

$$\text{L.36.38 } Q_{m,\beta} = \bigvee_r [\langle A_{m,r,\beta(r)} \rangle^{\mathbf{N}} \wedge \bigvee_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{m,rs} \rangle^{\mathbf{N}}] \quad (\text{für } \beta \in \mathcal{B})$$

L.36.39 Die $Q_{m,\beta}$ sind (über β) paarweise disjunkt.

L.36.40 Aus $(EX1)_m$ folgt $G_m \subset M_m$.

Als Korollar zu L.36.37 erhalten wir ferner:

$$\text{L.36.41 } Q_m = \bigexists_{\beta \in \mathcal{B}} Q_{m,\beta}$$

Für das Folgende sei nun ein $A \in \mathcal{A}_e$ fest gegeben, und hierzu sei

$$p := \mu_e(A)$$

Zu jedem $D' \subset D$ definieren wir:

$$AT(D') := \bigvee_{(r,s) \in D'} \langle A_{rs} \rangle \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D'} \neg \langle A_{rs} \rangle$$

Die nicht leeren $AT(D')$ sind die Atome von \mathcal{A}_e . Das mögliche Faktum A ist die Vereinigung derjenigen (nicht leeren) Atome, die es umfasst. Mit

$$\mathcal{D}_A := \{ D' \subset D \mid AT(D') \subset A \text{ und } AT(D') \neq \emptyset \}$$

erhalten wir daher:

$$\text{L.36.42 } A = \bigexists_{D' \in \mathcal{D}_A} AT(D')$$

Zu jedem $\beta \in \mathcal{B}$ sei

$$D_\beta := \{ (r, \beta(r)) \mid r \in \{1, \dots, R\} \} \\ \subset D$$

Es gilt dann für alle $\beta \in \mathcal{B}$:

$$Q_\beta = \bigvee_r \langle A_{r,\beta(r)} \rangle \wedge \bigvee_r \bigvee_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{rs} \rangle \quad (\text{vgl. T.34.3}) \\ = AT(D_\beta)$$

Jedes nicht leere Q_β ist somit ein spezielles Atom. Mit

$$\mathcal{B}_A := \{ \beta \in \mathcal{B} \mid D_\beta \in \mathcal{D}_A \}$$

erhält man dann wegen

$$Q = \bigexists_{\beta \in \mathcal{B}} Q_\beta \quad (\text{folgt aus T.34.2})$$

die Aussage:

$$\text{L.36.43 } A \wedge Q = \bigexists_{\beta \in \mathcal{B}_A} Q_\beta$$

L.36.44 Es ist

$$\mu_e(A) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}_A} p_\beta$$

Beweis: Wegen

$$\mu_e(\cdot) = \mu(\cdot | G \wedge N)$$

und

$$\begin{aligned} G \wedge N &\subset M \wedge N && \text{(mit T.34.5)} \\ &= Q \end{aligned}$$

ist μ_e auf Q konzentriert. Daher ist

$$\begin{aligned} \mu_e(A) &= \mu_e(A \wedge Q) \\ &= \mu_e(\exists \beta \in \mathcal{B}_A Q_\beta) && \text{(L.36.43)} \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{B}_A} \mu_e(Q_\beta) && \text{(wegen T.34.4, da } \mu_e \text{ additiv ist)} \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} N_\beta \wedge Q &= N_\beta \wedge N \wedge M \\ &= N_\beta \wedge M && \text{(wegen T.34.2 ist } N_\beta \subset N) \\ &= Q_\beta \end{aligned}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} \mu_e(Q_\beta) &= \mu_e(N_\beta \wedge Q) \\ &= \mu_e(N_\beta) \\ &= p_\beta \end{aligned}$$

QED

Zu $m \in \{1, \dots, N\}$ und $D' \subset D$ wird analog zu $AT(D')$ definiert:

$$AT_m(D') := \bigvee_{(r,s) \in D'} \langle A_{m,rs} \rangle^N \wedge \bigvee_{(r,s) \notin D'} \neg \langle A_{m,rs} \rangle^N$$

Im Hinblick auf L.36.42 wird damit A_m in Analogie zu A gebildet als:

$$A_m := \exists_{D' \in \mathcal{D}_A} AT_m(D')$$

L.36.45 Es ist

$$A_m \wedge Q_m = \exists_{\beta \in \mathcal{B}_A} Q_{m,\beta}$$

Beweis: Für alle $\beta \in \mathcal{B}$ ist

$$\begin{aligned} Q_{m,\beta} &= \bigvee_r [\langle A_{m,r,\beta(r)} \rangle^N \wedge \bigvee_{s \neq \beta(r)} \neg \langle A_{m,rs} \rangle^N] && \text{(L.36.38)} \\ &= AT_m(D_\beta) \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} Q_m &= \exists_{\beta \in \mathcal{B}} Q_{m,\beta} && \text{(L.36.41)} \\ &= \exists_{\beta \in \mathcal{B}} AT_m(D_\beta) \end{aligned}$$

Die $AT_m(D')$ sind (für festes m) paarweise disjunkt. Somit ist

$$\begin{aligned} A_m \wedge Q_m &= \exists_{\beta \in \mathcal{B}_A} AT_m(D_\beta) \\ &= \exists_{\beta \in \mathcal{B}_A} Q_{m,\beta} \end{aligned}$$

QED

L.36.46 Es ist

$$N^N = \exists_{\beta} N_{\beta}^N$$

Beweis: Nach T.34.2 gilt:

$$N = \exists_{\beta} N_{\beta}$$

Wird dies auf das Gesamtexperiment angewendet, so erhält man unmittelbar die Behauptung. **QED**

L.36.47 μ_e^N ist konzentriert auf Q^N .

Beweis: μ_e ist auf Q konzentriert (vgl. Beweis zu L.36.44). Dies angewendet auf das Gesamtexperiment ergibt die Behauptung. **QED**

L.36.48 Für $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\mu_e^N(\bigcap_m Q_{m, \beta_m}) = \prod_m p_{\beta_m}$$

Beweis: Für alle $m \in \{1, \dots, N\}$ und $r \in \{1, \dots, R\}$ sei

$$\beta(m, r) := \beta_m(r)$$

Dann ist $\beta \in \mathcal{B}^N$, und es gilt:

$$\begin{aligned} N_{\beta}^N \wedge Q^N &= N_{\beta}^N \wedge N^N \wedge M^N \\ &= N_{\beta}^N \wedge M^N && \text{(da } N_{\beta}^N \subset N^N \text{ wegen L.36.46)} \\ &= Q_{\beta}^N \\ &= \bigcap_m Q_{m, \beta_m} && \text{(L.36.28)} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mu_e^N(\bigcap_m Q_{m, \beta_m}) &= \mu_e^N(N_{\beta}^N \wedge Q^N) \\ &= \mu_e^N(N_{\beta}^N) && \text{(wegen L.36.47)} \\ &= \prod_m p_{\beta_m} && \text{(L.36.35)} \end{aligned} \quad \mathbf{QED}$$

L.36.49 Es sei $E := \{m_1, \dots, m_u\}$ eine Teilmenge von $\{1, \dots, N\}$ aus verschiedenen Elementen. Dann ist

$$\mu_e^N(A_{m_1} \wedge \dots \wedge A_{m_u}) = p^u$$

Beweis: Nach L.36.39 sind (für festes m) die $Q_{m, \beta}$ paarweise disjunkt. Daher gilt:

(*) Für je zwei verschiedene N -Tupel der Form $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathcal{B} \times \dots \times \mathcal{B}$ stellen die zugehörigen Terme $\bigcap_m Q_{m, \beta_m}$ disjunkte Mengen dar.

Wir setzen

$$\mathcal{B}_m := \mathcal{B}_A \quad \text{für } m \in E$$

und

$$\mathcal{B}_m := \mathcal{B} \quad \text{für } m \notin E$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \mu_e^{\mathbf{N}}(A_{m_1} \wedge \dots \wedge A_{m_u}) \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_{m \in E} A_m) \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_{m \in E} A_m \wedge \forall_{m \notin E} Q_m) && \text{(wegen L.36.47)} \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_{m \in E} (A_m \wedge Q_m) \wedge \forall_{m \notin E} Q_m) \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_{m \in E} \exists \beta \in \mathcal{B}_A Q_{m,\beta} \wedge \forall_{m \notin E} \exists \beta \in \mathcal{B} Q_{m,\beta}) && \text{(mit L.36.45} \\ & && \text{und L.36.41)} \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_m \exists \beta \in \mathcal{B}_m Q_{m,\beta}) \\ &= \mu_e^{\mathbf{N}}(\exists \beta_1 \in \mathcal{B}_1 \dots \exists \beta_{\mathbf{N}} \in \mathcal{B}_{\mathbf{N}} \forall_m Q_{m,\beta_m}) \\ &= \sum_{\beta_1 \in \mathcal{B}_1} \dots \sum_{\beta_{\mathbf{N}} \in \mathcal{B}_{\mathbf{N}}} \mu_e^{\mathbf{N}}(\forall_m Q_{m,\beta_m}) && \text{(wegen (*) und} \\ & && \text{da } \mu_e^{\mathbf{N}} \text{ additiv ist.)} \\ &= \sum_{\beta_1 \in \mathcal{B}_1} \dots \sum_{\beta_{\mathbf{N}} \in \mathcal{B}_{\mathbf{N}}} \prod_m p_{\beta_m} && \text{(mit L.36.48)} \\ &= \prod_m (\sum_{\beta \in \mathcal{B}_m} p_{\beta}) \\ &= \prod_{m \in E} (\sum_{\beta \in \mathcal{B}_m} p_{\beta}) \cdot \prod_{m \notin E} (\sum_{\beta \in \mathcal{B}_m} p_{\beta}) \\ &= \prod_{m \in E} (\sum_{\beta \in \mathcal{B}_A} p_{\beta}) \cdot \prod_{m \notin E} (\sum_{\beta \in \mathcal{B}} p_{\beta}) \\ &= \prod_{m \in E} \mu_e(A) \cdot \prod_{m \notin E} 1 && \text{(mit L.36.44 sowie} \\ & && \text{der Definition von } p_{\beta}) \\ &= \prod_{m \in E} p && \text{(Definition von } p) \\ &= p^u && \text{QED} \end{aligned}$$

Theorem T.36.4 Für alle $m \in \{1, \dots, \mathbf{N}\}$ ist

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(A_m) = p$$

Beweis: Dies ist ein Korollar zu L.36.49 (Fall $E = \{m\}$).

QED

Theorem T.36.5 Für jede Teilfolge m_1, \dots, m_u von $1, \dots, \mathbf{N}$ gilt:

$$\mu_e^{\mathbf{N}}(A_{m_1} \wedge \dots \wedge A_{m_u}) = \mu_e^{\mathbf{N}}(A_{m_1}) \cdot \dots \cdot \mu_e^{\mathbf{N}}(A_{m_u})$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus L.36.49 und T.36.4

QED

Theorem T.36.6 Die A_m sind unabhängig unter μ_e^N .

Beweis: Folgt aus T.36.5 unmittelbar.

QED

Für $k \in \{0, \dots, N\}$ seien

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k &:= \{ F \subset \{1, \dots, N\} \mid \#F = k \} \\ \text{ANZ}_k &:= \exists_{F \in \mathcal{F}_k} [\forall_{m \in F} A_m \wedge \forall_{m \notin F} \neg A_m] \end{aligned}$$

Zu $\delta > 0$ sei

$$\text{ANZ}_{N,p,\delta} := \bigcup \{ \text{ANZ}_k \mid k \in \{0, \dots, N\} \text{ und } k/N \notin [p-\delta, p+\delta] \}$$

Theorem T.36.7 Es gilt:

$$\forall_{\delta > 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_e^N(\text{ANZ}_{N,p,\delta}) = 0$$

Beweis: Zu $\delta > 0$ sei

$$K_\delta := \{ k \in \{0, \dots, N\} \mid k/N \notin [p-\delta, p+\delta] \}$$

Es ist dann

$$\text{ANZ}_{N,p,\delta} = \exists_{k \in K_\delta} \text{ANZ}_k$$

Da die ANZ_k (für verschiedene k) disjunkt sind, folgt:

$$\mu_e^N(\text{ANZ}_{N,p,\delta}) = \sum_{k \in K_\delta} \mu_e^N(\text{ANZ}_k)$$

Zu $F \subset \{1, \dots, N\}$ sei

$$G_F := \forall_{m \in F} A_m \wedge \forall_{m \notin F} \neg A_m$$

Dann ist

$$\text{ANZ}_k = \exists_{F \in \mathcal{F}_k} G_F$$

und da die G_F (für verschiedene F) disjunkt sind, ist

$$\mu_e^N(\text{ANZ}_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \mu_e^N(G_F)$$

Ferner ist (wegen T.36.4 und T.36.6)

$$\mu_e^N(G_F) = p^{\#F} (1-p)^{N-\#F}$$

Damit erhalten wir:

$$\mu_e^N(\text{ANZ}_{N,p,\delta}) = \sum_{k \in K_\delta} \sum_{F \in \mathcal{F}_k} p^{\#F} (1-p)^{N-\#F}$$

Zu jedem $\delta > 0$ konvergiert dieser rein kombinatorische Ausdruck für $N \rightarrow \infty$ nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gegen Null. Dies gilt unabhängig davon, ob die zugrundeliegenden Ereignisse – wie es üblicherweise der Fall ist – in einem gemeinsamen Modell (Ω', \mathcal{A}') oder – wie es hier der Fall ist – in verschiedenen Modellen $(\Omega^N, \mathcal{A}_e^N)$ dargestellt werden.

QED

B37. Quantenzustände

Theorem T.37.1 Es seien \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 Hilberträume sowie

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Ferner sei W ein statistischer Operator auf \mathcal{H} . Dann ist die Bildung der partiellen Spur von W auf \mathcal{H}_1 unabhängig von den bei der Definition zugrundegelegten Orthonormalbasen von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 .

Beweis: Es seien $(e_j)_j$ und $(g_l)_l$ zwei Orthonormalbasen von \mathcal{H}_1 . Ebenso seien $(f_r)_r$ und $(h_t)_t$ Orthonormalbasen von \mathcal{H}_2 . Unter Verwendung von $(e_j)_j$ und $(f_r)_r$ hat W die Darstellung

$$W = \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} (e_j \otimes f_r)(e_k \otimes f_s)^*$$

Die hiermit gebildete partielle Spur auf \mathcal{H}_1 ist dann

$$W' = \sum_{j,k} \sum_r w_{jr,kr} e_j(e_k)^*$$

Jedes Element von e_j kann dargestellt werden als

$$e_j = \sum_l u_{jl} g_l$$

und ebenso hat f_r die Darstellung

$$f_r = \sum_t v_{rt} h_t$$

Da es sich bei den v_{rt} um Koeffizienten einer orthonormalen Transformation handelt, gilt:

$$(*) \sum_t v_{rt} \bar{v}_{st} = \delta_{rs}$$

wobei δ_{rs} das Kroneckersymbol ist und \bar{v} die komplex Konjugierte zu $v \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Mit

$$b_{lt,mu} := \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} u_{jl} v_{rt} \bar{u}_{km} \bar{v}_{su}$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} \left(\sum_l u_{jl} g_l \otimes \sum_t v_{rt} h_t \right) \left(\sum_m u_{km} g_m \otimes \sum_u v_{su} h_u \right)^* \\ &= \sum_{l,m,t,u} \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} u_{jl} v_{rt} \bar{u}_{km} \bar{v}_{su} (g_l \otimes h_t)(g_m \otimes h_u)^* \\ &= \sum_{l,m,t,u} b_{lt,mu} (g_l \otimes h_t)(g_m \otimes h_u)^* \end{aligned}$$

Die mit dieser Basisdarstellung gebildete partielle Spur ist dann:

$$W'' = \sum_{l,m} \sum_t b_{lt,mt} g_l(g_m)^*$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_t b_{lt,mt} &= \sum_t \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} u_{jl} v_{rt} \bar{u}_{km} \bar{v}_{st} \\ &= \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} u_{jl} \bar{u}_{km} \sum_t v_{rt} \bar{v}_{st} \\ &= \sum_{j,k,r,s} w_{jr,ks} u_{jl} \bar{u}_{km} \delta_{rs} \quad (\text{mit } (*)) \\ &= \sum_{j,k,r} w_{jr,kr} u_{jl} \bar{u}_{km} \end{aligned}$$

ist

$$W'' = \sum_{l,m} \sum_{j,k,r} w_{jr,kr} u_{jl} \bar{u}_{km} g_l(g_m)^*$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{j,k} \sum_r w_{jr,kr} e_j(e_k)^* \\ &= \sum_{j,k} \sum_r w_{jr,kr} (\sum_l u_{jl} g_l) (\sum_m u_{km} g_m)^* \\ &= \sum_{l,m} \sum_{j,k,r} w_{jr,kr} u_{jl} \bar{u}_{km} g_l(g_m)^* \end{aligned}$$

und folglich mit W'' identisch. **QED**

L.37.1 Es sei ein D-Kontext gegeben mit der Ereignisfolge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$, der Abhängigkeitsrelation \ll und der Aufteilung der Indexmenge $J := \{1, \dots, n\}$ in die Teilbereiche

$$J' := \{1, \dots, q\} \quad (\text{Voraussetzungen})$$

und

$$J'' := \{q+1, \dots, n\} \quad (\text{interessierende Ereignisse})$$

Ferner sei

$$\sigma : J'' \rightarrow J''$$

eine Bijektion. Die Abbildung σ beschreibt eine Permutation der interessierenden Ereignisse. Ersetzt man nun die obige Ereignisfolge durch die Folge

$$(E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q), (E_{\sigma(q+1)}, t_{\sigma(q+1)}), \dots, (E_{\sigma(n)}, t_{\sigma(n)})$$

so erhält man wiederum einen D-Kontext. (Vgl. die Definition in Kapitel B33.)

