Universidad Autónoma de Zacatecas

"Francisco García Salinas"

UNIDAD ACADÉMICA DE FÍSICA

Implicaciones Físicas de la Elección de Fases y Base de Helicidad en las Ecuaciones de la Mecánica Cuántica Relativista

TESIS

que para obtener el título de:

Licenciado en Física

Presenta:

Javier Leonardo Quintanar González

ASESOR: **Dr. Valeri Dvoeglazov**

Zacatecas, Zac., Mayo de 2004

Dedico este trabajo a mis padres, Estela y Francisco Javier.
A mis hermanos Irene y Ubaldo: espero
que les sirva de motivación para seguir adelante.
A mi mejor amiga Laura Córdova por
brindarme ánimo constante y tener confianza en mí.

"Un físico es la manera
que tienen los átomos de
conocerse a sí mismos"
Desconocido

"...para el físico Dios es simplemente
un nombre dado a lo desconocido final
y, por lo tanto, sería un
reconocimiento de su derrota."
J. H. Brennan. *Time Travel*

"...las propiedades que atribuimos a la realidad
no son otras que aquellas que puede
captar el observador con sus sentidos y con
sus ecuaciones fisicomatemáticas."
F. Blanck y M. Cereijido. *La vida, el tiempo y la muerte*

"Millones están capacitados para el
trabajo físico; pero sólo uno en un millón
está suficientemente capacitado
para realizar un efectivo desempeño intelectual..."
H. D. Thoreau. *Walden*

"no pueden elaborarse concepciones familiares sobre el
electrón, y en su mejor descripción podemos
decir que es algo desconocido que hace
no sabemos qué."
Arthur Eddington. *The nature of the physical world*

"Cada físico cree saber lo que es un fotón.
Me he pasado la vida intentando descubrir
qué es un fotón, y aún no lo sé."
A. Einstein

Tabla de Contenido

Sinópsis

En este trabajo se muestra que en la mecánica cuántica relativista las funciones de estado, biespinores construidos con espinores que se distinguen entre sí por un factor de fase, implican fenómenos físicos diferentes, de manera que a direrencia de la teoría no relativista, la fase cobra importancia. También se estudian las consecuencias de la elección de una base (conjunto de funciones de onda linealmente independientes que generan el espacio espinorial), que no es la construida con eigenfunciones de la componente z del operador de espín, sino con eigenfunciones del operador helicidad (por lo que se llama base de helicidad). Son consideradas las representanciones $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ y $(1, 0) \oplus (0, 1)$. Las funciones de estado correspondientes resultan tener comportamientos diferentes de los encontrados con la base usual bajo las operaciones de paridad y conjugación de carga.

Parte 1

Introducción

Hace ya varios siglos que el hombre empezó a especular que las cosas que nos rodean están compuestas en última instancia por pequeños pedazos de materia, es decir de partículas. Aún así todavía podría ser que existieran varios tipos de estas: partículas de agua, otras de madera, otras de piedra, de estrellas, de materia viva... A través de una historia de avance científico se fue gestando la idea de que el número de partículas a partir de las que se puede formar la materia se podía reducir al número de elementos químicos los cuales parecían ser las partes constituyentes fundamentales (esto no incluía la descripción de la luz). Posteriormente se encontró que ellos tampoco merecían este calificativo. No obstante, se creía que cualquier cuerpo en el universo, incluidas las partículas elementales, debían obedecer la ley del movimiento enmarcada dentro de la teoría física conocida como Mecánica Clásica (MCl) y que fue establecida por Newton

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\vec{p} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\,(t)\right) \tag{1.1}$$

(donde $\overrightarrow{r(t)}$ es el vector de posición de la partícula y $\vec{p} = m\frac{d}{dt}\vec{r}$ es su ímpetu). En vista de la carencia de teorías que describieran su estructura, las partículas se reducían a simples puntos materiales caracterizados por su posición en el espacio, que podían tener cualquier masa y que respondían a la interacción electromagnética o gravitatoria.
De acuerdo con la forma de la ecuación (1.1) se puede asociar a una partícula libre ($F = 0$), un número llamado su "energía", E (ver [5]) definido como

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right)^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{1.2}$$

Por otra parte la luz llegó a ser concebida como un fenómeno ondulatorio de campos electromagnéticos, los cuales son descritos por las llamadas ecuaciones de Maxwell (ver parte 5.1) . El paso del tiempo y la realización de experimentos de la más diversa índole, nos revelaron leyes naturales que a los ojos de nuestra intuición implicaban hechos extraordinarios, y que sin embargo hay que tomar en cuenta si queremos describir correctamente el universo. Una de estas leyes es la constancia de la velocidad de la luz para diferentes sistemas inerciales de referencia. En otra dirección, se encontró también que al tratar con sistemas físicos muy pequeños (del orden de $10^{-10}m$), empezaban a tener lugar fenómenos así llamados cuánticos, que son consecuencia del comportamiento dual onda-partícula de la materia, que es la otra ley planteada por la naturaleza.

Para describir a cada una de las anteriores se desarrollaron dos modelos matemáticos diferentes: la Teoría Especial de la Relatividad (TER) y la Mecánica Cuántica (MC) respectivamente.
De la TER se desprende que la energía asociada a las partículas tiene la nueva forma

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \tag{1.3}$$

mientras que en MC tenemos que aceptar el hecho de que ya no tratamos con cantidades tangibles en nuestro mundo físico, sino que lo más que podemos hacer para referirnos a una partícula es aludir a un objeto abstracto llamado función de estado, el cual, según la interpretación más aceptada por los científicos, su "cuadrado" (¡no la función misma!) nos da la *densidad de probabilidad* de encontrar a la partícula en cierto estado(¡no el estado en sí!). Esta función de estado puede pensarse como un vector llamado "ket" de un espacio matemático abstracto (espacio de Hilbert) y lo denotamos como $|\psi\rangle$. Resulta que la ecuación de "movimiento" que obedece una función de onda es la llamada ecuación de Schrodinger

$$\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle \tag{1.4}$$

donde $\hat{H}$ es un operador de energía llamado Hamiltoniano.

Así las cosas, para dar una descripción más completa de la naturaleza necesitamos que nuestro modelo fusione los conceptos que surgen de la existencia de una velocidad finita de progapación con los del comportamiento ondulatorio-corpuscular de la materia. Tal es la forma como surge la Mecánica Cuántica Relativista (MCR), teoría física con la que se relaciona el presente trabajo. En el marco de esta teoría emerge una propiedad que deben poseer las partículas llamada *espín*, la cual el útil pensar como una especie de momento angular respecto a un "eje de rotación" de la partícula. Las partículas que constituyen la luz (fotones) tienen espín 1, mientras que las partículas materiales tienen espín fraccionario y se conocen como fermiones. En particular los protones, neutrones y electrones de los que se forman los átomos que constituyen la materia, tienen espín 1/2. La ecuación que describe a estos últimos es la más importante en la MCR, la ecuación de Dirac. La función de estado involucrada en ella se llama *biespinor*, que se obtiene bajo una operación matemática conocida como *suma directa* entre un espinor *derecho* y uno *izquierdo*. Para espín 1/2 estos espinores tienen dos componentes cada uno y son las funciones de estado para fermiones en el límite no relativista[1]. En este trabajo investigamos qué efecto tiene la distinción entre el espinor derecho e izquierdo en un factor de fase, en la construcción del biespinor. Además estudiamos el comportamiento de las funciones de estado en la base de helicidad bajo las operaciones de simetría discreta.

Ahora bien, resulta superfluo decir que las teorias físicas deben estar enfocadas a dar cuenta de los hechos experimentales, y en la actualidad encontramos varias cuestiones, en particular concernientes al área de la física de partículas, que no tienen respuestas satisfactorias o incluso carecen de ellas. Al respecto podemos mencionar como ejemplo al neutrino. Una enumeración de algunos problemas en la física de partículas se encuentra en [10]. Entre ellos están los siguientes:

- el misterio del neutrino solar,
- el problema del cuadrado negativo de la masa,

[1] En la representación espinorial de las matrices gamma, el biespinor tiene por componentes los espinores que son eigen-estados del operador S_z.