Beweis: Da wir von einem D-Kontext ausgehen, gilt:

$$\forall_{k \in J''} \forall_{j \ll k} j \in J'$$

An der Gültigkeit dieser Bedingung ändert sich nichts, wenn die Elemente von J'' permutiert werden. Es seien nun (F_j, t) Dokumente der (E_j, t_j) sowie

$$A_j := U_{-t_j} E_j$$

und

$$D_j := U_{-t} F_j$$

so dass für alle $k \in J$ und für jede Folge B_1, \dots, B_n , die die in den Beweisen zu Kapitel 33 eingeführten Bedingungen (i_D), (ii_D) und (iii) erfüllt, die Dokumentbeziehung

$$(DB) \pi_{A_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_n} \dots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

gilt. Aufgrund der Voraussetzungen (i_D) , (ii_D) und (iii) gilt für alle $j \in J$:

$$B_j \in \{D_j, \mathcal{H}\}$$

Demnach sind alle B_j miteinander vertauschbar, und an der Gültigkeit der Dokumentbeziehung ändert sich nichts, wenn die interessierenden Ereignisse permutiert werden. Zu einem gegebenen $k \in J$ ändert sich an den Bedingungen (i_D) , (ii_D) und (iii) bei einer solchen Permutation ebenfalls nichts.

QED

Für das Folgende sei ein makroskopisches Experiment gegeben mit den experimentellen Voraussetzungen $(E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q)$ und den möglichen Ergebnissen (E_{rs}, t_{rs}) (für $r \in \{1, \dots, R\}$ und $s \in \{1, \dots, S_r\}$).

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ sei

$$\mathcal{B}_r := \{ \beta : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_{r' \leq r} \beta(r') \in \{1, \dots, S_{r'}\} \}$$

die Menge aller möglichen Ergebniskonstellationen für die ersten r Alternativen.

Es seien

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, q\})$$

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$A_{rs} := U_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } r \in \{1, \dots, R\} \text{ und } s \in \{1, \dots, S_r\})$$

und für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$ sei

$$L_{\beta, r} := \pi_{A_{r, \beta(r)}} \dots \pi_{A_{1, \beta(1)}} L$$

Theorem T.37.2 Der Ausdruck, mit dem $L_{\beta, r}$ definiert wird, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Faktoren $A_{j, \beta(j)}$ auftreten.

Beweis: Die möglichen experimentellen Ergebnisse gehören (wie bei jedem makroskopischen Experiment) zu den "interessierenden Ereignissen" eines makroskopischen Kontextes. Nach L.32.3 erhält man wiederum einen makroskopischen Kontext, wenn man alle interessierenden Ereignisse des Kontextes außer den Ereignissen $A_{1, \beta(1)} \dots A_{r, \beta(r)}$ weglässt. Indem man die gegebene Abhängigkeitsrelation « durch die Standard-Abhängigkeitsrelation ersetzt, erhält man gemäß L.33.1 einen Standard-Kontext. Nach L.33.2 ist dies auch ein D-Kontext.

Hierfür gilt nach L.33.6 die Gleichung

$$(*) \pi_{\sigma} \pi_{UR} = \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR}$$

für jede Belegung $\sigma \in \mathcal{W}$. Setzt man $\sigma(j) := 1$ für alle $j \in J$, so erhält man mit

$$A := \bigcap_{j \in \{1, \dots, r\}} A_{j, \beta(j)} \cap \bigcap_{j \in \{1, \dots, q\}} A_j$$

die Gleichung:

$$(**) \pi_{A_r, \beta(r)} \cdots \pi_{A_1, \beta(1)} L = \pi_A \pi_{UR}$$

Nach L.37.1 erhält man, wenn man die interessierenden Ereignisse des betrachteten D-Kontextes permutiert, wiederum einen D-Kontext. Auch hierfür gilt die Gleichung (*). Da der Ausdruck A nicht von der Reihenfolge der $A_{j, \beta(j)}$ abhängt, gilt somit (**) auch nach einer Permutation der interessierenden Ereignisse. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

QED

B38. Die Bewegung von Subsystemen nach der Schrödingergleichung

Es sei Q ein Subsystem von \mathcal{H} und Q^- bezeichne den zugehörigen "Rest der Welt". Es gilt dann:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

Ferner sei W ein statistischer Operator auf \mathcal{H} .

Jeder Operator A auf einem Hilbertraum kann, wenn man eine bestimmte Orthonormalbasis zugrunde legt, dargestellt werden durch eine Matrix:

$$A = (a_{ij})_{ij}$$

In ähnlicher Weise kann der Operator W auf dem Tensorprodukt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

dargestellt werden als

$$W = (W_{kl})_{kl}$$

wobei die W_{kl} ihrerseits Matrizen sind:

$$W_{kl} = (a_{ijkl})_{ij}$$

In diesem Fall sind bekanntlich die partiellen Spuren auf \mathcal{H}_Q bzw. \mathcal{H}_{Q^-} zu bilden als:

$$\text{tr}_Q[W] = \sum_k W_{kk}$$

und

$$\text{tr}_{Q^-}[W] = (\text{tr } W_{kl})_{kl}$$

Es seien

$$\alpha_Q(H_Q) := H_Q \otimes I_{Q^-}$$

$$\alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) := I_Q \otimes H_{Q^-}$$

wobei I_Q und I_{Q^-} die Einheitsoperatoren auf \mathcal{H}_Q bzw. \mathcal{H}_{Q^-} sind.

Theorem T.38.1 Es gilt:

$$\text{tr}_Q[\alpha_Q(H_Q) W] = H_Q \text{tr}_Q[W]$$

Beweis: Es ist

$$\alpha_Q(H_Q) W = (H_Q W_{kl})_{kl}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_Q[\alpha_Q(H_Q) W] &= \operatorname{tr}_Q[(H_Q W_{kl})_{kl}] \\ &= \sum_k (H_Q W_{kk}) \\ &= H_Q (\sum_k W_{kk}) \\ &= H_Q \operatorname{tr}_Q[W]\end{aligned}$$

QED

Theorem T.38.2 Es gilt:

$$\operatorname{tr}_Q[W \alpha_Q(H_Q)] = \operatorname{tr}_Q[W] H_Q$$

Beweis: Es ist

$$W \alpha_Q(H_Q) = (W_{kl} H_Q)_{kl}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_Q[W \alpha_Q(H_Q)] &= \operatorname{tr}_Q[(W_{kl} H_Q)_{kl}] \\ &= \sum_k (W_{kk} H_Q) \\ &= (\sum_k W_{kk}) H_Q \\ &= \operatorname{tr}_Q[W] H_Q\end{aligned}$$

QED

L.38.1 Es ist

$$\operatorname{tr}_{Q^-}[\alpha_Q(H_Q) W] = \operatorname{tr}_{Q^-}[W \alpha_Q(H_Q)]$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{Q^-}[\alpha_Q(H_Q) W] &= \operatorname{tr}_{Q^-}[\alpha_Q(H_Q) (W_{kl})_{kl}] \\ &= \operatorname{tr}_{Q^-}[(H_Q W_{kl})_{kl}] \\ &= (\operatorname{tr} H_Q W_{kl})_{kl}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{Q^-}[W \alpha_Q(H_Q)] &= \operatorname{tr}_{Q^-}[(W_{kl})_{kl} \alpha_Q(H_Q)] \\ &= \operatorname{tr}_{Q^-}[(W_{kl} H_Q)_{kl}] \\ &= (\operatorname{tr} W_{kl} H_Q)_{kl}\end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke stimmen überein, da für alle Operatoren L und M gilt:

$$\operatorname{tr} LM = \operatorname{tr} ML$$

QED

Theorem T.38.3 Es ist

$$\operatorname{tr}_Q[\alpha_{Q^-}(H_{Q^-}) W] = \operatorname{tr}_Q[W \alpha_{Q^-}(H_{Q^-})]$$

Beweis: Diese Aussage erhält man aus L.38.1, indem man die Rollen der beiden Tensorfaktoren \mathcal{H}_Q und \mathcal{H}_{Q^-} miteinander vertauscht.

QED

B39. Messungen an Quantensystemen

L.39.1 Für jeden makroskopischen Kontext, der auf einer gegebenen Ereignisfolge $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ mit $A_j := U_{-t_j} E_j$ und $K' := \{1, \dots, q\}$ basiert, und für jede Teilfolge B_1, \dots, B_m von A_{q+1}, \dots, A_n (d.h. für einen Teil der interessierenden Ereignisse) ist mit

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

der Ausdruck

$$\pi_{B_m} \dots \pi_{B_1} L$$

unabhängig von der Reihenfolge, in der die Faktoren π_{B_k} auftreten.

Beweis: Nach L.32.3 erhält man, wenn man alle interessierenden Ereignisse des Kontextes außer B_1, \dots, B_m weglässt, wieder einen makroskopischen Kontext. Indem man die gegebene Abhängigkeitsrelation « durch die Standard-Abhängigkeitsrelation ersetzt, erhält man gemäß L.33.1 einen Standard-Kontext. Nach L.33.2 ist dies auch ein D-Kontext.

Hierfür gilt nach L.33.6 die Gleichung

$$(*) \quad \pi_{\sigma} \pi_{UR} = \pi_{M_{\sigma}} \pi_{UR}$$

für jede Belegung $\sigma \in \mathcal{W}$. Setzt man $\sigma(j) := 1$ für alle $j \in J$, so erhält man mit

$$A := \bigcap_{k \in \{1, \dots, m\}} B_k \cap \bigcap_{j \in \{1, \dots, q\}} A_j$$

die Gleichung:

$$(**) \quad \pi_{B_m} \dots \pi_{B_1} L = \pi_A \pi_{UR}$$

Nach L.37.1 erhält man, wenn man die interessierenden Ereignisse des betrachteten D-Kontextes permutiert, wiederum einen D-Kontext. Auch hierfür gilt die Gleichung (*). Da der Ausdruck A nicht von der Reihenfolge der B_k abhängt, gilt somit (**) auch nach einer Permutation der interessierenden Ereignisse. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. **QED**

L.39.2 Die Aussage von L.39.1 gilt auch dann, wenn man einige der B_k durch $(B_k)^{\perp}$ ersetzt.

Beweis: Der Beweis von L.39.1 kann hier nahezu wörtlich übernommen werden. Man muss lediglich ein anderes $\sigma \in \mathcal{W}$ wählen: Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$, bei dem B_k durch $(B_k)^{\perp}$ ersetzt worden ist, muss die Belegung σ an der entsprechenden Position den Wert 0 anstelle von 1 aufweisen. **QED**

Es sei Q ein Subsystem von \mathcal{H} und Q^- der zugehörige "Rest der Welt". Es ist dann:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_{Q^-}$$

Wir betrachten ein Quantenexperiment, dessen Voraussetzungen durch die Ereignisfolge $(E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q)$ beschrieben werden. Der zugehörige Indexbereich sei

$$K' := \{1, \dots, q\}$$

Bei diesem Experiment werden nacheinander mehrere Observable M_1, \dots, M_R gemessen. Für jedes $r \in \{1, \dots, R\}$ ist M_r ein selbstadjungierter Operator auf \mathcal{H}_Q mit endlichem Spektrum und der Spektraldarstellung

$$M_r = \sum_s \lambda_{rs} \pi_{F_{rs}}$$

Hierbei sind λ_{rs} die paarweise verschiedenen (reellen) Eigenwerte von M_r und F_{rs} paarweise orthogonale Eigenräume mit

$$\bigoplus_s F_{rs} = \mathcal{H}_Q$$

Die Messung von M_r findet statt zum Zeitpunkt τ_r .

Es sei S_r die Anzahl der Eigenwerte von M_r . Damit sei

$$D := \{ (r, s) \mid r \in \{1, \dots, R\} \wedge s \in \{1, \dots, S_r\} \}$$

der Indexbereich, und für alle $(r, s) \in D$ sei

$$C_{rs} := \alpha_Q(F_{rs})$$

Zu jedem $(r, s) \in D$ sei

$$(E_{rs}, t_{rs}) \in \mathcal{E}_m$$

das (makroskopische) Messergebnis. Diese Ereignisse bilden zusammen mit den Voraussetzungen $(E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q)$ einen makroskopischen Kontext.

Zur Abkürzung setzen wir wie zuvor

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in K')$$

$$A_{rs} := U_{-t_{rs}} E_{rs} \quad (\text{für } (r, s) \in D)$$

und definieren:

$$G := \langle UR \rangle \wedge \bigwedge_{j \in K'} \langle A_j \rangle$$

$$N := \bigwedge_r \exists_s \langle A_{rs} \rangle$$

Auf der Menge Ω sei

$$\mathcal{A}_e := \mathcal{A}(\{ \langle A_{rs} \rangle \mid (r, s) \in D \})$$

und P_e wie in Kapitel 36 definiert.

Theorem T.39.1 Es ist:

$$P_e(A) = \mu(A \mid G \wedge N) \quad (\text{für alle } A \in \mathcal{A}_e)$$

Beweis: Nach den Ausführungen in Kapitel 36 ist $P_e = \mu_e$. Die Behauptung des Theorems ergibt sich daher unmittelbar aus der Definition von μ_e .

QED

Es seien:

$$L := \pi_{A_q} \dots \pi_{A_1} \pi_{UR}$$

$$B_{rs} := U_{-\tau_r} C_{rs} \quad (\text{für } (r,s) \in D)$$

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ seien:

$$\mathcal{B}_r := \{ \beta : \{1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall_{r' \leq r} \beta(r') \in \{1, \dots, S_{r'}\} \}$$

$$L_{\beta,r} := \pi_{A_{r,\beta(r)}} \dots \pi_{A_{1,\beta(1)}} L \quad (\text{für alle } \beta \in \mathcal{B}_r)$$

Für alle $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ gelte die folgende Messbeziehung zwischen (C_{rs}, τ_r) und (E_{rs}, t_{rs}) :

$$(MB) \quad \pi_{B_{rs}} L_{\beta,r-1} = \pi_{A_{rs}} L_{\beta,r-1}$$

Theorem T.39.2 An dem Ausdruck

$$\pi_{A_{r,\beta(r)}} \dots \pi_{A_{1,\beta(1)}} L$$

ändert sich nichts, wenn man die Reihenfolge der darin auftretenden Faktoren $\pi_{A_{k,\beta(k)}}$ nach Belieben ändert.

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus L.39.1

QED

Theorem T.39.3 Die Aussage von T.39.2 gilt auch dann, wenn man einige der Faktoren $\pi_{A_{k,\beta(k)}}$ in dem Ausdruck

$$\pi_{A_{r,\beta(r)}} \dots \pi_{A_{1,\beta(1)}} L$$

weglässt.