- la anomalía del neutrino atmosférico,
- especulaciones sobre la posibilidad del doble decaimiento β sin neutrinos,
- el problema de la materia oscura,
- el problema de las ráfagas de rayos γ,
- posibles eventos donde tenga lugar la oscilación entre sabores del neutrino,
- la crisis del espín en Cromodinámica Cuántica.

La existencia de estos problemas, que no son resueltos satisfactoriamente dentro del marco del *Modelo Estándar*, justifica la investigación en nuevas direcciones. Así pues, para cubrir las cuestiones anteriores se hace necesario extender las teorías actuales. Las ideas mostradas en esta tesis podrían ser algunas posibilidades.

Cabe mencionar que a la luz de esta situación de incompletez, no podemos pretender que el *Modelo Estándar* actual sea definitivo y los posibles complementos o correcciones en los principios básicos deberá ser tomado en cuenta en las *Teorías de Gran Unificación* (GUT,s) y consecuentemente en los intentos de dar cuenta tanto de los fenómenos cuánticos como de los gravitatorios en una misma teoría, objetivo principal de la física teórica.

Parte 2

Funciones de Onda Relativistas para una Partícula

Esta primera parte se consagra a la introducción de la notación y las nociones básicas de la Mecánica Cuántica Relativista, que se utiliza para describir partículas elementales. La exposición se presenta de acuerdo con la referencia [1].

2.1 Notación Relativista

Como es sabido, en el espacio 3-dimensional ordinario, un conjunto ordenado de tres números (x, y, z) se llama 3-vector si conserva invariante su longitud bajo rotaciones. La longitud, que se determina a través del cuadrado del vector, así como cualquier cantidad que satisfaga la propiedad mencionada define un escalar bajo la transformación especificada. En particular cuando nuestros números son las coordenadas de un punto respecto de un sistema de referencia, el vector nos sirve (entre otras posibilidades)[1] para localizar una partícula y se llama vector de posición. La distancia entre dos puntos cualesquiera resulta ser un escalar, pero resulta mas útil trabajar con distancias infinitesimales: $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Esta forma cuadrática es una suma de cuadrados y es positiva. Podemos generalizar esta idea al espacio-tiempo cuatridimensional (espacio de Minkowski) y definir dos eventos infinitamente cercanos (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ cuya distancia se llama "intervalo", denotado ds. Con el fín de que ds sea el mismo para todos los observadores inerciales (es decir, que sea un escalar respecto de transformaciones de Lorentz y rotaciones), debe ser dado por

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.1}$$

Nótese la presencia del signo menos; la fórmula no esta definida como una suma de cuadrados ordinaria. Por esta razón se dice que la ecuación (2.1) define un espacio "pseudoeuclidiano". Con esta definición, los eventos que están separados por un intervalo del género temporal tienen $ds^2 > 0$; aquellos separados por un intervalo del género espacial $ds^2 < 0$; y aquellos separados por un intervalo nulo o lumínico $ds = 0$. Tenemos sin embargo la peculiaridad de que esta distancia invariante ya no es una suma de cuadrados ordinaria. Para que siga siendo dada por el cuadrado de vectores definimos dos tipos de 4-vectores

[1] Por ejemplo en electrodinámica se utiliza como punto de observación o "punto campo".

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$
$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{2.2}$$

y hacemos la regla de que el invariante se obtiene sumando sobre un superíndice y un subíndice:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.3}$$

Un 4-vector como x^μ, con un superíndice, es llamado vector contravariante y uno como x_μ, con un subíndice, es llamado vector covariante. El producto interno de un vector covariante y uno contravariante es un invariante (escalar del espacio de Minkowski). Para simplificar la notación adoptamos el convenio de sumación; un índice que aparezca una vez como superíndice y otra como subíndice se suma automáticamente de 0 a 3:

$$\sum_{\mu=0}^{3} V^\mu V_\mu = V^\mu V_\mu \tag{2.4}$$

La relación entre x^μ y x_μ (o entre cualquier vector contravariante y su contraparte covariante) puede darse introduciendo un tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = g_{\mu 0}x^0 + g_{\mu 1}x^1 + g_{\mu 2}x^2 + g_{\mu 3}x^3 \tag{2.5}$$

donde se ha usado el convenio de sumación. Por inspección de (2.2), tenemos $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$ etc., así que de (2.5) es claro que $g_{\mu\nu}$ puede ser escrita como una matríz diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

donde las filas y las columnas corresponden a las componentes 0, 1, 2 y 3. Como tiene determinante no nulo, su inversa existe, y se escribe

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

de hecho, tiene los mismos valores que $g_{\mu\nu}$ en el espacio de Minkowski (en coordenadas cartesianas), pero esta igualdad no se mantiene en general. Es claro que $g_{\mu\nu}$ contiene toda la información sobre la geometría del espacio -en este caso, el espacio-tiempo de Minkowski. En relatividad especial, sin embargo, el tensor métrico sólo juega un papel pasivo, y de hecho se introduce por conveniencia. Pero en relatividad general, juega un papel activo ya que la geometría del espacio no es fija, sino que depende de la materia que contiene. Las ecuaciones del campo de Einstein, por ejemplo, son ecuaciones diferenciales para $g_{\mu\nu}$ que en este caso depende de las coordenadas (ver [6]). Es común en física de partículas trabajar en unidades donde $c = 1$, así (2.3) se convierte en

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{2.8}$$

Resulta que la ecuación (1.3) se deriva de un invariante:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m^2c^2 \tag{2.9}$$

que se forma con el 4-vector de energía-momento

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \qquad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right). \tag{2.10}$$

En el sistema de unidades mencionado (2.9) es

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2; \tag{2.11}$$

esto nos sugiere definir los siguientes operadores diferenciales (ver (2.15))

$$\begin{aligned} \partial_\mu = &\quad \tfrac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}, \tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\tfrac{1}{c}, \nabla\right) \\ . &\quad . \\ \partial^\mu = &\quad g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\tfrac{1}{c}, \tfrac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

que dan el operador diferencial de segundo orden invariante de Lorentz

$$\partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{2.13}$$

llamado *operador d'Alambertiano*.

Usaremos también la notación $p \cdot x$ para $p_\mu x^\mu$:

$$p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}, \tag{2.14}$$

expresión que se encuentra frecuentemente en MC y que por ser un producto de 4-vectores ¡es un invariante!

2.2 Ecuación de Klein-Gordon

Estamos ahora en condiciones de escribir una función de onda para una partícula sin espín -una partícula escalar. Como no tiene espín es de una sola componente, que denotamos con ϕ. La función de onda se obtiene de la ecuación (2.9) sustituyendo los operadores diferenciales para E y $\mathbf{p}$, de la manera acostumbrada en teoría cuántica:

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{p} \longrightarrow -i\hbar\nabla. \tag{2.15}$$

Entonces la ecuación (2.9) da

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0,$$

que en unidades $\hbar = c = 1$ y usando (2.13), se convierte en

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\phi = 0. \tag{2.16}$$

Esta es conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Nótese que sustituyendo (2.15) en la ecuación (1.2), da la ecuación de Schrodinger de la MC para una partícula libre

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{2.17}$$

Se sigue pues que la ecuación de Schrodinger es la aproximación no relativista de la ecuación de Klein-Gordon. La densidad de probabilidad para la ecuación de Schrodinger es

$$\rho = \phi^*\phi, \tag{2.18}$$

y la corriente de probabilidad es

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right); \tag{2.19}$$

que obedecen una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi^*\phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*) = \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi^*\right) = 0,$$

donde se ha usado la ecuación de Schrodinger y su complejo conjugado. ¿Cuáles son las expresiones correspondientes para la ecuación de Klein-Gordon? Para que sea relativista la densidad de probabilidad, no deberá, como en (2.18), transformarse como un escalar, sino como la componente temporal de un 4-vector, cuya componente espacial es $\mathbf{j}$, dada por (2.19). Así que ρ está dada por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) \tag{2.20}$$

y con

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{m}\phi^*(\overleftrightarrow{\partial_0}, \overleftrightarrow{\nabla})\phi = \frac{i\hbar}{m}\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi, \tag{2.21}$$

donde

$$A \overleftrightarrow{\partial^\mu} B = \frac{1}{2}\left[A(\partial^\mu B) - (\partial^\mu A)B\right], \text{ (definición)} \tag{2.22}$$

y hemos usado (2.12), tenemos la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\phi - \phi\phi^*) = 0, \tag{2.23}$$

ya que ϕ^* también obedece la ecuación de Klein-Gordon. Luego ρ y $\mathbf{j}$ son la densidad de probabilidad y corriente que queremos. Pero esto presenta inmediatamente un problema, porque ρ, dada por la ecuación (2.20), a diferencia de la expresión (2.18) para la ecuación de Schrodinger, no siempre es positiva. Como la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden, ϕ y $\partial\phi/\partial t$ pueden fijarse arbitrariamente a un tiempo dado, así que puede tomar valores negativos, y su interpretación como una densidad de probabilidad tiene que ser abandonada. La interpretación de la ecuación de Klein-Gordon como una ecuación de una partícula, con función de onda ϕ, por lo tanto tiene que abandonarse también. Se reinterpreta entonces como una *ecuación de campo* que, bajo cuantización, tiene una interpretación exitosa para describir partículas. Vale la pena remarcar aquí que ϕ se ha asumido compleja. Si se toma ϕ real, entonces ρ, así como $\mathbf{j}$ en (2.20) se anula. Resulta que la interpretación correcta de ϕ compleja es que describe partículas cargadas. ϕ real corresponde a partículas eléctricamente neutras, y entonces ρ y $\mathbf{j}$ son las densidades de carga y corriente, en lugar de las densidades de probabilidad y de corriente de probabilidad. Hay otro problema con la ecuación de Klein-Gordon, y es que la solución de la ecuación 2.9, considerada como un ecuación para E, es

$$E = \pm(m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2)^{1/2}, \tag{2.24}$$

así que las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon contienen tanto términos con energía negativa como positiva. Para una partícula libre, cuya energía es por tanto constante, esta dificultad puede evitarse, diciendo que la partícula tiene energía positiva, e ignorar los estados de energía negativa. Pero una partícula interactuante puede intercambiar energía con su entorno, y entonces no habría nada que detuviera su caída a estados de energía infinitamente negativa, emitiendo una cantidad infinita de energía en el proceso. Esto, por supuesto, no pasa, y por lo tanto establece un problema para la ecuación de Klein-Gordon para una partícula.
Pasamos ahora de partículas escalares a partículas con espín, empezando con partíulas de espín 1/2 que son descritas por la ecuación de Dirac.

2.3 Representaciones del Grupo de Rotaciones y de Lorentz.

Las rotaciones y las transformaciones de Lorentz forman un grupo[2] en el sentido matemático. Además, como dijimos en la introducción, se hace necesario tratar con funciones de onda (que en general son vectores multidimensionales complejos que por poseer ciertas propiedades se llaman espinores), en lugar de con vectores de posición, pero ¿cómo expresar las rotaciones o las transformaciones de Lorentz sobre aquellos? Para esto necesitamos introducir el concepto de *isomorfismo*. Se dice que dos grupos son isomorfos entre sí si hay una correspondencia unívoca entre elementos tal que ciertas estructuras algebraicas definidas sobre ellos se conserven (ver [4], pag. 187). Si un grupo es isomorfo a otro cuyos elementos son matrices, se dice que es último es una representación matricial del primero. Revisaremos brevemente la conección entre el grupo de rotaciones y $SU(2)$, e introducimos la idea de los espinores. Después esto se extiende al grupo de Lorentz.

2.3.1 SU(2) y el grupo de rotaciones.

Una rotación espacial general se escribe

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

donde R es la matríz de rotación. Como las rotaciones conservan la distancia al orígen, $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, o $r'^T r' = r^T r$ (donde T denota transposición), así que

[2]Un grupo es un conjunto C que satisface las siguientes propiedades:
1. Esta definida una operación binaria $(\cdot)$ entre elementos del conjunto.
2. La operación satisface la propiedad asociativa $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \ \ \forall x, y, z \epsilon C)$.
3. Existe un elemento (elemento identidad) i con la propiedad $x \cdot i = x$.
4. Para todo x existe un y (inverso de x, denotado x^{-1}) tal que $x \cdot y = i$.

$$r^T R^T R r = r^T r$$
$$R^T R = 1 \tag{2.26}$$

y R es una matríz ortogonal de 3×3. Estas matrices forman un grupo: si R_1 y R_2 son ortogonales, también lo es $R_1 R_2$:

$$(R_1R_2)^T R_1R_2 = {R_2}^T {R_1}^T R_1 R_2 = 1$$

Este grupo es denotado $O(3)$; para matrices de n dimensiones es $O(n)$. Las matrices unitarias también forman un grupo, denotado $U(n)$, pero las matrices hermitianas no, a menos que conmuten. Como ejemplo de una rotación, considérese la rotación de un vector $\mathbf{V}$ alrededor del eje z. Esta rotación, considerada como una rotación activa (i.e. una rotación del vector dejando los ejes de coordenadas fijos), es levógira; considerada como una rotación pasiva (i.e. rotando los ejes, dejando el vector fijo) es dextrógira. Tenemos

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

así que la matríz de rotación es

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Para rotaciones alrededor de los ejes x y y tenemos matrices similares:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Nótese que estas matrices no conmutan:

$$R_x(\phi)R_z(\theta) \neq R_z(\theta)R_x(\phi); \tag{2.30}$$

el grupo de rotaciones espaciales tridimensionales, $O(3)$, es *no abeliano*. Es un *grupo de Lie*; esto es, un grupo contínuo, con un número infinito de elementos, ya que los parámetros de rotación, que son ángulos, toman valores contínuos. Es fácil ver que una rotación general tiene tres parámetros; R tiene nueve elementos, y la ecuación (2.26) da seis condiciones para ellos. Estos parámetros pueden elegirse, por ejemplo, como los tres ángulos de Euler. Correspondiendo a tres parámetros hay tres *generadores* definidos por

$$S_z = \frac{1}{i}\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_x = \frac{1}{i}\frac{dR_x(\phi)}{d\phi}\bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_y = \frac{1}{i}\frac{dR_y(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Estos generadores son hermitianos, y rotaciones infinitesimales son dadas por, por ejemplo,

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iS_z\delta\theta, \qquad R_x(\delta\phi) = 1 + iS_x\delta\phi. \tag{2.32}$$

El conmutador $R_z(\delta\theta)R_x(\delta\phi){R_z}^{-1}(\delta\theta){R_x}^{-1}(\delta\phi)$ de estas dos rotaciones puede calcularse usando las relaciones de conmutación

$$S_xS_y - S_yS_x \equiv [S_x, S_y] = iS_z \quad \text{ y permutaciones cíclicas.} \tag{2.33}$$

Desarrollada a segundo orden, se encuentra que es una rotación alrededor del eje y. Las relaciones (2.33), con un factor $\hbar$, son las relaciones de conmutación para las componentes del momento angular. Así que los operadores de momento angular son los generadores de rotaciones. Resulta ahora sencillo escribir la matríz de rotación para rotaciones finitas. La matríz correspondiente a una rotación alrededor del eje z en un ángulo $\theta = N\delta\theta$, donde $(N \longrightarrow \infty)$ es claramente

$$\begin{aligned} R_z(\theta) &= [R_z(\delta\theta)]^N \\ &= (1 + iS_z\delta\theta)^N = \left(1 + iS_z\frac{\theta}{N}\right)^N = e^{iS_z\theta}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Podemos comprobar que esto da la matríz requerida (2.28). Definiendo la exponencial por su expansión en serie de potencias, tenemos

$$e^iS_z = 1 + iS_z\theta - {S_z}^2\frac{\theta^2}{2!} - i{S_z}^3\frac{\theta^3}{3!} + ...$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\theta^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ...$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es (2.28). Una rotación finita alrededor de un eje arbitrario $\mathbf{n}$ un ángulo θ, y definiendo $\theta = \mathbf{n}\theta$, es denotada

$$R_n(\theta) = e^{i\mathbf{S}\cdot\theta} = e^{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\theta} \tag{2.35}$$