Beweis: Auch diese Aussage folgt unmittelbar aus L.39.1

QED

L.39.3 Aus (MB) folgt für alle $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ die Gleichung

$$(MB') \quad \pi_{B_{rs}} L' = \pi_{A_{rs}} L'$$

wobei L' analog zu $L_{\beta,r-1}$ gebildet wird, jedoch nur eine Teilfolge der Faktoren $\pi_{A_{k,\beta(k)}}$ verwendet wird, die in der Definition von $L_{\beta,r-1}$ auftreten.

Beweis: Das Weglassen eines der Faktoren $\pi_{A_{k,\beta(k)}}$ entspricht der Ersetzung von $A_{k,\beta(k)}$ durch \mathcal{H} . Es sei also $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ und eine Folge G_k von Unterräumen von \mathcal{H} gegeben mit

$$G_k \in \{A_{k,\beta(k)}, \mathcal{H}\} \quad (\text{für } k \in \{1, \dots, r-1\})$$

Für

$$L' := \pi_{G_{r-1}} \dots \pi_{G_1} L$$

ist dann die Beziehung (MB') zu zeigen.

Es sei N die Anzahl der $k \in \{1, \dots, r-1\}$ mit $G_k \neq A_{k,\beta(k)}$. Der Beweis erfolgt induktiv über N . Für $N = 0$ ist nichts zu zeigen, da (MB') in diesem Fall in (MB) übergeht. Es sei nun also $N > 0$, und die Gültigkeit von (MB') werde für alle $N' < N$ vorausgesetzt (Induktionsannahme).

Es sei m der kleinste Index $k \in \{1, \dots, r-1\}$ mit $G_k \neq A_{k,\beta(k)}$. Es ist dann $G_m = \mathcal{H}$.

Wegen

$$\mathcal{H}_Q = \bigoplus_{s'} F_{ms'}$$

gilt:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{s'} B_{ms'}$$

Außerdem sind die $B_{ms'}$ (ebenso wie die $F_{ms'}$) paarweise orthogonal. Damit ist

$$\begin{aligned} L' &= \pi_{G_{r-1}} \dots \pi_{G_1} L \\ &= \prod_{k=r-1..1} \pi_{G_k} L \\ &= \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{G_m} \prod_{k=m-1..1} \pi_{G_k} L \\ &= \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{\mathcal{H}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \\ &= \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{\bigoplus_{s'} B_{ms'}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \\ &= \sum_{s'} \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{B_{ms'}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \\ &= \sum_{s'} \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{A_{ms'}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \end{aligned}$$

Letzteres folgt unmittelbar aus (MB), angewendet auf m anstelle von r .

Zu jedem $s' \in \{1, \dots, S_m\}$ sei $\beta_{s'} \in \mathcal{B}_{r-1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \beta_{s'}(k) &:= \beta(k) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, r-1\} \setminus \{m\} \\ \beta_{s'}(m) &:= s' \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\beta_{s'}$ erhält man (für jedes s') die Gleichung

$$\begin{aligned} (\text{MB}'_{s'}) \pi_{B_{rs}} \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{A_{ms'}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \\ = \pi_{A_{rs}} \prod_{k=r-1..m+1} \pi_{G_k} \pi_{A_{ms'}} \prod_{k=m-1..1} \pi_{A_{k,\beta(k)}} L \end{aligned}$$

da die Folge

$$G_{r-1}, \dots, G_{m+1}, A_{ms'}, A_{m-1, \beta(m-1)}, \dots, A_{1, \beta(1)}$$

nur an $N-1$ Stellen von der Folge

$$A_{r-1, \beta_{s'}(r-1)}, \dots, A_{1, \beta_{s'}(1)}$$

abweicht.

Durch Summierung über s' erhalten wir aus den Beziehungen $(MB'_{s'})$ zusammen mit der obigen Summendarstellung von L' die zu beweisende Gleichung

$$\pi_{B_{rs}} L' = \pi_{A_{rs}} L' \quad \text{QED}$$

L.39.4 Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ und $A < \mathcal{H}$ gilt:

$$\pi_{[\psi]} \pi_A \psi = |\pi_A \psi|^2 \psi$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \pi_{[\psi]} \pi_A \psi &= \psi \psi^* \pi_A \pi_A \psi \\ &= \psi (\pi_A \psi)^* \pi_A \psi \\ &= \psi |\pi_A \psi|^2 \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.39.5 Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ sowie $A_1, \dots, A_m < \mathcal{H}$ gilt:

$$\psi + \sum_{k \in \{1, \dots, m\}} \pi_{A_k} \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi + \sum_k \pi_{A_k} \psi &= 0 \\ \Rightarrow \pi_{[\psi]} [\psi + \sum_k \pi_{A_k} \psi] &= 0 \\ \Rightarrow \psi + \sum_k \pi_{[\psi]} \pi_{A_k} \psi &= 0 \\ \Rightarrow \psi + \sum_k |\pi_{A_k} \psi|^2 \psi &= 0 \quad (\text{L.39.4}) \\ \Rightarrow [1 + \sum_k |\pi_{A_k} \psi|^2] \psi &= 0 \\ \Rightarrow \psi &= 0 \end{aligned} \quad \text{QED}$$

Theorem T.39.4 Die Aussage

$$(EX1) \quad \forall_r \forall_{s \neq s'} \neg \hat{\Delta}(G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle)$$

ist eine Konsequenz aus den Messbeziehungen (MB).

Beweis: Aus (MB) folgt nach L.39.3 die Beziehung (MB') . Es sei $r \in \{1, \dots, R\}$ und dazu $s, s' \in \{1, \dots, S_r\}$ mit $s \neq s'$. Wegen

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \{1, \dots, S_r\}} B_{rk}$$

und da die B_{rk} paarweise orthogonal sind, gilt dann zu $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
 \psi &:= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L \varphi \\
 &= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{\oplus_k B_{rk}} L \varphi \\
 &= \sum_k \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{B_{rk}} L \varphi \\
 &= \sum_k \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_{rk}} L \varphi && \text{(mit (MB'))} \\
 &= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_{rs}} L \varphi \\
 &\quad + \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_{rs}'} L \varphi \\
 &\quad + \sum_{k \notin \{s, s'\}} \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_{rk}} L \varphi \\
 &= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L \varphi \\
 &\quad + \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_{rs}'} L \varphi \\
 &\quad + \sum_{k \notin \{s, s'\}} \pi_{A_{rk}} \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L \varphi && \text{(mit L.39.1)} \\
 &= \psi + \psi + \left(\sum_{k \notin \{s, s'\}} \pi_{A_{rk}} \psi \right)
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\psi + \left(\sum_{k \notin \{s, s'\}} \pi_{A_{rk}} \psi \right) = 0$$

und mit L.39.5

$$\psi = 0$$

Da dies für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt, ist

$$\pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L = 0$$

Mit

$$A := A_{rs} \cap A_{rs}' \cap \bigcap_j A_j$$

gilt (wie im Beweis zu L.39.1)

$$\begin{aligned}
 \pi_A \pi_{UR} &= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \\
 &= \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und somit

$$A < UR^\perp$$

Aufgrund der Schachtelungseigenschaft (vgl. T.29.2, T.29.5 und T.29.6) gibt es vertauschbare Unterräume C_j , C_{rs} und C_{rs}' , sowie M^\wedge von \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned}
 A_j &< C_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, q\} \\
 A_{rs} &< C_{rs} \\
 A_{rs}' &< C_{rs}' \\
 UR &< M^\wedge
 \end{aligned}$$

Indem man T.29.9 und T.29.7 anwendet auf den makroskopischen Kontext, in dem $\langle A_{rs} \rangle$ und $\langle A_{rs'} \rangle$ die einzigen interessierenden Ereignisse sind, erhält man mit $\sigma(i) := 1$ (für alle i) sowie

$$C := C_{rs} \cap C_{rs'} \cap \bigcap_j C_j$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} C &< A \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{wegen } M_\sigma = A) \\ &< UR^\perp \oplus UR^\perp \\ &= UR^\perp \end{aligned}$$

und somit

$$UR < C^\perp$$

Wegen

$$C^\perp \cap C_{rs} \cap C_{rs'} \cap \bigcap_j C_j = 0$$

folgt nun mit MON und SEC:

$$\begin{aligned} G \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle &= \langle UR \rangle \wedge \forall_j \langle A_j \rangle \wedge \langle A_{rs} \rangle \wedge \langle A_{rs'} \rangle \\ &\subset \langle C^\perp \rangle \wedge \forall_j \langle C_j \rangle \wedge \langle C_{rs} \rangle \wedge \langle C_{rs'} \rangle \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. **QED**

Theorem T.39.5 Die Aussage

$$(EX2) \quad \forall_r \neg \hat{\diamond} (G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle)$$

ist eine Konsequenz aus den Messbeziehungen (MB).

Beweis: Aus (MB) folgt nach L.39.3 die Beziehung (MB'). Es sei $r \in \{1, \dots, R\}$ und $S := S_r$. Wegen

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{s \in \{1, \dots, S\}} B_{rs}$$

und da die B_{rs} paarweise orthogonal sind, gilt dann zu $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \Psi &:= \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} L \varphi \\ &= \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} \pi_{\bigoplus_s B_{rs}} L \varphi \\ &= \sum_s \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} \pi_{B_{rs}} L \varphi \\ &= \sum_s \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} \pi_{A_{rs}} L \varphi \quad (\text{mit (MB')}) \\ &= \sum_s \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rs})^\perp} \pi_{A_{rs}} \pi_{(A_{r,s+1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} L \varphi \quad (\text{mit L.39.2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt, ist

$$\pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} L = 0$$

Mit

$$A := \bigcap_s (A_{rs})^\perp \cap \bigcap_j A_j$$

gilt (wie im Beweis zu L.39.2)

$$\begin{aligned} \pi_A \pi_{UR} &= \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \\ &= \pi_{(A_{r1})^\perp} \cdots \pi_{(A_{rS})^\perp} L \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit

$$A < UR^\perp$$

Aufgrund der Schachtelungseigenschaft gibt es vertauschbare Unterräume C_j und $C_{rs;0}$ sowie M^\wedge von \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned} A_j &< C_j && \text{für alle } j \in \{1, \dots, q\} \\ (A_{rs})^\perp &< C_{rs;0} && \text{für alle } s \in \{1, \dots, S\} \\ UR &< M^\wedge \end{aligned}$$

Indem man T.29.9 und T.29.7 anwendet auf den makroskopischen Kontext, in dem die $\langle A_{rs} \rangle$ (mit $s \in \{1, \dots, S\}$) die einzigen interessierenden Ereignisse sind, erhält man mit

$$C := \bigcap_s C_{rs;0} \cap \bigcap_j C_j$$

die Beziehung:

$$\begin{aligned} C &< A \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &< UR^\perp \oplus UR^\perp \\ &= UR^\perp \end{aligned}$$

und somit

$$UR < C^\perp$$

Wegen

$$C^\perp \cap \bigcap_s C_{rs;0} \cap \bigcap_j C_j = 0$$

folgt nun mit MON und SEC:

$$\begin{aligned} G \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle &= \langle UR \rangle \wedge \forall_j \langle A_j \rangle \wedge \forall_s \langle (A_{rs})^\perp \rangle \\ &\subset \langle C^\perp \rangle \wedge \forall_j \langle C_j \rangle \wedge \forall_s \langle C_{rs;0} \rangle \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. **QED**

L.39.6 Es sei Q ein Subsystem von \mathcal{H} und W ein Operator auf \mathcal{H} sowie C' ein Unterraum von \mathcal{H}_Q . Hierzu sei $C := \alpha_Q(C')$. Dann gilt:

$$\text{tr}_Q[\pi_C W \pi_C] = \pi_{C'} \text{tr}_Q[W] \pi_{C'}$$

Beweis: Mit der im Beweis von T.38.1 verwendeten Matrixschreibweise kann W dargestellt werden als

$$W = (W_{kl})_{kl}$$

Ist dann I_{Q^-} der Einheitsoperator auf \mathcal{H}_{Q^-} , so ist

$$\begin{aligned}\pi_C &= \pi_{\alpha_Q(C')} \\ &= \alpha_Q(\pi_{C'}) \quad (\text{analog zu L.36.10, mit } \alpha_Q \text{ als } \alpha_1) \\ &= \pi_{C'} \otimes I_{Q^-}\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\pi_C W \pi_C &= (\pi_{C'} \otimes I_{Q^-}) (W_{kl})_{kl} (\pi_{C'} \otimes I_{Q^-}) \\ &= (\pi_{C'} W_{kl} \pi_{C'})_{kl}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\text{tr}_Q[\pi_C W \pi_C] &= \sum_k (\pi_{C'} W_{kk} \pi_{C'}) \\ &= \pi_{C'} (\sum_k W_{kk}) \pi_{C'} \\ &= \pi_{C'} \text{tr}_Q[W] \pi_{C'}\end{aligned}$$

QED

L.39.7 Es seien L, M Operatoren auf \mathcal{H} und A, B zwei verschiedene eindimensionale Unterräume von \mathcal{H} . Aus

$$\pi_A L = \pi_B M$$

folgt dann

$$\pi_A L = 0$$

Beweis: Wir nehmen an, es sei $\pi_A L \neq 0$. Es gilt: $\text{Bild}(\pi_A L) < A$. Wegen $\pi_A L \neq 0$ enthält $\text{Bild}(\pi_A L)$ mindestens ein Element, und wegen $\dim A = 1$ folgt: $\text{Bild}(\pi_A L) = A$. Da auch $\pi_B M \neq 0$ ist, kann man ebenso auf $\text{Bild}(\pi_B M) = B$ schließen. Somit ist:

$$\begin{aligned}A &= \text{Bild}(\pi_A L) \\ &= \text{Bild}(\pi_B M) \\ &= B\end{aligned}$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

QED

Theorem T.39.6 In dem in Kapitel 39 beschriebenen Beispiel kann die Beziehung

$$(4) \quad \pi_Y \pi_F L = \pi_E \pi_F L$$

nicht gelten.

Beweis: Wir gehen aus von einem räumlichen Koordinatensystem (x, y, z) und betrachten eine Quelle, welche Elektronen in der Richtung der x -Achse ("nach rechts") emittiert.

Die Elektronen treffen auf ein Spin-Filter, welches die Teilchen in Abhängigkeit von ihrem y-Spin in Richtung der y-Achse nach oben bzw. nach unten ablenkt. Jeder der beiden entstehenden Teilstrahlen durchquert anschließend ein zweites Spin-Filter, das die Teilchen in Abhängigkeit von ihrem z-Spin in Richtung der z-Achse nach hinten bzw. nach vorn ablenkt.

Nach dem Passieren der beiden Filter wird jedes Elektron durch eine entsprechende Vorrichtung aufgefangen und sein Ort wird registriert. Dies geschieht in einer solchen Weise, dass die Information von einem makroskopischen Subjekt zu einem Zeitpunkt t abgelesen werden kann.

Wir nehmen idealisierend an, dass die Quelle so konstruiert ist, dass sie im betrachteten Zeitraum genau ein Elektron aussendet. Es sei Q das Subsystem, welches dem Spin dieses Elektrons entspricht. Der zugehörige Hilbertraum \mathcal{H}_Q ist dann zweidimensional und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit \mathbb{C}^2 identifiziert werden. Bei passender Wahl der Basis entsprechen die Vektoren

$$y_+ := (1, 0)^*$$

und

$$y_- := (0, 1)^*$$

den Richtungen "up" bzw. "down" des y-Spins (d.h. des Spins in y-Richtung) und außerdem

$$z_+ := (1, 1)^*$$

und

$$z_- := (1, -1)^*$$

den Richtungen "up" bzw. "down" des z-Spins. (Es spielt keine Rolle, dass die Vektoren z_+ und z_- nicht auf den Betrag Eins normiert sind.)

Es seien

$$Y'' := [y_+]$$

$$Z'' := [z_+]$$

die zugehörigen (eindimensionalen) Unterräume von \mathcal{H}_Q und

$$Y' := \alpha_Q(Y'')$$

$$Z' := \alpha_Q(Z'')$$

die entsprechenden Unterräume von \mathcal{H} , dem Hilbertraum des Universums. Ferner seien τ_y und τ_z Zeitpunkte, zu denen sich das Elektron vor dem ersten bzw. vor dem zweiten Filter befindet.