Ahora considérese el grupo $SU(2)$, que consiste de matrices unitarias de 2×2 con determinante unidad

$$UU^\dagger = 1, \qquad detU = 1 \tag{2.36}$$

Escribiendo

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

la condición de unitaria es $U^\dagger = U^{-1}$, la cual, como $detU = 1$, equivale a

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

y por tanto $a^* = d$, $b^* = -c$. Entonces $detU = \mid a \mid^2 + \mid b \mid^2$, así que tenemos

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad \mid a \mid^2 + \mid b \mid^2 = 1. \tag{2.38}$$

Esta es considerada como la matríz de transformación en un espacio bidimensional complejo, cuyos elementos, denotados $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, son llamados espinores;

$$\xi \longrightarrow U\xi, \qquad \xi^\dagger \longrightarrow \xi^\dagger U^\dagger. \tag{2.39}$$

Es claro que

$$\xi^\dagger \xi = \mid \xi_1 \mid^2 + \mid \xi_2 \mid^2$$

es invariante bajo (2.39). Por otra parte, para el producto exterior

$$\xi\xi^\dagger = \begin{pmatrix} \mid \xi_1 \mid^2 & \xi_1 {\xi_2}^* \\ \xi_2 {\xi_1}^* & \mid \xi_2 \mid^2 \end{pmatrix} \longrightarrow U\xi\xi^\dagger U^\dagger. \tag{2.40}$$

Obsérvese que $\xi\xi^\dagger$ es una matríz hermitiana. Vemos de (2.39) que ξ y $\xi^\dagger$ se transforman de diferente forma, pero podemos usar el hecho de que U es unitaria para mostrar que $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -{\xi_2}^* \\ {\xi_1}^* \end{pmatrix}$ se transforman de la misma forma bajo $SU(2)$. Tenemos, comparando (2.38) y (2.39),

$$\begin{aligned} {\xi_1}' &= a\xi_1 + b\xi_2, \\ {\xi_2}' &= -b^*\xi_1 + a^*\xi_2, \end{aligned} \tag{2.41}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} -{\xi_2}^{*\prime} &= a(-{\xi_2}^*) + b{\xi_1}^*, \\ {\xi_1}^{*\prime} &= -b^*(-{\xi_2}^*) + a^*{\xi_1}^*. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ahora

$$\begin{pmatrix} -{\xi_2}^* \\ {\xi_1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\xi_1}^* \\ {\xi_2}^* \end{pmatrix} = \Theta_{1/2}\xi^* \tag{2.43}$$

donde

$$\Theta_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.44}$$

así que debemos mostrar que ξ y $\Theta_{1/2}\xi^*$ se transforman en la misma forma bajo $SU(2)$; en símbolos

$$\xi \sim \Theta_{1/2}\xi^* \tag{2.45}$$

(el símbolo "$\sim$" significa "se transforma como"). Así que

$$\xi^\dagger \sim (\Theta_{1/2}\xi)^T = (-\xi_2, \xi_1), \tag{2.46}$$

y

$$\xi\xi^\dagger \sim \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}(-\xi_2, \xi_1) = \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 & {\xi_1}^2 \\ -{\xi_2}^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Llamando a esta matríz $-H$, vemos de (2.40) que bajo una transformación $SU(2)$

$$H \longrightarrow UHU^\dagger \tag{2.48}$$

y además, H es una matríz de traza nula. Podemos construir ahora, a partir del vector de posición $\mathbf{r}$, una matríz de traza nula de 2×2 que se transforme bajo $SU(2)$ como H. Esta es

$$h = \sigma \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

donde las matrices σ son las bien conocidas matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{2.50}$$

h es hermitiana, y la transformación

$$h \sim UhU^\dagger = h' \tag{2.51}$$

conserva que h sea hermitica y tenga traza nula si U es unitaria. Además, si U pertenece a $SU(2)$, y también tiene determinante 1, entonces $det \;\; h' = det \;\; h$, o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2; \tag{2.52}$$

la transformación unitaria (2.51) induce una rotación del vector de posición $\mathbf{r}$. Identificando H y h, concluimos finalmente que *una transformación* $SU(2)$ *sobre* $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ *equivale a una transformación* $O(3)$ *sobre* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *con*

$$x = \frac{1}{2}({\xi_2}^2 - {\xi_1}^2), \quad y = \frac{1}{2i}({\xi_1}^2 + {\xi_2}^2), \quad z = \xi_1\xi_2. \tag{2.53}$$

Los parámetros de una transformación $SU(2)$ son a, b, ambos complejos, con una condición: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Hay por lo tanto tres parámetros reales, los mismos que para una rotación.

Encontraremos ahora una relación explícita entre los dos conjuntos de parámetros. Tomando el cuadrado y el producto de las dos relaciones (2.41), y usando las expresiones para x, y y z dadas en la ecuación (2.53), tenemos, bajo $SU(2)$,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 + b^{*2})x - \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2})y - (a^*b^* + ab)z, \\ y' &= \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2})x + \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2})y - i(ab - a^*b^*)z, \\ z' &= (ab^* + ba^*)x + (ba^* - ab^*)iy + (|a|^2 - |b|^2)z. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Si ahora ponemos $a = e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $b = 0$ (que cumple $|a|^2 + |b|^2 = 1$) en la ecuación (2.54) tenemos

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\text{sen}\alpha \\ y' &= -x\text{sen}\alpha + \text{y}\cos\alpha \\ z' &= z, \end{aligned}$$

que es una rotación en un ángulo α alrededor del eje z. Por lo tanto la correspondencia entre la matríz $SU(2)$ (2.38) y la matríz $O(3)$ (2.28) es

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen }\alpha & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

En términos de los generadores S_z (ecuación 2.31) y σ_z (ecuación 2.50) podemos escribir

$$U = e^{i\sigma_z\frac{\alpha}{2}}, \qquad R = e^{iS_z\alpha} \tag{2.56}$$

donde la expresión exponencial para U está definida por su expansión en serie de potencias. En forma similar, poniendo $\alpha = \cos\beta/2$, $b = \text{sen}\beta/2$, tenemos la correspondencia

$$U = \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & \text{sen}\beta/2 \\ -\text{sen}\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

que puede escribirse

$$U = e^{i\sigma_y\frac{\beta}{2}}, \qquad R = e^{iS_y\beta} \tag{2.58}$$

y, finalmente, poniendo $\alpha = \cos\gamma/2$, $b = i\text{sen}\gamma/2$, da

$$U = \begin{pmatrix} \cos\gamma/2 & i\text{sen}\gamma/2 \\ i\text{sen}\gamma/2 & \cos\gamma/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \text{sen}\gamma \\ 0 & -\text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

con

$$U = e^{i\sigma_x\frac{\gamma}{2}}, \qquad R = e^{iS_x\gamma}. \tag{2.60}$$

En general, la correspondencia entre una transformación $SU(2)$ en el espacio espinorial $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ y una transformación $O(3)$ en el espacio $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es

$$U = e^{i\sigma\cdot\theta/2} = \cos\theta/2 + i(\sigma\cdot\mathbf{n})\text{sen}\theta/2 \leftrightarrow \mathrm{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{S}\cdot\theta}. \tag{2.61}$$

Esta correspondencia entre $SU(2)$ y $O(3)$ implica que los grupos deben tener estructura similar, y por lo tanto que sus generadores obedecen las mismas relaciones de conmutación. De hecho, puede comprobarse que la matrices de Pauli obedecen

$$\left[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2}\right] = i\frac{\sigma_z}{2} \text{ y permutaciones cíclicas.} \tag{2.62}$$

Estas son las mismas relaciones que (2.33) y vemos también que los factores $\frac{1}{2}$ en (2.62) son los de (2.61), mostrando pues que el espinor rota medio ángulo de lo que el vector rota. Esta el la causa de una distinción topológica global entre $SU(2)$ y $O(3)$, ya que como puede verse de las ecuaciones (2.55) y (2.61), si incrementamos el ángulo α, digamos en 2π tenemos $U \longrightarrow -U$, $R \longrightarrow R$; así que ambos elementos U y $-U$ en $SU(2)$ corresponden a la rotación R en $O(3)$: hay un mapeo dos a uno de los elementos de $SU(2)$ a los de $O(3)$.