Die Registrierung der Messergebnisse führt zu makroskopischen "Dokumenten" (E', t) für das Ereignis (Y', τ_y) und (F', t) für das Ereignis (Z', τ_z) .

Wir setzen:

$$Y := U_{-\tau_y} Y'$$

$$Z := U_{-\tau_z} Z'$$

sowie

$$E := U_{-t} E'$$

$$F := U_{-t} F'$$

Wenn der Operator L die Voraussetzungen des Experiments beschreibt, so lauten die Messbeziehungen:

$$(1) \pi_Y L = \pi_E L$$

$$(2) \pi_Z L = \pi_F L$$

Die Beziehung (2) besteht unabhängig von dem Ergebnis der vorangegangenen Messung des y-Spins. Es gilt daher auch:

$$(3) \pi_Z \pi_E L = \pi_F \pi_E L$$

Da der y-Spin beim Durchlaufen des ersten Filters keine Änderung erfährt (und zwar unabhängig vom ursprünglichen Spin-Zustand des Elektrons), gelten mit

$$Y_Z := U_{-\tau_z} Y'$$

die Gleichungen

$$(*) \pi_{Y_Z} L = \pi_Y L$$

und

$$(**) \pi_{Y_Z} \pi_Z L = \pi_Y \pi_Z L$$

Wäre nun die Messbeziehung zwischen dem y-Spin "up" und dem Ereignis (E',t) auch unabhängig vom Ergebnis der nachfolgenden Messung des z-Spins, so müsste darüber hinaus gelten:

$$(4) \pi_Y \pi_F L = \pi_E \pi_F L$$

Wir wollen zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Aus den Beziehungen (1) bis (4) folgt

$$\begin{aligned} \pi_Y \pi_Z L &= \pi_Y \pi_F L && \text{(mit (2))} \\ &= \pi_E \pi_F L && \text{(mit (4))} \\ &= \pi_F \pi_E L && \text{(da E und F vertauschbar sind)} \\ &= \pi_Z \pi_E L && \text{(mit (3))} \\ &= \pi_Z \pi_Y L && \text{(mit (1))} \end{aligned}$$

und somit die Beziehung

$$(5) \pi_Y \pi_Z L = \pi_Z \pi_Y L$$

Mit (**) folgt daraus

$$\pi_{Y_Z} \pi_Z L = \pi_Z \pi_Y L$$

und mit (*) erhalten wir

$$(6) \pi_{Y_z} \pi_Z L = \pi_Z \pi_{Y_z} L$$

Aufgrund der Definition von Y_z und Z folgt

$$U_{-\tau_z} \pi_{Y'} U_{\tau_z} U_{-\tau_z} \pi_Z U_{\tau_z} L = U_{-\tau_z} \pi_Z U_{\tau_z} U_{-\tau_z} \pi_{Y'} U_{\tau_z} L$$

und mit

$$K := U_{\tau_z} L$$

erhalten wir

$$\pi_{Y'} \pi_Z K = \pi_Z \pi_{Y'} K$$

und folglich

$$\text{tr}_Q[\pi_{Y'} \pi_Z K K^* \pi_Z \pi_{Y'}] = \text{tr}_Q[\pi_Z \pi_{Y'} K K^* \pi_{Y'} \pi_Z]$$

Mittels L.39.6 erhalten wir daraus:

$$\pi_{Y''} \pi_Z'' \text{tr}_Q[K K^*] \pi_Z'' \pi_{Y''} = \pi_Z'' \pi_{Y''} \text{tr}_Q[K K^*] \pi_{Y''} \pi_Z''$$

Da Y'' und Z'' zwei verschiedene eindimensionale Unterräume von \mathcal{H}_Q sind, folgt mit L.39.7, dass auf beiden Seiten der Gleichung der Null-Operator steht. Dieser Fall ist aber ausgeschlossen, wenn wir annehmen, dass unter den durch L beschriebenen Voraussetzungen sowohl der y -Spin "up" als auch der z -Spin "up" auftreten kann.

Damit ist gezeigt, dass die Messbeziehung zwischen dem y -Spin "up" und dem Messergebnis (E', t) nicht unabhängig sein kann vom Ergebnis der nachfolgenden Messung des z -Spins. **QED**

Wie in Kapitel 34 seien

$$K' := \{1, \dots, q\}$$

$$K'' := \{q+1, \dots, n\}$$

$$J := K' \cup K''$$

und es sei

$$k : D \rightarrow K''$$

eine Bijektion zwischen den beiden Indexbereichen D und K'' .

Mit den dort verwendeten Bezeichnungen ist

$$\mathcal{W}_1 = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} \mid \forall j \in K', \sigma(j) = 1 \}$$

und für alle $\sigma \in \mathcal{W}_1$ gelten:

$$\pi_\sigma = \pi_{A_n; \sigma(n)} \cdots \pi_{A_1; \sigma(1)}$$

$$M_\sigma = \bigcap_{k \in J} A_{k; \sigma(k)}$$

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR} \quad (\text{vgl. T.29.3})$$

Für alle $\beta \in \mathcal{B}$ ist $\sigma_\beta \in \mathcal{W}_1$ mit

$$\sigma_\beta(k(r,s)) = 1 \quad \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s = \beta(r)$$

$$\sigma_\beta(k(r,s)) = 0 \quad \text{für alle } (r,s) \in D \text{ mit } s \neq \beta(r)$$

und es gelten

$$q_\beta = \text{tr } \pi_{\sigma_\beta} \pi_{UR}$$

$$p_\beta = q_\beta / \bar{q}$$

sowie

$$\bar{q} = \text{tr } LL^* \quad (\text{vgl. T.34.25})$$

Für alle $r \in \{0, \dots, R\}$ und $\beta \in \mathcal{B}_r$ seien

$$\mathcal{G}_{\beta,r} := ((E_1, t_1), \dots, (E_q, t_q), (E_{1,\beta(1)}, t_{1,\beta(1)}), \dots, (E_{r,\beta(r)}, t_{r,\beta(r)}))$$

$$Y_{\beta,r} := \langle A_{1,\beta(1)} \rangle \wedge \dots \wedge \langle A_{r,\beta(r)} \rangle$$

Für das Folgende seien $\underline{r} \in \{0, \dots, R\}$ und $\underline{\beta} \in \mathcal{B}_r$ fest gewählt. Hierzu seien

$$\underline{D} := \{ (r,s) \in D \mid r \leq \underline{r} \}$$

$$\underline{J} := K' \cup \{ k(r,s) \mid (r,s) \in \underline{D} \}$$

In Analogie zu σ_β sei

$$\underline{\sigma} : \underline{J} \rightarrow \{0,1\}$$

definiert durch:

$$\underline{\sigma}(j) := 1 \quad \text{für alle } j \in K'$$

$$\underline{\sigma}(k(r,s)) := 1 \quad \text{für } (r,s) \in \underline{D} \text{ mit } s = \underline{\beta}(r)$$

$$\underline{\sigma}(k(r,s)) := 0 \quad \text{für } (r,s) \in \underline{D} \text{ mit } s \neq \underline{\beta}(r)$$

Außerdem sei

$$\pi_{\underline{\sigma}} := \prod_{j \in \underline{J}} \pi_{A_j; \underline{\sigma}(j)}$$

wobei das Produkt in der Reihenfolge absteigender Elemente von $\underline{J} \subset J$ gebildet wird, sowie

$$\underline{W} := \{ \sigma \in \mathcal{W}_1 \mid \sigma|_{\underline{J}} = \underline{\sigma} \}$$

$$\mathcal{B}' := \{ \beta \in \mathcal{B} \mid \beta|_{\{1, \dots, \underline{r}\}} = \underline{\beta} \}$$

L.39.8 Es gilt

$$\sum_{\sigma \in \underline{W}} \pi_\sigma = \pi_{\underline{\sigma}}$$

Beweis: Es wird zunächst der Fall betrachtet, dass \underline{J} ein Anfangsstück von J ist, d.h. es sei $\underline{J} = \{1, \dots, \underline{n}\}$ mit passendem $\underline{n} \in \mathbb{N}$. Hierzu sei

$$\mathcal{W}_+ := \{ \sigma' \mid \sigma' : J \setminus \underline{J} \rightarrow \{0,1\} \}$$

die Menge aller Belegungen auf $J \setminus \underline{J}$. Es ist dann

$$\underline{W} = \{ \underline{\sigma} \cup \sigma' \mid \sigma' \in \mathcal{W}_+ \}$$

wobei $\underline{\sigma} \cup \sigma'$ die Belegung bezeichnet, die auf \underline{J} mit $\underline{\sigma}$ und auf $J \setminus \underline{J}$ mit σ' übereinstimmt.

Für alle j ist:

$$\begin{aligned}\pi_{A_j;1} + \pi_{A_j;0} &= \pi_{A_j} + \pi_{(A_j)^\perp} \\ &= I_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\pi_{\underline{\sigma}} &= \prod_{j=\underline{n}..1} \pi_{A_j;\underline{\sigma}(j)} \\ &= \prod_{j=\underline{n}..1} (\pi_{A_j;1} + \pi_{A_j;0}) \prod_{j=\underline{n}..1} \pi_{A_j;\underline{\sigma}(j)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathcal{W}_+} \prod_{j=\underline{n}..1} \pi_{A_j;\sigma'(j)} \prod_{j=\underline{n}..1} \pi_{A_j;\underline{\sigma}(j)} \\ &= \sum_{\sigma \in \underline{\mathcal{W}}} \prod_{j=\underline{n}..1} \pi_{A_j;\sigma(j)} \\ &= \sum_{\sigma \in \underline{\mathcal{W}}} \pi_{\sigma}\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall kann analog bewiesen werden, indem man die auftretenden Produkte in der hierfür erforderlichen Reihenfolge schreibt. **QED**

L.39.9 Es seien G_{rs} Unterräume von \mathcal{H} mit

$$\forall_{(r,s) \in \underline{D}} [s = \underline{\beta}(r) \Rightarrow G_{rs} = A_{rs} \text{ und } s \neq \underline{\beta}(r) \Rightarrow G_{rs} \in \{(A_{rs})^\perp, \mathcal{H}\}]$$

Dann gilt:

$$\left[\prod_{(r,s) \in \underline{D}} \pi_{G_{rs}} \right] L = L_{\underline{\beta}, \underline{I}}$$

Bemerkung: Auf die Reihenfolge der Faktoren in dem angegebenen Produkt kommt es wegen L.39.2 nicht an.

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv über

$$N := \# \{ (r,s) \in \underline{D} \mid s \neq \underline{\beta}(r) \wedge G_{rs} \neq \mathcal{H} \}$$

Für $N = 0$ ist die Behauptung aufgrund der Definition von $L_{\underline{\beta}, \underline{I}}$ trivial. Es sei also $N > 0$. Hierzu sei $(r,s) \in \underline{D}$ mit $s \neq \underline{\beta}(r)$ und $G_{rs} \neq \mathcal{H}$. Es ist dann $G_{rs} = (A_{rs})^\perp$. Mit $s' := \underline{\beta}(r)$ gilt $G_{rs'} = A_{rs'}$ und es ist $s \neq s'$. Aus (MB) folgt nun ebenso wie beim Beweis von T.39.4 die Gleichung

$$\pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs'}} L = 0$$

Da es in dem angegebenen Produkt nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, gilt mit

$$M := \prod_{(r,s) \in \underline{D} \setminus \{(r,s), (r,s')\}} \pi_{G_{rs}}$$

die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \left[\prod_{(r,s) \in \underline{D}} \pi_{G_{rs}} \right] L &= M \pi_{(A_{rs})^\perp} \pi_{A_{rs}'} L \\
 &= M \pi_{\mathcal{H}} \pi_{A_{rs}'} L - M \pi_{A_{rs}} \pi_{A_{rs}'} L \\
 &= M \pi_{\mathcal{H}} \pi_{A_{rs}'} L \\
 &= L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt aufgrund der Induktionsannahme, da das Produkt

$$M \pi_{\mathcal{H}} \pi_{A_{rs}'} L$$

einen Faktor weniger aufweist, der von $\pi_{\mathcal{H}}$ verschieden ist. **QED**

L.39.10 Es gilt

$$\pi_{\underline{\sigma}} \pi_{UR} = L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}$$

Beweis: Die Aussage stellt einen speziellen Fall von L.39.9 dar. Man erhält ihn, indem man für alle $(r,s) \in \underline{D}$ mit $s \neq \underline{\beta}(r)$ setzt:

$$G_{rs} := (A_{rs})^\perp$$

QED

L.39.11 Es gilt

$$\text{tr } L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* = \text{tr } L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}$$

Beweis: Mit

$$A := \bigcap_{r \leq \underline{\Gamma}} A_{r, \underline{\beta}(r)} \cap \bigcap_{j \in K'} \pi_{A_j}$$

ist

$$\begin{aligned}
 L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} &= \pi_{A_{\underline{\Gamma}, \underline{\beta}(\underline{\Gamma})}} \cdots \pi_{A_{1, \underline{\beta}(1)}} \pi_{A_q} \cdots \pi_{A_1} \pi_{UR} \\
 &= \pi_A \pi_{UR} \quad (\text{wie im Beweis zu L.39.1})
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{tr } L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* &= \text{tr } \pi_A \pi_{UR} \pi_{UR} \pi_A \\
 &= \text{tr } \pi_A \pi_{UR} \\
 &= \text{tr } L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}
 \end{aligned}$$

QED

L.39.12 Es gilt

$$(Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} \wedge N) = \exists \beta \in \mathcal{B}' N_\beta$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
 \omega \in (Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} \wedge N) &\Leftrightarrow (\omega \in Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}) \wedge (\omega \in N) \\
 &\Leftrightarrow \forall_{r \leq \underline{\Gamma}} (\omega \in \langle A_{r, \underline{\beta}(r)} \rangle) \wedge \forall_r \exists_s (\omega \in \langle A_{rs} \rangle)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{B}' \forall r (\omega \in \langle A_{r, \beta(r)} \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{B}' \omega \in (\forall r \langle A_{r, \beta(r)} \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{B}' \omega \in N_\beta$$

QEDL.39.13 Es gilt

$$\underline{\mathcal{W}} \cap \{ \sigma_\beta \mid \beta \in \mathcal{B} \} = \{ \sigma_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}' \}$$

Beweis: Aufgrund der Definition von \mathcal{B}' genügt es, für beliebige $\beta \in \mathcal{B}$ zu zeigen:

$$\sigma_\beta \in \underline{\mathcal{W}} \Leftrightarrow \beta|_{\{1, \dots, \underline{r}\}} = \underline{\beta}$$

Aufgrund der Definition von σ_β ist:

$$\begin{aligned} \forall j \in K' \sigma_\beta(j) = 1 \quad \text{und} \quad \forall_{(r,s) \in D} [s = \beta(r) \Rightarrow \sigma_\beta(k(r,s)) = 1] \\ \text{und} \quad \forall_{(r,s) \in D} [s \neq \beta(r) \Rightarrow \sigma_\beta(k(r,s)) = 0] \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $\underline{\mathcal{W}}$ und $\underline{\sigma}$ ist ferner:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta \in \underline{\mathcal{W}} &\Leftrightarrow (\sigma_\beta)|_{\underline{J}} = \underline{\sigma} \\ &\Leftrightarrow \forall_{(r,s) \in \underline{D}} [s = \underline{\beta}(r) \Rightarrow \sigma_\beta(k(r,s)) = 1] \text{ und} \\ &\quad \forall_{(r,s) \in \underline{D}} [s \neq \underline{\beta}(r) \Rightarrow \sigma_\beta(k(r,s)) = 0] \end{aligned}$$

Wegen $\underline{D} \subset D$ und $\forall_{(r,s) \in \underline{D}} (r \leq \underline{r})$ folgt aus $\beta|_{\{1, \dots, \underline{r}\}} = \underline{\beta}$ unmittelbar $\sigma_\beta \in \underline{\mathcal{W}}$.

Ist umgekehrt $\sigma_\beta \in \underline{\mathcal{W}}$, so folgt für alle $r \leq \underline{r}$:

$$\begin{aligned} s = \underline{\beta}(r) &\Leftrightarrow \sigma_\beta(k(r,s)) = 1 \\ &\Leftrightarrow s = \beta(r) \end{aligned}$$

und somit $\underline{\beta}(r) = \beta(r)$. Folglich ist dann $\beta|_{\{1, \dots, \underline{r}\}} = \underline{\beta}$

QEDL.39.14 Es gilt

$$\sigma \in \underline{\mathcal{W}} \wedge \sigma \notin \{ \sigma_\beta \mid \beta \in \mathcal{B} \} \Rightarrow \pi_\sigma \pi_{UR} = 0$$

Beweis: Die Belegung σ erfülle die genannten Voraussetzungen. Wegen $\underline{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}_1$ folgt mit L.34.7:

$$\pi_{M_\sigma} \pi_{UR} = 0$$

Nach T.29.3 ist

$$\pi_\sigma \pi_{UR} = \pi_{M_\sigma} \pi_{UR}$$

Daraus folgt die Behauptung.

QED

L.39.15 Es gilt

$$\operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_{\beta}$$

Beweis: Es ist

$$\operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* = \operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} \quad (\text{L.39.11})$$

$$= \operatorname{tr} \pi_{\underline{\sigma}} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{L.39.10})$$

$$= \sum_{\sigma \in \underline{\mathcal{W}}} \operatorname{tr} \pi_{\sigma} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{L.39.8})$$

$$= \sum_{\sigma \in \underline{\mathcal{W}} \cap \{\sigma_{\beta} | \beta \in \mathcal{B}'\}} \operatorname{tr} \pi_{\sigma} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{L.39.14})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} \operatorname{tr} \pi_{\sigma_{\beta}} \pi_{\text{UR}} \quad (\text{L.39.13})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_{\beta}$$

QED

L.39.16 Es gilt

$$P_e(Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}) = \operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* / \operatorname{tr} LL^*$$

Beweis: Es ist (da $Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} \in \mathcal{A}_e$)

$$P_e(Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}) = \mu_e(Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}}) = \mu_e(Y_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} \wedge N) \quad (\text{da } \mu_e \text{ auf } N \text{ konzentriert ist})$$

$$= \mu_e(\exists \beta \in \mathcal{B}' N_{\beta}) \quad (\text{mit L.39.12})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} p_{\beta} \quad (\text{T.34.17})$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}'} q_{\beta} / \bar{q} = \operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* / \bar{q} \quad (\text{L.39.15})$$

$$= \operatorname{tr} L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}} (L_{\underline{\beta}, \underline{\Gamma}})^* / \operatorname{tr} LL^* \quad (\text{T.34.25}) \quad \mathbf{QED}$$

L.39.17 Für jeden Operator W auf \mathcal{H} und jeden Unterraum $F < \mathcal{H}_Q$ gilt mit

$C := \alpha_Q(F)$ die Gleichung:

$$(+)\operatorname{tr} \pi_C W = \operatorname{tr} \pi_F \operatorname{tr}_Q[W]$$

Beweis: Mit der im Beweis zu L.39.6 verwendeten Matrixdarstellung

$$W = (W_{kl})_{kl}$$

erhält man (für jeden Operator)

$$(*)\operatorname{tr} W = \operatorname{tr} (W_{kl})_{kl}$$

$$= \sum_k \operatorname{tr} W_{kk}$$

$$= \operatorname{tr} \sum_k W_{kk}$$

$$= \operatorname{tr} \operatorname{tr}_Q[W]$$

Ebenso wie im Beweis zu L.39.6 kann man zeigen:

$$\text{tr}_Q[\pi_C W] = \pi_F \text{tr}_Q[W]$$

Durch Anwendung von (*) auf $\pi_C W$ erhalten wir folglich:

$$\begin{aligned} \text{tr } \pi_C W &= \text{tr } \text{tr}_Q[\pi_C W] \\ &= \text{tr } \pi_F \text{tr}_Q[W] \end{aligned}$$

QED

Theorem T.39.7 Für alle $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$ gilt:

$$(PR) P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } \pi_{F_{rs}} W_{Q; \tau_r | \mathcal{G}_{\beta, r-1}}$$

Beweis: Es sei $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$. Dazu sei $\beta' \in \mathcal{B}_r$ definiert durch

$$\beta' |_{\{1, \dots, r-1\}} = \beta$$

und

$$\beta'(r) = s$$

Mit

$$L' := L_{\beta, r-1}$$

und

$$L'' := L_{\beta', r}$$

erhalten wir wegen L.39.16:

$$P_e(Y_{\beta, r-1}) = \text{tr } L'(L')^* / \text{tr } LL^*$$

$$P_e(Y_{\beta', r}) = \text{tr } L''(L'')^* / \text{tr } LL^*$$

Aufgrund der Definitionen gelten:

$$L'' = \pi_{A_{rs}} L'$$

$$Y_{\beta', r} = \langle A_{rs} \rangle \wedge Y_{\beta, r-1}$$

Mit

$$W' := L'(L')^* / \text{tr } L'(L')^*$$

und

$$(W')_{\tau_r} := U_{\tau_r} W' U_{-\tau_r}$$

ist aufgrund der Definition des bedingten Quantenzustands

$$W_{Q; \tau_r | \mathcal{G}_{\beta, r-1}} = \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}]$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} P_e(\langle A_{rs} \rangle | Y_{\beta, r-1}) &= P_e(\langle A_{rs} \rangle \wedge Y_{\beta, r-1}) / P_e(Y_{\beta, r-1}) \\ &= P_e(Y_{\beta', r}) / P_e(Y_{\beta, r-1}) \\ &= \text{tr } L''(L'')^* / \text{tr } L'(L')^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr } \pi_{A_{rs}} L'(L')^* \pi_{A_{rs}} / \text{tr } L'(L')^* \\
 &= \text{tr } \pi_{A_{rs}} W' \pi_{A_{rs}} \\
 &= \text{tr } \pi_{A_{rs}} W' \\
 &= \text{tr } \pi_{B_{rs}} W' && \text{(mit (MB))} \\
 &= \text{tr } U_{-\tau_r} \pi_{C_{rs}} U_{\tau_r} W' && \text{(da } B_{rs} = U_{-\tau_r} C_{rs}) \\
 &= \text{tr } \pi_{C_{rs}} U_{\tau_r} W' U_{-\tau_r} \\
 &= \text{tr } \pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \\
 &= \text{tr } \pi_{F_{rs}} \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}] && \text{(mit L.39.17, da } C_{rs} = \alpha_Q(F_{rs})) \\
 &= \text{tr } \pi_{F_{rs}} W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}} && \text{(Definition des Zustands)}
 \end{aligned}$$

QED

Es sei $(r,s) \in D$ und $\beta \in \mathcal{B}_{r-1}$. Dazu sei $\beta' \in \mathcal{B}_r$ definiert durch

$$\beta'|_{\{1,\dots,r-1\}} = \beta$$

und

$$\beta'(r) = s$$

Ferner seien:

$$\underline{W}' := W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta,r-1}}$$

$$\underline{W}'' := W_{Q;\tau_r|\mathcal{G}_{\beta',r}}$$

Theorem T.39.8 Mit $F := F_{rs}$ gilt die Gleichung

$$(ST) \quad \underline{W}'' = \pi_F \underline{W}' \pi_F / \text{tr}(\pi_F \underline{W}' \pi_F)$$

Beweis: Es seien

$$L' := L_{\beta,r-1}$$

$$L'' := L_{\beta',r}$$

$$W' := L'(L')^* / \text{tr } L'(L')^*$$

$$W'' := L''(L'')^* / \text{tr } L''(L'')^*$$

$$(W')_{\tau_r} := U_{\tau_r} W' U_{-\tau_r}$$

$$(W'')_{\tau_r} := U_{\tau_r} W'' U_{-\tau_r}$$

Aufgrund der Definitionen gelten:

$$\underline{W}' = \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}]$$

$$\underline{W}'' = \text{tr}_Q[(W'')_{\tau_r}]$$

sowie

$$\begin{aligned} L'' &= \pi_{A_{rs}} L' \\ &= \pi_{B_{rs}} L' \quad (\text{mit (MB)}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$W'' = \pi_{B_{rs}} W' \pi_{B_{rs}} / \text{tr}(\pi_{B_{rs}} W' \pi_{B_{rs}})$$

und wegen $B_{rs} = U_{-\tau_r} C_{rs}$ erhalten wir:

$$(W'')_{\tau_r} = \pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}} / \text{tr}(\pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}})$$

Wie im Beweis zu L.39.17 kann für jeden Operator W gezeigt werden:

$$\text{tr } W = \text{tr } \text{tr}_Q[W]$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \underline{W}'' &= \text{tr}_Q[(W'')_{\tau_r}] \\ &= \text{tr}_Q[\pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}}] / \text{tr } \text{tr}_Q[\pi_{C_{rs}} (W')_{\tau_r} \pi_{C_{rs}}] \\ &= \pi_F \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}] \pi_F / \text{tr}(\pi_F \text{tr}_Q[(W')_{\tau_r}] \pi_F) \\ &\quad (\text{mit L.39.6 wegen } C_{rs} = \alpha_Q(F)) \\ &= \pi_F \underline{W}' \pi_F / \text{tr}(\pi_F \underline{W}' \pi_F) \end{aligned}$$

QED

B45. Symmetrien in der Quantentheorie

Es sei \mathcal{K} ein diskreter Konfigurationsraum (d.h. \mathcal{K} sei eine endliche oder abzählbare Menge) und μ ein Maß auf der Potenzmenge von \mathcal{K} . Dazu sei

$$\mathcal{H} := \{ \varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 d\mu < \infty \}$$

der zugehörige Hilbertraum mit dem Skalarprodukt:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{x \in \mathcal{K}} \varphi^*(x) \psi(x) \mu(dx) \quad (\text{für } \varphi, \psi \in \mathcal{H})$$

Dabei ist $\varphi^*(x)$ die komplex Konjugierte zu $\varphi(x)$.

Es sei G eine (Symmetrie-) Gruppe von Bijektionen auf \mathcal{K} , und μ sei diesbezüglich symmetrisch, d.h. es gelte:

$$\mu = \mu \circ g \quad (\text{für alle } g \in G)$$

Zu jedem $g \in G$ sei $U_g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definiert durch:

$$U_g(\varphi) := \varphi \circ g^{-1} \quad (\text{für alle } \varphi \in \mathcal{H})$$

Damit sei:

$$\mathcal{G} := \{ U_g \mid g \in G \}$$

L.45.1 Zu jedem $g \in G$ ist U_g ein unitärer Operator auf \mathcal{H} .

Beweis: Es sei $g \in G$. Die Linearität von U_g ist leicht zu zeigen. Zu Elementen $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle U_g \varphi, U_g \psi \rangle &= \int_{y \in \mathcal{K}} (U_g \varphi)^*(y) U_g \psi(y) \mu(dy) \\ &= \int_{y \in \mathcal{K}} (\varphi \circ g^{-1})^*(y) (\psi \circ g^{-1})(y) \mu(dy) \\ &= \int_{y \in \mathcal{K}} \varphi^*(g^{-1}(y)) \psi(g^{-1}(y)) \mu(dy) \\ &= \int_{x \in \mathcal{K}} \varphi^*(x) \psi(x) (\mu \circ g)(dx) \\ &= \int_{x \in \mathcal{K}} \varphi^*(x) \psi(x) \mu(dx) \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass U_g unitär ist.

QED

Theorem T.45.1 \mathcal{G} ist eine Gruppe unitärer Operatoren auf \mathcal{H} .

Beweis: Für alle $g, g' \in \mathcal{G}$ sowie $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} U_{g \circ g'}(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ g')^{-1} \\ &= \varphi \circ (g')^{-1} \circ g^{-1} \\ &= U_g(\varphi \circ (g')^{-1}) \\ &= U_g(U_{g'}(\varphi)) \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $g, g' \in \mathcal{G}$ die Gleichung:

$$(*) \quad U_{g \circ g'} = U_g U_{g'}$$

Mit U_g und $U_{g'}$ gehört also auch $U_g U_{g'}$ zu \mathcal{G} .

Ist e das neutrale Element von G (d.h. die identische Abbildung auf \mathcal{K}), so ist U_e der Einheitsoperator I auf \mathcal{H} . Somit enthält \mathcal{G} das neutrale Element.

Ist g^{-1} das inverse Element von G , so gilt wegen

$$\begin{aligned} U_g U_{g^{-1}} &= U_{(g \circ g^{-1})} \quad (\text{mit } (*)) \\ &= U_e \\ &= I \end{aligned}$$

die Gleichung

$$U_{g^{-1}} = (U_g)^{-1}$$

Folglich enthält \mathcal{G} zu jedem Element auch das Inverse. Damit ist gezeigt, dass \mathcal{G} eine Gruppe ist. **QED**

Es sei nun \mathcal{K} ein beliebiger Konfigurationsraum, d.h. eine beliebige Menge mit einer σ -Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ auf \mathcal{K} und einem Maß μ , das auf $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ definiert ist. Dazu sei

$$\mathcal{H}_a := \{ \varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int |\varphi|^2 d\mu < \infty \}$$

und für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ sei

$$\langle \varphi, \psi \rangle_a := \int_{x \in \mathcal{K}} \varphi^*(x) \psi(x) \mu(dx)$$

Auf \mathcal{H}_a wird die Äquivalenzrelation " \sim " definiert durch

$$\varphi \sim \varphi' : \Leftrightarrow \mu(\{x \in \mathcal{K} \mid \varphi(x) \neq \varphi'(x)\}) = 0$$

und mit

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_a / \sim$$

wird der Hilbertraum \mathcal{H} gebildet als die Menge der Äquivalenzklassen von Elementen von \mathcal{H} bezüglich " \sim ".

Wegen

$$(\varphi \sim \varphi') \wedge (\psi \sim \psi') \Rightarrow \langle \varphi, \psi \rangle_a = \langle \varphi', \psi' \rangle_a$$

lässt sich das Skalarprodukt auf \mathcal{H} eindeutig definieren.

Es sei nun G eine (Symmetrie-) Gruppe aus bijektiven messbaren Abbildungen auf \mathcal{K} , so dass für alle $g \in G$ gilt:

$$\mu = \mu \circ g$$

Wie zuvor kann (zu jedem $g \in G$) definiert werden:

$$U_g(\varphi) := \varphi \circ g^{-1} \quad (\text{für alle } \varphi \in \mathcal{H}_a)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi &\Rightarrow \mu(\{x \in \mathcal{K} \mid \varphi(x) \neq \psi(x)\}) = 0 \\ &\Rightarrow (\mu \circ g)(\{x \in \mathcal{K} \mid \varphi(x) \neq \psi(x)\}) = 0 \\ &\Rightarrow \mu(\{y \in \mathcal{K} \mid \varphi(g^{-1}(y)) \neq \psi(g^{-1}(y))\}) = 0 \\ &\Rightarrow \mu(\{y \in \mathcal{K} \mid U_g(\varphi)(y) \neq U_g(\psi)(y)\}) = 0 \\ &\Rightarrow U_g(\varphi) \sim U_g(\psi) \end{aligned}$$

ist U_g auch auf \mathcal{H} eindeutig definierbar. Für $\mathcal{G} := \{U_g \mid g \in G\}$ gilt dann:

Theorem T.45.2 \mathcal{G} ist eine Gruppe unitärer Operatoren auf \mathcal{H} .

Beweis: Die Beweise von L.45.1 und T.45.1 können problemlos auf diesen Fall übertragen werden. **QED**

Es sei \mathcal{H}_1 ein separabler Hilbertraum und $(b_k)_{k \in \mathcal{K}_1}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 . Dazu sei

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1$$

das n-fache Tensorprodukt von \mathcal{H}_1 mit sich selbst. Die Menge aller Tensorprodukte der Form

$$b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n} \quad (\text{für } k_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, k_n \in \mathcal{K}_1)$$

stellt eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} dar.