2.3.2 $SL(2, C)$ y el Grupo de Lorentz

Análoga a la correspondencia entre $SU(2)$ y el grupo de rotaciones, hay una correspondencia entre $SL(2, C)$ y el grupo de Lorentz. Las transformaciones de "empuje" de Lorentz puras (en español el vocablo inglés "boost" se traduce como "empuje" y se refiere a transición entre sistemas de referencia) son aquellas que conectan dos sistemas (o marcos) de referencia inerciales, que se mueven con velocidad relativa v. Supongamos que los ejes de los sistemas son paralelos entre sí. Si el movimiento relativo es a lo largo de el eje x, las ecuaciones que los relacionan son

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Poniendo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, estas se expresan como

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \qquad x^{1\prime} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \qquad x^{2\prime} = x^2, \qquad x^{3\prime} = x^3.$$

Observando que $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, podemos escribir

$$\gamma = \cosh\phi, \qquad \gamma\beta = \text{senh}\phi, \tag{2.63}$$

así que parametrizando la transformación en términos de la variable ϕ, con $\tanh\phi = v/c$, tenemos

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \text{senh}\phi & 0 & 0 \\ \text{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

Llamemos a esta matríz la matríz de empuje B. El generador K_x de esta transformación de empuje a lo largo de eje x está definida por analogía con (2.31):

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

De manera similar, los otros generadores son (en cada caso habrá que hacer la correspondiente modificación a la matríz (2.64))

$$K_y = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_z = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

En esta notación matricial de 4×4, los generadores de rotación (2.31) pueden escribirse

$$S_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

La transformación de Lorentz más general está compuesta de empujes en las tres direcciones, y rotaciones alrededor de los tres ejes, y los seis generadores son los anteriores. Sus relaciones de conmutación pueden calcularse explícitamente, siendo estas

$$\begin{aligned} [K_x, K_y] &= -iS_z \quad \text{y permutaciones cíclicas,} \\ [S_x, K_x] &= 0 \quad \text{etc.,} \\ [S_x, K_y] &= iK_z \quad \text{y permutaciones cíclicas,} \end{aligned} \tag{2.68}$$

junto con (2.33), que se refiere a las S's solamente. Una consecuencia interesante de estas relaciones es que *las transformaciones de Lorentz puras no forman un grupo*, ya que los generadores K no forman un álgebra cerrada bajo conmutación. Por tanto el conmutador de dos empujes infinitesimales en diferentes direcciones

$$e^{iK_x\delta\phi}e^{iK_y\delta\psi}e^{-iK_x\delta\phi}e^{-K_y\delta\psi} = 1 - [K_x, K_y]\,\delta\phi\delta\psi + {K_x}^2(\delta\phi)^2{K_y}^2(\delta\psi)^2 + ...$$

contiene, en virtud de la primera de las ecuaciones (2.68), una rotación alrededor del eje z. Este es el orígen de la precesión de Thomas.
Ahora nos preguntamos de que manera se transforman los espinores de Pauli. Notamos que las relaciones de conmutación anteriores son satisfechas por

$$\mathbf{K} = \pm i\frac{\sigma}{2}; \tag{2.69}$$

así que debería haber dos tipos de espinores, correspondientes a los dos signos posibles de $\mathbf{K}$. Definamos los generadores

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S} + i\mathbf{K}), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S} - i\mathbf{K}). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Las relaciones de conmutación (2.68) y (2.33) son entonces

$$\begin{array}{ll} [A_x, A_y] = iA_z & \text{y permutaciones cíclicas,} \\ [B_x, B_y] = iB_z & \text{y permutaciones cíclicas,} \\ [A_i, B_j] = 0 & (i, j = x, y, z). \end{array} \tag{2.71}$$

Esto muestra que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ cada uno por separado genera un grupo $SU(2)$, y los dos grupos conmutan. El grupo de Lorentz es pues esencialmente $SU(2)\otimes SU(2)$ y los estados que se transformen de manera bien definida serán etiquetados con dos momentos angulares (j, j'), el primero correspondiente a A, y el segundo a B. Como casos especiales, podemos hacer $j = 0$ o $j' = 0$:

$$\begin{aligned} (j, 0) &\longrightarrow \mathbf{S}^{(s)} = i\mathbf{K}^{(s)} \qquad (\mathbf{B} = 0), \\ (0, j') &\longrightarrow \mathbf{S}^{(s)} = -i\mathbf{K}^{(s)} \qquad (\mathbf{A} = 0), \end{aligned} \tag{2.72}$$

y esto de hecho corresponde a las dos posibilidades en (2.69). Podemos definir ahora dos tipos de espinor:

$$\text{Tipo I:} \quad (\frac{1}{2}, 0): \quad \mathbf{S}^{(1/2)} = \frac{\sigma}{2}, \quad \mathbf{K}^{(1/2)} = -i\frac{\sigma}{2}.$$

Denotamos este espinor ϕ_R. Si (θ, ϕ) son los parámetros de una rotación y una transformación de Lorentz pura, ϕ_R se transforma como

$$\phi_R \longrightarrow \exp\left(i\frac{\sigma}{2}\cdot\theta + \frac{\sigma}{2}\cdot\phi\right)\phi_R = \exp\left[i\frac{\sigma}{2}\cdot(\theta - i\phi)\right]\phi_R = M\phi_R. \tag{2.73}$$

$$\text{Tipo II:} \quad (0, \frac{1}{2}): \quad \mathbf{S}^{(1/2)} = \frac{\sigma}{2}.$$

Este espinor es denotado ϕ_L y se transforma como

$$\phi_L \longrightarrow \exp\left[i\frac{\sigma}{2}\cdot(\theta + i\phi)\right]\phi_L = N\phi_L. \tag{2.74}$$

Los rótulos R y L califican a los espinores como "derecho" e "izquierdo" respectivamente (en inglés derecha es "right" e izquierda es "left"). Es importante notar que estas son representaciones no equivalentes del grupo de Lorentz, i.e. no hay una matríz A tal que $N = AMA^{-1}$. Ellas de hecho están relacionadas por

$$N = \Theta_{1/2} M^* {\Theta_{1/2}}^{-1} \qquad \text{con } \Theta_{1/2} = -i\sigma_2, \tag{2.75}$$

como se definió en (2.44) anteriormente. Esto se sigue de observar que

$$\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 = -{\sigma_2}^2 \sigma = -\sigma,$$

luego,

$$\Theta_{1/2} M^* {\Theta_{1/2}}^{-1} = \sigma_2 \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma^*\cdot(\theta + i\phi)\right] = N.$$

Notamos que det$M$=det$N$=1, así que M y N son matrices complejas de 2×2 con determinante unidad. Tales matrices forman un grupo, $SL(2, C)$ (S:special, determinante positivo; L:lineal, transformación lineal; 2: matríz de 2x2; C:complex, sus elementos pertenecen al campo de los números complejos). Este grupo consiste de matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1;$$

las cuales tienen cuatro números complejos, con dos condiciones y esto deja al grupo con seis parámetros independientes. Estos seis parámetros están relacionados con los tres ángulos y las tres velocidades de las transformaciones de Lorentz generales. Resumiendo lo que se ha dicho hasta aquí: Junto con los 3-vectores, hay espinores de Pauli de 2 componentes, que tienen una transformación bien definida (2.61) bajo rotaciones. Bajo transformaciones de Lorentz generales, sin embargo, hay dos tipos diferentes de espinores de dos componentes, que se transforman por (2.73) y (2.74). Ellos corresponden a las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. En escencia, la ecuación de Dirac es una relación entre estos espinores.