Es sei

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

bijektiv, also eine Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$. Dazu sei U_σ jener Operator auf \mathcal{H} , welcher jedes der Tensorprodukte

$$b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n} \quad (\text{mit } k_1 \in \mathcal{K}_1, \dots, k_n \in \mathcal{K}_1)$$

abbildet auf

$$b_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes b_{k_{\sigma(n)}}$$

Ferner sei

$$U_{\text{ferm}, \sigma} := (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} U_\sigma$$

Theorem T.45.3 Die unitären Operatoren U_σ und $U_{\text{ferm}, \sigma}$ sind unabhängig davon, welche Orthonormalbasis $(b_k)_k$ des Hilbertraums \mathcal{H}_1 bei der Definition zugrunde gelegt wurde.

Beweis: Wegen

$$U_{\text{ferm}, \sigma} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} U_\sigma$$

genügt es, dies für U_σ zu beweisen. U_σ bildet das Basiselement

$$b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n}$$

ab auf

$$b_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes b_{k_{\sigma(n)}}$$

Es sei nun $(c_j)_j$ eine zweite Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 und V_σ sei definiert als jener Operator, der jedes

$$c_{j_1} \otimes \dots \otimes c_{j_n}$$

abbildet auf

$$c_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes c_{j_{\sigma(n)}}$$

Jedes der b_k hat eine Darstellung

$$b_k = \sum_j \beta_{kj} c_j$$

Damit ist

$$\begin{aligned} V_\sigma(b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n}) &= V_\sigma(\sum_{j_1} \beta_{k_1 j_1} c_{j_1} \otimes \dots \otimes \sum_{j_n} \beta_{k_n j_n} c_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \beta_{k_1 j_1} \dots \beta_{k_n j_n} V_\sigma(c_{j_1} \otimes \dots \otimes c_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \beta_{k_1 j_1} \dots \beta_{k_n j_n} c_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes c_{j_{\sigma(n)}} \\ &= \sum_{j_{\sigma(1)}} \dots \sum_{j_{\sigma(n)}} \beta_{k_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \dots \beta_{k_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}} c_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes c_{j_{\sigma(n)}} \\ &= \left(\sum_{j_{\sigma(1)}} \beta_{k_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} c_{j_{\sigma(1)}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\sum_{j_{\sigma(n)}} \beta_{k_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}} c_{j_{\sigma(n)}} \right) \\ &= b_{k_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes b_{k_{\sigma(n)}} \\ &= U_\sigma(b_{k_1} \otimes \dots \otimes b_{k_n}) \end{aligned}$$

und es folgt:

$$V_\sigma = U_\sigma$$

QED

Für das Folgende sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum, \mathcal{G} eine endliche Gruppe unitärer Operatoren und H ein selbstadjungierter (Hamilton-) Operator auf \mathcal{H} , für den gilt:

$$U H = H U \quad (\text{für alle } U \in \mathcal{G})$$

Für das Bewegungsgesetz gilt dann:

$$U U_t = U_t U \quad (\text{für alle } U \in \mathcal{G} \text{ und } t \in T)$$

Ferner sei

$$\mathcal{U}_{\text{sym}} := \{ A \in \mathcal{U} \mid \forall_{U \in \mathcal{G}} U A = A \}$$

die Menge aller symmetrischen Eigenschaften.

L.45.2 Für alle $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ und $t \in T$ gilt:

$$U_t A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

Beweis: Es sei $U \in \mathcal{G}$. Dann ist

$$\begin{aligned} U(U_t A) &= (U U_t) A \\ &= (U_t U) A && \text{(da } U_t \text{ mit } U \text{ vertauschbar ist)} \\ &= U_t(UA) \\ &= U_t A && \text{(da } A \text{ symmetrisch ist)} \end{aligned}$$

Damit ist $U_t A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ gezeigt.

QED

Es sei

$$\mathcal{H}' := \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \forall U \in \mathcal{G} \ U\varphi = \varphi \}$$

die Menge aller symmetrischen Vektoren aus \mathcal{H} und

$$K := [\{ \varphi - U\varphi \mid \varphi \in \mathcal{H} \wedge U \in \mathcal{G} \}]$$

der "Kern" der Symmetrie (wobei [...] die Bildung der linearen Hülle bezeichnet). Offenbar gilt:

$$K = \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} \text{Bild}(I-U)$$

L.45.3 Für alle $U \in \mathcal{G}$ ist:

$$\text{Kern}(I-U) = [\text{Bild}(I-U)]^\perp$$

Beweis:

Zu "<": Es sei $\varphi \in \text{Kern}(I-U)$ und $\psi \in \text{Bild}(I-U)$. Zu zeigen ist dann $\varphi \perp \psi$.

Es sei $\zeta \in \mathcal{H}$ mit $\psi = \zeta - U\zeta$. Damit ist:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, \zeta - U\zeta \rangle \\ &= \langle \varphi, \zeta \rangle - \langle \varphi, U\zeta \rangle \\ &= \langle U\varphi, U\zeta \rangle - \langle \varphi, U\zeta \rangle && \text{(da } U \text{ unitär ist)} \\ &= \langle U\varphi - \varphi, U\zeta \rangle \\ &= \langle 0, U\zeta \rangle && \text{(da } \varphi \in \text{Kern}(I-U) \text{ ist)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

QED ("<")

Zu ">": Es sei $\varphi \perp \text{Bild}(I-U)$. Dazu seien:

$$\begin{aligned} \zeta &:= \varphi - U^{-1}\varphi \\ \psi &:= \zeta - U\zeta \end{aligned}$$

Wegen $\psi \in \text{Bild}(I-U)$ folgt $\varphi \perp \psi$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \varphi, \zeta - U\zeta \rangle \\ &= \langle \varphi, \zeta \rangle - \langle \varphi, U\zeta \rangle \\ &= \langle U\varphi, U\zeta \rangle - \langle \varphi, U\zeta \rangle && \text{(da } U \text{ unitär ist)} \\ &= \langle U\varphi - \varphi, U\zeta \rangle \\ &= \langle U\varphi - \varphi, U\varphi - \varphi \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$U\varphi - \varphi = 0$$

und somit

$$\varphi \in \text{Kern}(I-U)$$

QED (">")

QED

Theorem T.45.4 Es gilt:

$$\mathcal{H}' = \mathbf{K}^\perp$$

Beweis: Es ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \forall U \in \mathcal{G} \ U\varphi = \varphi \} \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{G}} \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid U\varphi = \varphi \} \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{G}} \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid (I-U)\varphi = 0 \} \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{G}} \text{Kern}(I-U) \\ &= \bigcap_{U \in \mathcal{G}} [\text{Bild}(I-U)]^\perp \quad (\text{mit L.45.3}) \\ &= \left[\bigoplus_{U \in \mathcal{G}} \text{Bild}(I-U) \right]^\perp \\ &= \mathbf{K}^\perp \end{aligned}$$

QED

Theorem T.45.5 \mathbf{K} und \mathcal{H}' sind Konstanten der Bewegung.

Beweis: Wegen $\mathcal{H}' = \mathbf{K}^\perp$ genügt es zu zeigen:

$$\forall_t (U_t \mathbf{K} = \mathbf{K})$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} \text{Bild}(I-U) \\ &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} (I-U)(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} U_t \mathbf{K} &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} U_t (I-U)(\mathcal{H}) \\ &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} (I-U)U_t(\mathcal{H}) \quad (\text{wegen } U_t U = U U_t) \\ &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} (I-U)(\mathcal{H}) \\ &= \mathbf{K} \end{aligned}$$

QED

Theorem T.45.6 \mathbf{K} und \mathcal{H}' sind symmetrisch.

Beweis: Da jedes Element von \mathcal{H}' symmetrisch ist, ist auch \mathcal{H}' selbst symmetrisch. Da alle $U \in \mathcal{G}$ unitär sind, gilt dasselbe auch für $(\mathcal{H}')^\perp$, also für \mathbf{K} .

QED

Mit $c := 1/\#\mathcal{G}$ (wobei $\#\mathcal{G}$ die Anzahl der Elemente von \mathcal{G} bezeichnet) sei zu jedem $x \in \mathcal{H}$:

$$\bar{x} := c \sum_{U \in \mathcal{G}} Ux$$

L.45.4 Es gilt:

$$\{ \bar{x} \mid x \in \mathcal{H} \} = \mathcal{K}^\perp$$

Beweis:

Zu " \subset ": Da \mathcal{G} eine Gruppe ist, gilt für jedes $V \in \mathcal{G}$ die Gleichung $V\mathcal{G} = \mathcal{G}$. Für alle $V \in \mathcal{G}$ und $x \in \mathcal{H}$ ist daher:

$$\begin{aligned} V\bar{x} &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} VUx \\ &= c \sum_{U' \in V\mathcal{G}} U'x \\ &= c \sum_{U' \in \mathcal{G}} U'x && \text{(wegen } V\mathcal{G} = \mathcal{G} \text{)} \\ &= \bar{x} \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist somit \bar{x} symmetrisch, also $\bar{x} \in \mathcal{H}' = \mathcal{K}^\perp$. **QED (" \subset ")**

Zu " \supset ": Es sei $\varphi \in \mathcal{K}^\perp$. Wegen $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}'$ ist φ dann symmetrisch, und somit gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} U\varphi \\ &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} U\varphi \\ &= \bar{\varphi} \\ &\in \{ \bar{x} \mid x \in \mathcal{H} \} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \mathbf{QED (" \supset ")} \\ \mathbf{QED} \end{array}$$

L.45.5 Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$(x - \bar{x}) \in \mathcal{K}$$

Beweis: Für jedes $y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle &= \langle c \sum_{U \in \mathcal{G}} Ux, \bar{y} \rangle \\ &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} \langle Ux, \bar{y} \rangle \\ &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} \langle Ux, U\bar{y} \rangle && \text{(da } \bar{y} \in \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}' \text{ wegen L.45.4)} \\ &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} \langle x, \bar{y} \rangle && \text{(da } U \text{ unitär ist)} \\ &= \langle x, \bar{y} \rangle \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle x - \bar{x}, \bar{y} \rangle &= \langle x, \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit:

$$(x-\bar{x}) \perp \bar{y} \quad (\text{für alle } y \in \mathcal{H})$$

$$(x-\bar{x}) \in \{ \bar{y} \mid y \in \mathcal{H} \}^\perp$$

$$= K \quad (\text{mit L.45.4})$$

QED

Theorem T.45.7 K und \mathcal{H}' sind mit allen symmetrischen Eigenschaften vertauschbar.

Beweis: Es sei $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$. Wegen T.45.4 genügt es dann zu zeigen, dass A mit K vertauschbar ist.

Es sei $x \in A$. Dann ist

$$x = (x-\bar{x}) + \bar{x}$$

und

$$\bar{x} \in K^\perp \quad (\text{mit L.45.4})$$

sowie

$$(x-\bar{x}) \in K \quad (\text{mit L.45.5})$$

Wegen $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ ist $Ux \in UA = A$ für alle $U \in \mathcal{G}$. Folglich ist $\bar{x} \in A$ und somit $\bar{x} \in K^\perp \cap A$ sowie $(x-\bar{x}) \in K \cap A$.

Daraus folgt

$$A \subset (K \cap A) \oplus (K^\perp \cap A)$$

und somit

$$A = (K \cap A) \oplus (K^\perp \cap A)$$

Dies aber bedeutet, dass A mit K vertauschbar ist.

QED

Im folgenden gehen wir aus von der Annahme:

$$S \subset \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

und

$$UR \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

Wir definieren das zusätzliche (deterministische) Axiom

$$\text{SYM} := \{ \langle \mathcal{H}' \rangle_0 \}$$

Es sei

$$\text{AX}_+ := \text{AX} \cup \text{SYM}$$

das entsprechend erweiterte Axiomensystem und $\hat{\diamond}_+$ der zugehörige Möglichkeitsoperator.

Es sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine t -zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse. Die t -Zugänglichkeit dieser Folge beruht auf dem Bestehen von Dokumentbezie-

hungen der Form

$$(DB) \pi_{A_k} \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{UR}$$

Wegen des zusätzlichen Gesetzes ist eine Dokumentbeziehung zwischen A_k und D_k schon dann anzunehmen, wenn gilt:

$$(DB') \pi_{A_k} \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{\mathcal{H}'} \pi_{UR} = \pi_{D_k} \pi_{B_m} \cdots \pi_{B_1} \pi_{\mathcal{H}'} \pi_{UR}$$

Theorem T.45.8 Es spielt keine Rolle, an welcher Stelle man den Faktor $\pi_{\mathcal{H}'}$ auf beiden Seiten der Gleichung (DB') einfügt.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass \mathcal{H}' mit den B_j sowie mit A_k , D_k und UR vertauschbar ist. Dazu genügt es (wegen T.45.7) zu zeigen, dass alle diese Unterräume symmetrisch sind.

Für UR gilt dies nach der obigen Voraussetzung. Alle anderen hier auftretenden Unterräume haben die Form

$$A = U_{-\tau} E \quad (\text{mit } \tau \in T)$$

wobei E stets eine symmetrische Eigenschaft ist. (Wenn E nicht eines der E_j oder der ganze Hilbertraum ist, so ist es makroskopisch und folglich symmetrisch.) Wegen L.45.2 ist dann auch A symmetrisch. **QED**

Es sei

$$UR' := UR \cap \mathcal{H}'$$

Theorem T.45.9 Jede bezüglich UR t-zugängliche Folge von Ereignissen ist erst recht t-zugänglich bezüglich UR'.

Beweis: Die t-Zugänglichkeit der betrachteten Folge bzgl. UR bedeutet, dass mit

$$M := \pi_{B_n} \cdots \pi_{B_1}$$

Dokumentbeziehungen der Form

$$\pi_A M \pi_{UR} = \pi_D M \pi_{UR}$$

bestehen. Wegen

$$\begin{aligned} \pi_A M \pi_{UR'} &= \pi_A M \pi_{UR} \pi_{UR'} \\ &= \pi_D M \pi_{UR} \pi_{UR'} \\ &= \pi_D M \pi_{UR'} \end{aligned}$$

bestehen dieselben Beziehungen dann auch bzgl. UR'. Somit ist die Folge auch t-zugänglich bzgl. UR'. **QED**

L.45.6 Für $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \neg \diamond (\forall_j \langle A_j \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \exists D_1, \dots, D_m \in \mathcal{U} \left[D_j \text{ vertauschbar und } \bigcap_j D_j = o \text{ und } \forall_j (A_j < D_j) \right] \end{aligned}$$

Beweis: Die Implikation " \Rightarrow " entspricht T.23.8. Die umgekehrte Implikation " \Leftarrow " folgt unmittelbar aus MON und SEC. **QED**

Analog zu den Axiomen MON, SEC und SG seien:

$$\begin{aligned} \text{MON}_{\text{sym}} & := \{ \langle A, t \rangle_o \rightarrow \langle B, t \rangle_o \mid A, B \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge A < B \wedge t \in T \} \\ \text{SEC}_{\text{sym}} & := \{ \neg (\forall_j \langle A_j, t \rangle_o) \mid A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge \perp_j A_j \wedge t \in T \} \\ \text{SG}_{\text{sym}} & := \{ \langle A, 0 \rangle_o \leftrightarrow \langle U_t A, t \rangle_o \mid A \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \wedge t \in T \} \end{aligned}$$

Hierzu sei

$$\text{AX}_{\text{sym}} := \text{MON}_{\text{sym}} \cup \text{SEC}_{\text{sym}} \cup \text{SG}_{\text{sym}}$$

das auf symmetrische Eigenschaften eingeschränkte Axiomensystem. Offensichtlich gilt:

$$\text{AX}_{\text{sym}} \subset \text{AX}$$

Es sei

$$\Omega_{\text{sym}} := \bigcap (\text{AX}_{\text{sym}})$$

und \diamond_{sym} der zu Ω_{sym} gehörige Möglichkeitsoperator.

In Analogie zu AX_+ und \diamond_+ sei ferner

$$\text{AX}_{\text{sym},+} := \text{AX}_{\text{sym}} \cup \text{SYM}$$

und $\diamond_{\text{sym},+}$ der dazu gehörende Möglichkeitsoperator.

L.45.7 Für $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \neg \diamond_{\text{sym}} (\forall_j \langle A_j \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \exists D_1, \dots, D_m \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \left[D_j \text{ vertauschbar und } \bigcap_j D_j = o \text{ und } \forall_j (A_j < D_j) \right] \end{aligned}$$

Beweis:

Zu " \Rightarrow ": Es sei

$$\omega := \{ (G, t) \in \mathcal{E} \mid G \in \mathcal{U}_{\text{sym}} \text{ und } \exists_j (A_j < U_{-t} G) \}$$

Dann ist (analog zum Beweis von T.23.8)

$$\omega \in \bigcap (\text{SG}_{\text{sym}})$$

sowie

$$\omega \in \bigcap (\text{MON}_{\text{sym}})$$

und außerdem

$$\omega \in \forall_j \langle A_j \rangle_o$$

Wenn nun gilt: $\neg \Diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle A_j \rangle_o)$, so kann ω nicht in Ω_{sym} und folglich nicht in $\bigcap(\text{SEC}_{\text{sym}})$ liegen. Es gibt somit $t \in T$ sowie vertauschbare $E_k \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ mit $\bigcap_k E_k = o$, so dass gilt:

$$\omega \in \forall_k \langle E_k, t \rangle_o$$

und folglich für alle k

$$(E_k, t) \in \omega$$

Aufgrund der Definition von ω folgt dann mit

$$F_k := U_{-t} E_k \quad (\text{für alle } k)$$

die Aussage

$$\forall_k \exists_j (A_j < F_k)$$

Es gibt somit eine Abbildung f vom Indexbereich von k in den Indexbereich von j mit

$$\forall_k (A_{f(k)} < F_k)$$

Es sei nun

$$D_j := \bigcap_{k \in f^{-1}(j)} F_k$$

(Für den Fall $f^{-1}(j) = \emptyset$ setze man hier $D_j := \mathcal{H}$.)

Dann sind auch die D_j miteinander vertauschbar und es gilt:

$$\bigcap_j D_j = o$$

Aufgrund der Konstruktion sind die D_j außerdem symmetrisch.

Zu festem j gilt nun: Für alle $k \in f^{-1}(j)$ ist $f(k) = j$ und somit

$$\begin{aligned} A_j &= A_{f(k)} \\ &< F_k \end{aligned}$$

Da dies für alle $k \in f^{-1}(j)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} A_j &< \bigcap_{k \in f^{-1}(j)} F_k \\ &= D_j \end{aligned}$$

QED ("⇒")

Zu "⇐": Die Aussage ist eine unmittelbare Folge der Definitionen von MON_{sym} und SEC_{sym} .

QED ("⇐")

QED

L.45.8 Für beliebige $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\Diamond_+(\forall_j \langle A_j \rangle_o) \Leftrightarrow \Diamond(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_o)$$

Beweis: Mit $\Omega_+ := \bigcap (AX_+)$ ist

$$\begin{aligned} & \Diamond_+(\forall_j \langle A_j \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \Omega_+ \cap \forall_j \langle A_j \rangle_o \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \Omega \cap \langle \mathcal{H}' \rangle_o \cap \forall_j \langle A_j \rangle_o \neq \emptyset \quad (\text{da } \Omega_+ = \Omega \cap \langle \mathcal{H}' \rangle_o) \\ & \Leftrightarrow \Diamond(\langle \mathcal{H}' \rangle_o \wedge \forall_j \langle A_j \rangle_o) \end{aligned} \quad \text{QED}$$

L.45.9 Für $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ gilt:

$$\Diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j \rangle_o) \Leftrightarrow \Diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_o)$$

Beweis: Der Beweis erfolgt ganz analog zu dem von L.45.8. Dabei ist

$$\Omega_{\text{sym},+} = \Omega_{\text{sym}} \cap \langle \mathcal{H}' \rangle_o \quad \text{QED}$$

Für das Folgende sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine Folge symmetrischer Ereignisse, die t-zugänglich ist bezüglich UR'. Hierzu sei

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\})$$

Wegen L.45.2 sind die A_j symmetrisch.

Aufgrund der Schachtelungseigenschaft gibt es vertauschbare Unterräume B_j , C_j und M^\wedge von \mathcal{H} mit

$$\begin{aligned} B_j &< A_j < C_j && (\text{für alle } j, \text{ vgl. T.29.6}) \\ \text{UR}' &< M^\wedge && (\text{vgl. T.29.5}) \\ \bigcap_j C_j &< \bigcap_j B_j \oplus (M^\wedge)^\perp && (\text{vgl. T.29.9}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der entsprechenden Unterräume in Kapitel 29 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die B_j , C_j sowie M^\wedge symmetrisch sind. Es sei:

$$C := \bigcap_j C_j$$

L.45.10 Es gilt:

$$\neg \Diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o) \Rightarrow \neg \Diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o)$$

Beweis: Aus

$$\neg \Diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o)$$

folgt:

$$\begin{aligned} & \neg \Diamond_+(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o) && (\text{mit SG}) \\ & \neg \Diamond(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_o) && (\text{mit L.45.8}) \\ & \neg \Diamond(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_o) && (\text{mit MON, wegen } B_j < A_j) \end{aligned}$$

Wegen L.45.6 gibt es dann vertauschbare Unterräume D_j , D sowie D' , so dass gilt:

$$B_j < D_j \quad (\text{für alle } j)$$

$$UR < D$$

$$\mathcal{H}' < D'$$

und

$$\bigcap_j D_j \cap D \cap D' = 0$$

Es folgt:

$$\bigcap_j B_j < \bigcap_j D_j$$

$$< (D \cap D')^\perp$$

$$< (UR \cap \mathcal{H}')^\perp$$

$$= (UR')^\perp$$

$$\bigcap_j C_j < \bigcap_j B_j \oplus (M^\wedge)^\perp$$

$$< (UR')^\perp \oplus (UR')^\perp$$

$$= (UR')^\perp$$

und somit

$$C \perp UR'$$

Es gilt nun:

$$A_j < C_j \quad (\text{für alle } j)$$

$$UR' < C^\perp$$

Die C_j sowie C^\perp sind vertauschbar, und es gilt:

$$\bigcap_j C_j \cap C^\perp = 0$$

Da die C_j sowie C^\perp außerdem symmetrisch sind, folgt mit L.45.7:

$$\neg \hat{\diamond}_{\text{sym}}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o)$$

und somit

$$\neg \hat{\diamond}_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o) \quad (\text{mit } SG_{\text{sym}})$$

QED

L.45.11 Es gilt:

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o) \Rightarrow \neg \hat{\diamond}_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Beweis: Aus

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o)$$

folgt:

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o) \quad (\text{mit SG})$$

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o) \quad (\text{mit MON, wegen } B_j < A_j)$$

Wegen L.45.6 gibt es dann vertauschbare Unterräume D_j und D , so dass gilt:

$$B_j \subset D_j \quad (\text{für alle } j)$$

$$UR' \subset D$$

und

$$\bigcap_j D_j \cap D = 0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \bigcap_j B_j &\subset \bigcap_j D_j \\ &\subset D^\perp \end{aligned}$$

$$\subset (UR')^\perp$$

$$\begin{aligned} \bigcap_j C_j &\subset \bigcap_j B_j \oplus (M^\wedge)^\perp \\ &\subset (UR')^\perp \oplus (UR')^\perp \\ &= (UR')^\perp \end{aligned}$$

und somit

$$C \perp UR'$$

Da UR symmetrisch und folglich mit \mathcal{H}' vertauschbar ist, gilt:

$$UR = (UR \cap \mathcal{H}') \oplus (UR \cap (\mathcal{H}')^\perp)$$

$$\subset UR' \oplus K$$

$$\subset C^\perp \oplus K$$

Außerdem ist

$$A_j \subset C_j \quad (\text{für alle } j)$$

Wegen $C_j \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ sind die C_j (nach T.45.7) mit K und \mathcal{H}' vertauschbar. Somit sind alle C_j sowie $(C^\perp \oplus K)$ und \mathcal{H}' miteinander vertauschbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \bigcap_j C_j \cap (C^\perp \oplus K) \cap \mathcal{H}' &= C \cap (C^\perp \cap \mathcal{H}' \oplus K \cap \mathcal{H}') \\ &\subset C \cap (C^\perp \oplus 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da die C_j sowie $C^\perp \oplus K$ und \mathcal{H}' außerdem symmetrisch sind, folgt mit L.45.7:

$$\neg \hat{\diamond}_{\text{sym}}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_o)$$

$$\neg \hat{\diamond}_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \quad (\text{mit L.45.9})$$

$$\neg \hat{\diamond}_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \quad (\text{mit } SG_{\text{sym}})$$

QED

L.45.12 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \hat{\diamond}_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

$$(2) \hat{\diamond}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR' \rangle_o)$$

$$(3) \quad \Diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

$$(4) \quad \Diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o)$$

Beweis: Es gelten:

$$(1) \Rightarrow (3) \quad (\text{wegen } AX_{\text{sym},+} \subset AX_+)$$

$$(3) \Rightarrow (2) \quad (\text{wegen L.45.11})$$

$$(2) \Rightarrow (4) \quad (\text{wegen } AX_{\text{sym}} \subset AX)$$

$$(4) \Rightarrow (1) \quad (\text{wegen L.45.10})$$

QED

Theorem T.45.10 Für jede (in Bezug auf UR') t-zugängliche Folge symmetrischer Ereignisse (E_j, t_j) gilt:

$$\Diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o) \Leftrightarrow \Diamond(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR}' \rangle_o)$$

Beweis: Dies ist ein unmittelbares Korollar zu L.45.12.

QED

Nach der Aufnahme des durch SYM angegebenen zusätzlichen Gesetzes in die Theorie kann man übergehen zu einer Theorie auf dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' . Hierzu beschränkt man H auf diesen Hilbertraum durch:

$$H' := H|_{\mathcal{H}'}$$

Eine symmetrische Eigenschaft $A \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ geht dabei über in die Eigenschaft

$$A' := A \cap \mathcal{H}'$$

im reduzierten Modell.

Theorem T.45.11 H ist mit $\pi_{\mathcal{H}'}$ vertauschbar.

Beweis: Wir haben gezeigt, dass mit

$$c := 1/\#\mathcal{G}$$

und

$$\bar{x} := c \sum_{U \in \mathcal{G}} Ux$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\bar{x} \in \mathcal{H}' \quad (\text{vgl. L.45.4 und T.45.4})$$

und

$$(x - \bar{x}) \in (\mathcal{H}')^\perp \quad (\text{vgl. L.45.5 und T.45.4})$$

Somit ist für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\bar{x} = \pi_{\mathcal{H}'} x$$

Nun ist für $x \in \mathcal{H}$ sowie $y := Hx$

$$\begin{aligned}
 H \pi_{\mathcal{H}'} x &= H \bar{x} \\
 &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} H U x \\
 &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} U H x \quad (\text{da } HU = UH \text{ ist}) \\
 &= c \sum_{U \in \mathcal{G}} U y \\
 &= \bar{y} \\
 &= \pi_{\mathcal{H}'} y \\
 &= \pi_{\mathcal{H}'} H x
 \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt, folgt

$$H \pi_{\mathcal{H}'} = \pi_{\mathcal{H}'} H$$

QED

Theorem T.45.12 H' ist ein selbstadjungierter Operator auf dem reduzierten Hilbertraum \mathcal{H}' .

Beweis: Für $x \in \mathcal{H}'$ ist

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= H(x) \\
 &= H \pi_{\mathcal{H}'}(x) \\
 &= \pi_{\mathcal{H}'} H(x) \quad (\text{T.45.11}) \\
 &\in \mathcal{H}'
 \end{aligned}$$

Somit ist H' ein Operator auf \mathcal{H}' . Da für alle $x, y \in \mathcal{H}'$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle x, H'y \rangle &= \langle x, Hy \rangle \\
 &= \langle Hx, y \rangle \quad (\text{da } H \text{ selbstadjungiert ist}) \\
 &= \langle H'x, y \rangle
 \end{aligned}$$

ist H' selbstadjungiert.

QED

H' beschreibt das Bewegungsgesetz der reduzierten Theorie. Deren Axiome werden als MON' , SEC' und SG' in der üblichen Weise definiert. Den Möglichkeitsoperator dieser Theorie bezeichnen wir mit \Diamond' .

L.45.13 Für beliebige $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ gilt:

$$\Diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j \rangle_o) \Leftrightarrow \Diamond'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}' \rangle_o)$$

Beweis:

Zu " \Rightarrow ": Es sei:

$$\neg \Diamond'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}' \rangle_o)$$

Dann gibt es nach L.45.6 (angewendet auf die reduzierte Theorie) vertauschbare Unterräume $D'_j < \mathcal{H}'$ mit

$$\bigcap_j D'_j = 0$$

und

$$A_j \cap \mathcal{H}' < D'_j \quad (\text{für alle } j)$$

Es sei

$$D_j := D'_j \oplus K \quad (\text{für alle } j)$$

sowie

$$D := \mathcal{H}'$$

Aufgrund ihrer Konstruktion (und wegen $\mathcal{H}' = K^\perp$) sind die D_j sowie D vertauschbar. Da jedes Element $\varphi \in \mathcal{H}'$ symmetrisch ist, ist auch jeder Unterraum von \mathcal{H}' symmetrisch. Daher sind die D'_j symmetrisch, dann aber auch die D_j sowie D .

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \bigcap_j D_j \cap D &= \bigcap_j (D'_j \oplus K) \cap \mathcal{H}' \\ &= ((\bigcap_j D'_j) \oplus K) \cap \mathcal{H}' \\ &= (0 \oplus K) \cap \mathcal{H}' \\ &= 0 \end{aligned}$$

und da die A_j symmetrisch und folglich mit \mathcal{H}' vertauschbar sind, gilt für alle j :

$$\begin{aligned} A_j &= (A_j \cap \mathcal{H}') \oplus (A_j \cap (\mathcal{H}')^\perp) \\ &< D'_j \oplus K \\ &= D_j \end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{H}' < D$$

Daraus folgt

$$\neg \Diamond_{\text{sym}} (\forall_j \langle A_j \rangle_0 \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_0) \quad (\text{mit L.45.7})$$

$$\neg \Diamond_{\text{sym},+} (\forall_j \langle A_j \rangle_0) \quad (\text{mit L.45.9}) \quad \mathbf{QED} (" \Rightarrow ")$$

Zu " \Leftarrow ": Es sei

$$\neg \Diamond_{\text{sym},+} (\forall_j \langle A_j \rangle_0)$$

Dann folgt

$$\neg \Diamond_{\text{sym}} (\forall_j \langle A_j \rangle_0 \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_0) \quad (\text{mit L.45.9})$$

und nach L.45.7 gibt es vertauschbare symmetrische Unterräume D_j und D mit

$$\bigcap_j D_j \cap D = 0$$

sowie

$$A_j < D_j \quad (\text{für alle } j)$$

und

$$\mathcal{H}' < D$$

Es sei

$$D'_j := D_j \cap \mathcal{H}' \quad (\text{für alle } j)$$

Da die D_j symmetrisch sind, sind sie auch mit \mathcal{H}' vertauschbar (vgl. T.45.7).

Daher sind auch die D'_j miteinander vertauschbar. Ferner ist

$$\begin{aligned} \bigcap_j D'_j &= \bigcap_j D_j \cap \mathcal{H}' \\ &< \bigcap_j D_j \cap D \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_j \cap \mathcal{H}' &< D_j \cap \mathcal{H}' \\ &= D'_j \end{aligned}$$

Daraus folgt mit L.45.6, angewendet auf die reduzierte Theorie:

$$\neg \hat{\Diamond}'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}' \rangle_0)$$

QED ("⇐")

QED

Theorem T.45.13 Es gilt die Äquivalenz

$$\hat{\Diamond}'(\forall_j \langle E_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_0 \wedge \langle UR' \rangle_0) \Leftrightarrow \hat{\Diamond}_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_0 \wedge \langle UR \rangle_0)$$

für jede (bezüglich UR') t -zugängliche Folge von symmetrischen Ereignissen $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$.