2.4 Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac, a diferencia de la de Klein-Gordon, es de primer orden, y se considera válida para partículas de espín 1/2. La ecuación de Klein-Gordon no expresa otra cosa que la relación relativista entre energía, momento y masa, debe ser cierta para partículas con cualquier espín. La ecuación de Dirac, sin embargo (y las ecuaciones de Maxwell y Proca, con las que tratamos más adelante), tiene un origen completamente diferente, y puede ser derivada de las propiedades de transformación de los espinores bajo el grupo de Lorentz. Introduzcamos la operación paridad (inversión del espacio), bajo la cual la velocidad en los empujes de Lorentz cambia de signo: $\mathbf{v} \longrightarrow -\mathbf{v}$. Entonces los generadores $\mathbf{K}$ cambian de signo, $\mathbf{K} \longrightarrow -\mathbf{K}$, igual que las componentes de un vector, mientras que $\mathbf{S}$ no cambia de signo, $\mathbf{S} \longrightarrow +\mathbf{S}$, comportandose pues como un *vector axial* o *pseudovector*, que es como efectivamente se transforma el momento angular bajo la paridad. Se sigue que las representaciones $(s, 0)$ y $(0, s)$ se intercambian:

$$(s, 0) \leftrightarrow (0, s), \qquad \text{bajo paridad} \tag{2.76}$$

y por lo tanto

$$\phi_R \leftrightarrow \phi_L.$$

Si consideramos la paridad, entonces, no es suficiente considerar los 2-espinores ξ y η separadamente, sino el 4-espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}. \tag{2.77}$$

Bajo transformaciones de Lorentz ψ se transforma como sigue:

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\sigma\cdot(\theta - i\phi)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\sigma\cdot(\theta + i\phi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \overline{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

con

$$\overline{D}(\Lambda) = \zeta D^*(\Lambda)\zeta^{-1}, \tag{2.79}$$

donde Λ denota una transformación de Lorentz general, que podemos escribir como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2.80}$$

Bajo paridad, ψ se transforma como

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}. \tag{2.81}$$

El 4-espinor ψ es una representación irreductible del grupo de Lorentz *extendido por paridad.* Nótese, sin embargo, que la representación (2.78) no es unitaria; esto es porque la matríz $\exp(\sigma \cdot \phi)$ no es unitaria. En general, en mecánica cuántica, uno está interesado solamente en representaciones unitarias de un grupo de simetría, ya que son sólo estas las que conservan la probabilidad en una transición entre dos estados, medidas en diferentes marcos de referencia. Esto este problema esta relacionado con el hecho de que el grupo de Lorentz, a diferencia del grupo de rotaciones es *no compacto.* Esto corresponde a grandes rasgos a la observación de que las velocidades, que son los parámetros de los empujes de Lorentz, toman valores dentro de un conjunto semi-abierto que corresponde a una línea de $v/c = 0$ a $v/c = 1$, mientras que los ángulos en una rotación abarcan desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, y estos puntos son tales que nuestro conjunto (identificado como una línea), pueden mapearse sobre un círculo cerrado. El espacio grupal del grupo de rotaciones en finito, pero el del grupo de Lorentz es infinito, así que el grupo de Lorentz es *no compacto.* Hay, además un teorema de que las representaciones unitarias de grupos no compactos son infinito-dimensionales. Sin embargo, lo que tenemos es un ejemplo que ilustra la negación de esto, ya que encontramos una representación de dimensión finita y no unitaria del grupo de Lorentz. Lo que se tiene actualmente, es la proposición hecha por Wigner de que el grupo fundamental en física de partículas no es el grupo de Lorentz (homogéneo) considerado arriba, sino el grupo de Lorentz *inhomogéneo*, comúnmente llamado *grupo de Poincaré*, que consiste de empujes de Lorentz, rotaciones, y también translaciones espaciales y temporales. Un análisis de este grupo da un entendimiento más profundo, y también sorpresas inesperadas de la naturaleza del espín.
Particularizemos ahora las transformaciones (2.78) al caso de empujes de Lorentz ($\theta = 0$). Tenemos así

$$\phi_R(p^{\mu}) \longrightarrow e^{\frac{1}{2}\sigma\cdot\phi} \phi_R(\overset{0}{p^{\mu}}) = [\cosh(\phi/2) + \sigma \cdot \mathbf{n}\mathrm{senh}(\phi/2)]\, \phi_R(\overset{0}{p^{\mu}}) \tag{2.82}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección del empuje de Lorentz. Supóngase que el espinor original $\phi_R(\overset{0}{p^{\mu}})$, se refiere a una partícula en reposo, y el transformado $\phi_R(p^{\mu})$, un sistema de referencia en el que la partícula tiene momento $\mathbf{p}$. De (2.63) tenemos $\cosh(\phi/2) = [(\gamma+1)/2]^{1/2}$, $\mathrm{senh}(\phi/2) = [(\gamma-1)/2]^{1/2}$, de manera que (2.82) se escribe

$$\phi_R(p^{\mu}) = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} + \sigma \cdot \mathbf{p} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2} \right] \phi_R(\overset{0}{p^{\mu}}). \tag{2.83}$$

Ya que para una partícula con energía total E, masa m y momento $\mathbf{p}$, $\gamma = E/m$ ($c = 1$), la ecuación (2.83) se escribe

$$\phi_R(p^{\mu}) = \frac{E + m + \sigma \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \phi_R(\overset{0}{p^{\mu}}). \tag{2.84}$$

De manera similar encontramos

$$\phi_L(p^\mu) = \frac{E + m - \sigma \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \phi_L(\overset{0}{p^\mu}). \tag{2.85}$$

Ahora, cuando una partícula está en reposo, no se puede definir si su espín es derecho o izquierdo, así que $\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) = \pm\phi_L(\overset{0}{p^\mu})$. Esta fórmula es la *Relación de Ryder*. Se sigue entonces de (2.84) y (2.85) que

$$\phi_R(\mathbf{p}) = \pm \frac{E + \sigma \cdot \mathbf{p}}{m} \phi_L(\mathbf{p}). \tag{2.86}$$

De la misma manera

$$\phi_L(\mathbf{p}) = \pm \frac{E - \sigma \cdot \mathbf{p}}{m} \phi_R(\mathbf{p}). \tag{2.87}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} \mp m\phi_R(\mathbf{p}) + (p_0 + \sigma \cdot \mathbf{p})\phi_L(\mathbf{p}) = 0, \\ (p_0 - \sigma \cdot \mathbf{p})\phi_R(\mathbf{p}) \mp m\phi_L(\mathbf{p}) = 0, \end{aligned} \tag{2.88}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mp m & p_0 + \sigma \cdot \mathbf{p} \\ p_0 - \sigma \cdot \mathbf{p} & \mp m. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.89}$$

Utilizando el 4-espinor (2.77) y definiendo las matrices de 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.90}$$

la ecuación (2.89) se transforma en

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i \mp m)\psi(p^\mu) = 0 \tag{2.91}$$

(nótese que $p_\mu = (E, -\mathbf{p})$ (ver (2.10)), así $\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \gamma^0 p_0 - \gamma \cdot \mathbf{p}$, o

$$(\gamma^\mu p_\mu \mp m)\psi(p^\mu) = 0. \tag{2.92}$$

En el espacio de las coordenadas (sustituyendo $i\partial_\mu$ por p_μ) este doble signo desaparece y tenemos la ecuación

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = \psi(x^\mu) = 0 \tag{2.93}$$

Esta es la ecuación de Dirac para partículas masivas de espín $\frac{1}{2}$. En el caso de partículas sin masa, es claro, por ejemplo de (2.88), que la ecuación se descompone en dos ecuaciones, cada una para un espinor de 2 componentes

$$\begin{aligned} (p_0 + \sigma \cdot \mathbf{p})\phi_L(\mathbf{p}) = 0, \\ (p_0 - \sigma \cdot \mathbf{p})\phi_R(\mathbf{p}) = 0. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Estas son conocidas como las *ecuaciones de Weyl*, y ϕ_L y ϕ_R son los *espinores de Weyl*. Ya que para una partícula sin masa, $p_0 = |\mathbf{p}|$, estas ecuaciones son

$$\sigma \cdot \mathbf{p}\phi_L = -\phi_L, \qquad \sigma \cdot \mathbf{p}\phi_R = \phi_R.$$

El operador $\sigma \cdot \mathbf{p}$ mide la componente del espín en la dirección del momento, y esta cantidad es llamada *helicidad*. Por lo tanto los espinores de Weyl son eigenestados de la helicidad, y el espinor izquierdo (derecho) tiene helicidad negativa (positiva). Tradicionalmente ha sido supuesto que los neutrinos son partículas sin masa, y por lo tanto descritos por las ecuaciones de Weyl (una de ellas), pero experimentos recientes (de oscilaciones entre sabores de neutrinos) indican que pueden tener masa. La forma de deducir la ecuación de Dirac dada arriba, difiere de la que siguió Dirac originalmente. El propósito de Dirac fué encontrar una ecuación que no tuviera los problemas de la ecuación de Klein-Gordon.

2.5 Predicción de antipartículas

Vimos que la ecuación de Klein-Gordon adolece de dos defectos: la densidad de probabilidad puede no ser positiva, y pueden ocurrir estados de energía negativa. Por esta razón la ecuación de Klein-Gordon fué descartada y Dirac buscó una ecuación que la reemplazara, que fué, a diferencia de la de Klein-Gordon, de primer orden. El entonces descubrió la ecuación (2.92), y dedujo que las matrices γ^μ deben ser matrices de 4×4.
La ecuación (2.93) es una ecuación diferencial de primer orden. Aplicando el operador $i\gamma^\mu\partial_\mu$ otra vez a esta ecuación:

$$[-(\gamma^\mu\partial_\mu)(\gamma^\nu\partial_\nu) - im(\gamma^\mu\partial_\mu)]\,\psi = 0,$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = 0.$$

Ahora, $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$,[3] así $\gamma^\mu\gamma^\nu$ puede ser reemplazada por la combinación simétrica

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = \frac{1}{2}\,\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \tag{2.95}$$

para obtener

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu\psi + m^2\psi = 0.$$

Por otra parte, la relatividad requiere que la relación energía-momento-masa se satisfaga, y por tanto que cada componente de ψ satisfaga la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi(x) = 0. \tag{2.96}$$

Se sigue entonces que el coeficiente de $\partial_\mu\partial_\nu$ es $g^{\mu\nu}$, así

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{2.97}$$

Esta es la relación general que los coeficientes γ^μ deben satisfacer. Tomando sucesivamente $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = i$ y $\mu \neq \nu$, vemos que se cumple

[3] En nuestro trabajo suponemos siempre que $[x_\mu, x_\nu] = 0$, aunque existen especulaciones sobre espacios no-conmutativos.

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad (\nu \neq \mu). \tag{2.98}$$

Es claro que si las cuatro γ^μs satisfacen (2.97), también lo hacen

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{2.99}$$

donde S es una matríz unitaria de 4×4, y la ecuación de Dirac será pues satisfecha por

$$\psi' = S\psi. \tag{2.100}$$

Construyamos ahora una corriente de probabilidad j^μ, análoga a (2.21) para la ecuación de Klein-Gordon, y veamos si la densidad es positiva. Tomamos la ecuación de Dirac en la forma (2.93), donde $\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i$. Ahora tomamos el hermitiaco conjugado de esta ecuación, notando de (2.90) o (2.98) que $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$. Esto da

$$\psi^\dagger(-i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i - m) = 0.$$

(Aquí $\psi^\dagger$ es un vector fila, y $\overleftarrow{\partial}_0$ y $\overleftarrow{\partial}_i$ operan sobre él a la izquierda.) Esto no tiene forma covariante, pero multiplicamos en la derecha por γ_0, y usamos (2.98) para obtener

$$\bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \tag{2.101}$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \tag{2.102}$$

se llama el *espinor adjunto* a ψ. Las ecuaciones (2.93) y (2.101) pueden ser usadas ahora para mostrar que la corriente

$$j^\mu = \bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi \tag{2.103}$$

se conserva:

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu\,\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\,\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = (im\,\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}\,(-im\psi) = 0. \tag{2.104}$$

La densidad j^0 es pues

$$\bar{\psi}\,\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

y es positiva; j^0 sirve entonces como densidad de probabilidad para la partícula considerada, y la ecuación de Dirac resuelve el problema que la ecuación de Klein-Gordon no resolvía. Veamos ahora la otra dificultad que enfrentamos con la ecuación de Klein-Gordon, la de los estados de energía negativos. Aquí parece que no se resuelve todo. De hecho, es fácil ver de (2.92) que una partícula de Dirac en reposo se rige por

$$\begin{aligned} \gamma^0 p_0\psi &= m\psi, \\ p_0\psi &= m\gamma^0\psi. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Los eigenvalores de γ^0 son claramente $+1$ (dos veces) y -1 (dos veces), así que hay dos soluciones de energía positiva ($+m$) y dos de energía negativa ($-m$). De hecho, puede mostrarse de (2.92), que los eigenvalores de p_0 son

$$
\begin{aligned}
p_0 &= +(m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{dos veces,} \\
p_0 &= -(m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{dos veces.}
\end{aligned}
$$

Para cada valor de $\mathbf{p}$, hay dos posibles soluciones de energía, correspondientes a estados de una partícula de espín $\frac{1}{2}$, y dos soluciones adicionales de energía negativa. Este resultado catastrófico fué transformado por Dirac en un triunfo. Aquí se tiene el mismo problema que se mencionó en la ecuación de Klein-Gordon. La ecuación de Dirac es correcta para electrones libres, pero si tomamos en cuenta la interacción con otra partícula o campo (digamos el campo electromagnético), el problema de estados de energía negativa permanece. Un electrón en un estado de energía positiva puede saltar a estados de energía negativa, y luego caer a $E \to -\infty$, emitiendo una cantidad infinita de energía en el proceso (digamos radiación electromagnética). La solución de Dirac a este problema radica en el hecho de que los electrones tienen espín $\frac{1}{2}$ y por lo tanto obedecen el *principio de exclusión* de Pauli. Dirac supuso que los estados de energía negativa ya están completamente llenos, y el principio de exclución evita que ningún otro electrón entre al "mar" de estados de energía negativa. Este "mar de Dirac" es el *vacío*; de manera que en la teoría de Dirac, el vacío no es "nada", ¡sino un mar infinito de electrones, protones, neutrinos, neutrones y demás partículas de espín $\frac{1}{2}$ con energías negativas! Esta ingeniosa teoría hace una predicción importante, supóngase que hay una vacante en el mar de electrones: un "hueco" con energía $-|E|$. Un electrón con energía E puede llenar este hoyo, emitiendo energía $2E$, y dejando un vacío:

$$e^- + \text{hueco} \longrightarrow \text{energía}, \tag{2.106}$$

el hueco tiene carga efectiva $+e$ y energía positiva, y es llamado *positrón*, la *antipartícula* del electrón. Esta teoría de Dirac predijo la existencia de antipartículas para todas las partículas de espín $\frac{1}{2}$, y en su momento, fueron encontradas. Se puede pensar pues que los bosones también tengan antipartículas, pero para ver esto se requiere tratar ϕ, la "función de onda" de Klein-Gordon, como un campo cuantizado. La predicción y descubrimiento de antipartículas es uno de los episodios más destacados en la historia de la física de partículas, e inspira confianza considerable en la ecuación de Dirac. De hecho la ecuación de Dirac ha tenido destacados logros en sus predicciones y aplicaciones. Debe notarse sin embargo que la ecuación de Dirac no es la ecuación de *una sola partícula*, ya que describe tanto partículas como antipartículas. La única filosofía consistente con esto es considerar el espinor ψ como un *campo*, tal que $|\psi|^2$ da una medida del número de partículas en un punto particular. Este campo es un campo cuántico.