Beweis: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$A_j := U_{-t_j} E_j$$

Da \mathcal{H}' eine Konstante der Bewegung ist (vgl. T.45.5), folgt:

$$\begin{aligned} A_j \cap \mathcal{H}' &= U_{-t_j} E_j \cap U_{-t_j} \mathcal{H}' \\ &= U_{-t_j} (E_j \cap \mathcal{H}') \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} &\hat{\Diamond}_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_0 \wedge \langle UR \rangle_0) \\ &\Leftrightarrow \hat{\Diamond}_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_0 \wedge \langle UR \rangle_0) \quad (\text{L.45.12}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Diamond}_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j \rangle_0 \wedge \langle UR \rangle_0) \quad (\text{SG}_{\text{sym}})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Diamond}'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}' \rangle_0 \wedge \langle UR \cap \mathcal{H}' \rangle_0) \quad (\text{L.45.13})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Diamond}'(\forall_j \langle E_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_0 \wedge \langle UR' \rangle_0) \quad (\text{mit SG'})$$

QED

B46. Anmerkungen zu Symmetrien in der Quantentheorie

Gegeben sei eine endliche Symmetriegruppe \mathcal{G} auf dem Hilbertraum \mathcal{H} , und das Bewegungsgesetz sei symmetrisch, d.h. es gelte:

$$U H = H U \quad (\text{für alle } U \in \mathcal{G})$$

Dazu seien \mathcal{U}_{sym} , MON_{sym} , SEC_{sym} , SG_{sym} , AX_{sym} , $\hat{\diamond}_{\text{sym}}$, AX_+ , $\hat{\diamond}_+$, $\text{AX}_{\text{sym},+}$, $\hat{\diamond}_{\text{sym},+}$ sowie K , \mathcal{H}' , UR' und $\hat{\diamond}'$ wie in den Beweisen zum vorangehenden Kapitel definiert. Ferner gehen wir wie zuvor aus von den Annahmen:

$$S \subset \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

$$\text{UR} \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

Theorem T.46.1 Es sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine Folge symmetrischer Ereignisse, die t -zugänglich ist bezüglich UR . Dann gilt:

$$\hat{\diamond}_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o) \Leftrightarrow \hat{\diamond}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

Beweis: Die Teilaussage " \Leftarrow " folgt unmittelbar aus der Beziehung $\text{AX}_{\text{sym}} \subset \text{AX}$. Zu zeigen bleibt somit nur die umgekehrte Implikation " \Rightarrow ".

Es sei

$$A_j := U_{-t_j} E_j \quad (\text{für } j \in \{1, \dots, n\})$$

Wegen L.45.2 sind die A_j symmetrisch. Aufgrund der Schachtelungseigenschaft gibt es vertauschbare Unterräume B_j, C_j und M^\wedge von \mathcal{H} mit

$$B_j < A_j < C_j \quad (\text{für alle } j, \text{ vgl. T.29.6})$$

$$\text{UR} < M^\wedge \quad (\text{vgl. T.29.5})$$

$$\bigcap_j C_j < \bigcap_j B_j \oplus (M^\wedge)^\perp \quad (\text{vgl. T.29.9})$$

Aufgrund der Definition der entsprechenden Unterräume in Kapitel 29 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die B_j, C_j sowie M^\wedge symmetrisch sind. Es sei:

$$C := \bigcap_j C_j$$

Aus der Aussage

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o)$$

folgt nun:

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o) \quad (\text{mit SG})$$

$$\neg \hat{\diamond}(\forall_j \langle B_j \rangle_o \wedge \langle \text{UR} \rangle_o) \quad (\text{mit MON, wegen } B_j < A_j)$$

Wegen L.45.6 gibt es dann vertauschbare Unterräume D_j und D , so dass gilt:

$$B_j \subset D_j \quad (\text{für alle } j)$$

$$UR \subset D$$

und

$$\bigcap_j D_j \cap D = 0$$

Es folgt:

$$\bigcap_j B_j \subset \bigcap_j D_j$$

$$\subset D^\perp$$

$$\subset UR^\perp$$

$$\bigcap_j C_j \subset \bigcap_j B_j \oplus (M^\wedge)^\perp$$

$$\subset UR^\perp \oplus UR^\perp$$

$$= UR^\perp$$

und somit

$$UR \subset C^\perp$$

Außerdem ist

$$A_j \subset C_j \quad (\text{für alle } j)$$

Alle C_j sowie C^\perp sind miteinander vertauschbar, und es gilt:

$$\bigcap_j C_j \cap C^\perp = 0$$

Da die C_j sowie C^\perp außerdem symmetrisch sind, folgt mit L.45.7:

$$\neg \diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle A_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

$$\neg \diamond_{\text{sym}}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \quad (\text{mit } SG_{\text{sym}})$$

QED

Theorem T.46.2 Es sei $(E_1, t_1), \dots, (E_n, t_n)$ eine Folge symmetrischer Ereignisse, die t -zugänglich ist bezüglich UR' . Dann gilt:

$$\diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o) \Leftrightarrow \diamond_+(\forall_j \langle E_j, t_j \rangle_o \wedge \langle UR \rangle_o)$$

Beweis: Die Aussage ist ein unmittelbares Korollar von L.45.12.

QED

Theorem T.46.3 Für beliebige Unterräume $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$ und Zeitpunkte $t_1, \dots, t_n \in T$ gilt:

$$\diamond'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_o) \Leftrightarrow \diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o)$$

Beweis: Es sei

$$G_j := U_{-t_j} A_j \quad (\text{für alle } j \in \{1, \dots, n\})$$

Nach L.45.2 sind die G_j ebenfalls symmetrisch und für alle j gilt:

$$\begin{aligned} U_{-t_j}(A_j \cap \mathcal{H}') &= U_{-t_j} A_j \cap U_{-t_j} \mathcal{H}' \\ &= G_j \cap \mathcal{H}' \quad (\text{mit T.45.5}) \end{aligned}$$

Es bezeichne SG' das Bewegungsgesetz für die auf \mathcal{H}' reduzierte Theorie. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \diamond'(\forall_j \langle A_j \cap \mathcal{H}', t_j \rangle_o) \\ \Leftrightarrow \diamond'(\forall_j \langle G_j \cap \mathcal{H}' \rangle_o) & \quad (\text{mit } SG') \\ \Leftrightarrow \diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle G_j \rangle_o) & \quad (\text{mit L.45.13}) \\ \Leftrightarrow \diamond_{\text{sym},+}(\forall_j \langle A_j, t_j \rangle_o) & \quad (\text{mit } SG_{\text{sym}}) \end{aligned} \quad \mathbf{QED}$$

Für das Folgende sei

$$\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}^2$$

und $(e_j)_j$ (mit $j \in \{1,2\}$) eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 . Ferner sei

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

Dann hat \mathcal{H} die Orthonormalbasis mit den Elementen

$$e_{jk} := e_j \otimes e_k \quad (\text{für } j, k \in \{1,2\})$$

Theorem T.46.4 Für die bosonische "Teilchentausch"-Symmetrie erhält man als Kern den eindimensionalen Unterraum

$$K = [e_{12} - e_{21}]$$

Beweis: Es sei V der Operator auf \mathcal{H} mit

$$V(e_{jk}) := e_{kj} \quad (\text{für } j, k \in \{1,2\})$$

und I der Einheitsoperator auf \mathcal{H} . Für die Gruppe \mathcal{G} der bosonischen "Teilchentausch"-Symmetrie gilt dann:

$$\mathcal{G} = \{I, V\}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} K &= [\{ \varphi - U \varphi \mid \varphi \in \mathcal{H} \wedge U \in \mathcal{G} \}] \\ &= \bigoplus_{U \in \mathcal{G}} \text{Bild}(I-U) \\ &= \text{Bild}(I-V) \quad (\text{wegen } \mathcal{G} = \{I, V\} \text{ und } \text{Bild}(I-I) = 0) \\ &= (I-V)[e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}] \\ &= [e_{11} - e_{11}, e_{12} - e_{21}, e_{21} - e_{12}, e_{22} - e_{22}] \\ &= [e_{12} - e_{21}] \end{aligned} \quad \mathbf{QED}$$

In \mathcal{H} sei $(b_j)_j$ eine weitere Orthonormalbasis, so dass gilt:

$$K = [b_1 + b_2 + b_3]$$

Damit seien

$$A := [b_2 - b_1, b_4]$$

$$B := [b_3 - b_1, b_4]$$

$$C := [b_3 - b_2]$$

und wir definieren das empirische Material

$$M := \langle A \rangle_0 \wedge \langle B \rangle_0 \wedge \langle C \rangle_0$$

Theorem T.46.5 A und B sind nicht miteinander vertauschbar.

Beweis: Wegen $b_4 \perp b_2 - b_1$ und $b_4 \perp b_3 - b_1$ gilt

$$\begin{aligned} \pi_A \pi_B &= (\pi_{[b_2 - b_1]} + \pi_{[b_4]}) (\pi_{[b_3 - b_1]} + \pi_{[b_4]}) \\ &= \pi_{[b_2 - b_1]} \pi_{[b_3 - b_1]} + \pi_{[b_2 - b_1]} \pi_{[b_4]} \\ &\quad + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_3 - b_1]} + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_4]} \\ &= \pi_{[b_2 - b_1]} \pi_{[b_3 - b_1]} + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_4]} \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} \pi_B \pi_A &= (\pi_{[b_3 - b_1]} + \pi_{[b_4]}) (\pi_{[b_2 - b_1]} + \pi_{[b_4]}) \\ &= \pi_{[b_3 - b_1]} \pi_{[b_2 - b_1]} + \pi_{[b_3 - b_1]} \pi_{[b_4]} \\ &\quad + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_2 - b_1]} + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_4]} \\ &= \pi_{[b_3 - b_1]} \pi_{[b_2 - b_1]} + \pi_{[b_4]} \pi_{[b_4]} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\pi_A \pi_B - \pi_B \pi_A = \pi_{[b_2 - b_1]} \pi_{[b_3 - b_1]} - \pi_{[b_3 - b_1]} \pi_{[b_2 - b_1]}$$

Wären nun A und B miteinander vertauschbar, so müssten auch $[b_2 - b_1]$ und $[b_3 - b_1]$ vertauschbar sein. Da jedoch $b_2 - b_1$ weder parallel noch orthogonal zu $b_3 - b_1$ ist, ist dies nicht der Fall. **QED**

Theorem T.46.6 A, B und C sind Unterräume von K^\perp .

Beweis: Da $(b_j)_j$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} ist, gilt

$$b_4 \perp b_1 + b_2 + b_3$$

$$b_2 - b_1 \perp b_1 + b_2 + b_3$$

$$b_3 - b_1 \perp b_1 + b_2 + b_3$$

sowie

$$b_3 - b_2 \perp b_1 + b_2 + b_3$$

Somit steht $b_1+b_2+b_3$ (und folglich K) senkrecht auf A , B und C . Daraus folgt die Behauptung. **QED**

Theorem T.46.7 Es gilt:

$$A, B, C \in \mathcal{U}_{\text{sym}}$$

Beweis: Wegen $K^\perp = \mathcal{H}'$ enthält K^\perp nur symmetrische Vektoren. Daher ist jeder Unterraum von K^\perp symmetrisch. **QED**

Theorem T.46.8 Es gelten:

$$A < [b_3]^\perp$$

$$B < [b_2]^\perp$$

$$C < [b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp$$

Beweis:

Wegen $b_2-b_1 \perp b_3$ und $b_4 \perp b_3$ ist $A < [b_3]^\perp$.

Wegen $b_3-b_1 \perp b_2$ und $b_4 \perp b_2$ ist $B < [b_2]^\perp$.

Wegen $b_3-b_2 \perp b_1$ und $b_3-b_2 \perp b_4$ gilt ferner:

$$C < [b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp$$

QED

Theorem T.46.9 Die drei Unterräume $[b_3]^\perp$, $[b_2]^\perp$ sowie $[b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp$ sind paarweise vertauschbar, und für ihren Durchschnitt gilt:

$$[b_3]^\perp \cap [b_2]^\perp \cap ([b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp) = 0$$

Beweis: Die Vertauschbarkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass die genannten Unterräume aus einer Orthonormalbasis gebildet sind. Außerdem ist

$$\begin{aligned} [b_3]^\perp \cap [b_2]^\perp \cap ([b_1]^\perp \cap [b_4]^\perp) &= \bigcap_j [b_j]^\perp \\ &= (\bigoplus_j [b_j])^\perp \\ &= \mathcal{H}^\perp \\ &= 0 \end{aligned}$$

QED

Theorem T.46.10 In \mathcal{H} gibt es keine paarweise vertauschbaren, symmetrischen Oberräume von A , B und C , deren Durchschnitt der Nullraum ist.

Beweis: Wir nehmen an, es gebe miteinander vertauschbare, symmetrische Oberräume D_A , D_B und D_C von A , B bzw. C mit

$$D_A \cap D_B \cap D_C = 0$$

Es sei dann

$$E_A := D_A \cap \mathcal{H}'$$

$$E_B := D_B \cap \mathcal{H}'$$

$$E_C := D_C \cap \mathcal{H}'$$

Da D_A , D_B und D_C symmetrisch sind, sind sie mit \mathcal{H}' vertauschbar (vgl. T.45.7). Daher sind auch E_A , E_B und E_C miteinander vertauschbar, und es gilt:

$$E_A \cap E_B \cap E_C = 0$$

Wegen T.46.6 gilt außerdem $A < E_A$, $B < E_B$ und $C < E_C$.

Aufgrund von $\dim \mathcal{H} = 4$ und $\dim K = 1$ sowie $\mathcal{H}' = K^\perp$ gilt:

$$\dim \mathcal{H}' = 3$$

Wegen $\dim A = 2$ und $A < E_A < \mathcal{H}'$ muss daher E_A mit A oder mit \mathcal{H}' übereinstimmen. Aus $E_A = \mathcal{H}'$ würde folgen:

$$E_B \cap E_C = 0$$

und somit

$$E_B \perp E_C$$

sowie

$$B \perp C$$

entgegen der Definition von B und C . Demnach kann $E_A = \mathcal{H}'$ nicht gelten, und somit muss $E_A = A$ sein. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass $E_B = B$ sein muss. Dann aber wären A und B vertauschbar, im Widerspruch zu T.46.5.

QED

Theorem T.46.11 Es gilt

$$\diamond_{\text{sym}}(M)$$

Beweis: Diese Aussage folgt aus T.46.10 mittels L.45.7.

QED

Theorem T.46.12 Die durch $AX_{\text{sym},+}$ gegebene Theorie kann echt schwächer sein als die durch AX_+ gegebene.

Beweis: Es genügt, für das oben definierte empirische Material

$$M := \langle A \rangle_0 \wedge \langle B \rangle_0 \wedge \langle C \rangle_0$$

zu zeigen, dass gilt:

$$\diamond_{\text{sym},+}(M) \text{ und } \neg \diamond_+(M)$$

Aus T.46.8 und T.46.9 folgt mittels MON und SEC:

$$\neg \diamond(M)$$

Wegen $AX \subset AX_+$ folgt daraus unmittelbar:

$$\neg \diamond_+(M)$$

Zu zeigen bleibt also:

$$\diamond_{\text{sym},+}(M)$$

Da A , B und C nach T.46.7 symmetrisch sind, ist dies wegen L.45.9 äquivalent zu:

$$\diamond_{\text{sym}}(M \wedge \langle \mathcal{H}' \rangle_0)$$

Wäre diese Aussage nicht wahr, so gäbe es nach L.45.7 paarweise vertauschbare, symmetrische Unterräume D_A , D_B , D_C und D' von \mathcal{H} mit

$$A < D_A$$

$$B < D_B$$

$$C < D_C$$

$$\mathcal{H}' < D'$$

und

$$D_A \cap D_B \cap D_C \cap D' = 0$$

Dazu seien

$$E_A := D_A \cap \mathcal{H}'$$

$$E_B := D_B \cap \mathcal{H}'$$

$$E_C := D_C \cap \mathcal{H}'$$

Als Unterräume von \mathcal{H}' sind E_A , E_B und E_C symmetrisch, und wegen T.46.6 gilt $A < E_A$, $B < E_B$ und $C < E_C$.

Da D_A , D_B und D_C symmetrisch und folglich nach T.45.7 mit \mathcal{H}' vertauschbar sind, sind auch E_A , E_B und E_C miteinander vertauschbar. Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} E_A \cap E_B \cap E_C &= D_A \cap D_B \cap D_C \cap \mathcal{H}' \\ &< D_A \cap D_B \cap D_C \cap D' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Widerspruch zu T.46.10.

QED