2.6 Construcción de los espinores de Dirac: álgebra de las matrices γ.

Es útil saber las propiedades de la transformación de Lorentz de expresiones bilineares como $\bar{\psi}\,\psi$, $\bar{\psi}\,\gamma^\mu\psi$, etc. Empezamos mostrando que $\bar{\psi}\,\psi$, es una cantidad escalar. Trabajamos en la base (**??**)

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}, \tag{2.107}$$

y sabemos que bajo una transformación de Lorentz (incluyendo rotación) (θ, ϕ) tenemos, de (2.78),

$$\phi_R \longrightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta - i\phi)\right]\phi_R, \;\; \phi_L \longrightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta + i\phi)\right]\phi_L, \tag{2.108}$$

por lo que

$$\phi_R^\dagger \longrightarrow \phi_R^\dagger \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta + i\phi)\right], \;\; \phi_L^\dagger \longrightarrow \phi_L^\dagger \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma \cdot (\theta - i\phi)\right], \tag{2.109}$$

y es evidente que

$$\psi^\dagger \psi = \phi_R^\dagger \phi_R + \psi_L^\dagger \phi_L \tag{2.110}$$

no es invariante. Sin embargo, el espinor adjunto $\overline{\psi}$ tiene componentes

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\phi_R^\dagger \phi_L^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\phi_L^\dagger \phi_R^\dagger), \tag{2.111}$$

de manera que

$$\overline{\psi}\psi = \phi_L^\dagger \phi_R + \phi_R^\dagger \phi_L \tag{2.112}$$

es invariante (i.e. un escalar) bajo transformaciones de Lorentz. Además bajo paridad

$$\phi_R \leftrightarrow \phi_L, \tag{2.113}$$

así $\overline{\psi}\psi \longrightarrow \overline{\psi}\psi$, y es un verdadero escalar, i.e. no cambia de signo bajo inversión espacial.

Ahora definimos la matríz de 4×4

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.114}$$

(Recuérdese que cada entrada es una matríz de 2×2.) Esto define γ^5 en la base (2.107). En una base arbitraria se define por

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5. \tag{2.115}$$

entonces vemos que

$$\overline{\psi}\gamma^5\psi = (\phi_L^\dagger \psi_R^\dagger)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \phi_L^\dagger \psi_R - \phi_R^\dagger \psi_L. \tag{2.116}$$

Es claro de (2.108),(2.109) y (2.113) que esta es invariante bajo transformaciones de Lorentz, pero cambia de signo bajo paridad. Por esta razón es llamada una cantidad *pseudoescalar*. Ahora considérese la cantidad $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, la cual sospechamos que se transforma como un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz. Sus componentes espaciales y temporales son

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi = \phi_R^\dagger \psi_R + \phi_L^\dagger \psi_L, \tag{2.117}$$

$$\overline{\psi}\gamma\psi = \left(\phi_L^\dagger \phi_R^\dagger\right)\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = -\phi_L^\dagger \sigma \psi_L + \phi_R^\dagger \sigma \psi_R. \tag{2.118}$$

Bajo rotaciones espaciales ($\theta \neq 0, \phi = 0$) tenemos

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi \longrightarrow \overline{\psi}\gamma^0\psi \tag{2.119}$$

y si θ es infinitesimal,

$$\begin{gathered}\overline{\psi}\gamma\psi \longrightarrow -\phi_R^\dagger e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta}\sigma e^{\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta}\phi_L + \phi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta}\sigma e^{\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta}\phi_R = \\ -\phi_R^\dagger\left(1-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right)\sigma\left(1+\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right)\phi_L + \phi_L^\dagger\left(1-\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right)\sigma\left(1+\frac{i}{2}\sigma\cdot\theta\right)\phi_R = \\ -\phi_R^\dagger\left(\sigma-\theta\times\sigma\right)\phi_L + \phi_L^\dagger\left(\sigma-\theta\times\sigma\right)\phi_R = \overline{\psi}\gamma\psi - \theta\times(\overline{\psi}\gamma\psi).\end{gathered} \tag{2.120}$$

Esto puede encontrarse usando las relaciones de conmutación (2.62), expresadas en la forma

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{2.121}$$

donde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si (ijk) es una permutación par de (123),} \\ -1 & \text{si (ijk) es una permutación impar de (123),} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{2.122}$$

y poniendo $\sigma \cdot \theta = \sigma_i\theta_i$. La ecuación (2.120) describe el comportamiento de un vector bajo rotaciones: para θ infinitesimal, la ecuación (2.27) da $V_x' = V_x + \theta V_y$, $V_y' = V_y\theta V_x$, $V_z' = V_z$, lo cual es la componente z de

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \theta \times \mathbf{V}.$$

Adicionalmente, la componente temporal, por (2.119), el invariante bajo rotaciones, así que $\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi$ efectivamente se comporta como un 4-vector bajo rotaciones. Resulta que también lo hace bajo transformaciones de empuje de Lorentz, i.e., como x^μ en (2.64) para empujes a lo largo del eje x. Además bajo paridad es fácil ver que

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi \longrightarrow \overline{\psi}\gamma^0\psi, \quad \overline{\psi}\gamma\psi \longrightarrow \overline{\psi}\gamma\psi \tag{2.123}$$

como pasa con un vector polar. Esto se resume diciendo que $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ se transforma como un vector. De la misma manera, puede mostrarse que $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ se comporta como un *vector axial* (o pseudovector) -se comporta como un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz, incluyendo rotaciones, pero tiene un comportamiento opuesto a (2.123) bajo paridad, así que la parte espacial se transforma como un tensor antisimétrico de segundo rango. Esto completa todas las posibilidades porque, en cuatro dimensiones, un tensor de rango 3 si transforma como un pseudovector, y un tensor de rango 4 como un pseudoescalar; en tres dimensiones esta transición pasa más rápido -un tensor de rango 2, como $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, que es un vector axial, y un tensor de rango 3 como el elemento de volumen dxdydz es un pseudoescalar. Estos resultados se resumen como sigue:

$$\begin{array}{ll} \overline{\psi}\psi: & \text{escalar,} \\ \overline{\psi}\gamma^5\psi: & \text{pseudoescalar,} \\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi: & \text{vector,} \\ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi: & \text{vector axial,} \\ \overline{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi: & \text{tensor antisimétrico.} \end{array} \tag{2.124}$$

Construyamos ahora espinores correspondientes a un estado arbitrario de movimiento de una partícula de Dirac. No trabajaremos en la representación (2.77), que podemos llamar la representación *quirial* (porque ϕ_R y ϕ_L son eigen-estados de quirialidad, cuyo operador es γ^5) sino en la *representación estandar*, en la que γ^0 es diagonal. De (2.105), esta es claramente la representación apropiada para describir partículas en reposo. Las soluciones de ondas planas de la ecuación de Dirac para una partícula en reposo son

$$\begin{array}{ll} \psi(x) = u(0)e^{-imt}, & \text{energía positiva,} \\ \psi(x) = v(0)e^{imt}, & \text{energía negativa,} \end{array} \tag{2.125}$$

con dos espinores de las dos energías positivas y dos para energías negativas

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.126}$$

Aquí γ^0 es, en la representación estandar,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

la cual escribimos en la forma condensada usual:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.128}$$

Esto se obtiene de la representación quirial

$$\gamma_{0RE} = S\gamma_{0RQ}S^{-1},$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

así que, en la representación estandar,

$$\psi = S \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R + \phi_L \\ \phi_R - \phi_L \end{pmatrix}. \tag{2.130}$$

Para un empuje de Lorentz a un marco en movimiento, tenemos, de (2.78) con $\theta = 0$,

$$\begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi'_R \\ \phi'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\sigma\cdot\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\sigma\cdot\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}, \tag{2.131}$$

luego en la representación estandar la matríz de empuje es

$$M_{RE} = SM_{RQ}S^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) & \sigma\cdot\mathbf{n}\mathrm{senh}(\phi/2) \\ \sigma\cdot\mathbf{n}\mathrm{senh}(\phi/2) & \cosh(\phi/2) \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

y como

$$\cosh(\phi/2) = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \qquad \mathrm{senh}(\phi/2) = \left(\frac{\mathrm{E-m}}{\mathrm{2m}}\right)^{1/2}, \qquad \tanh(\phi/2) = \frac{\mid \mathbf{p} \mid}{\mathrm{E+m}}$$

con $\mid \mathbf{p} \mid = (E^2 - m^2)^{1/2}$, obtenemos

$$M_{RE} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x+ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} & \frac{p_x-ip_y}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

y los correspondientes espinores de ondas planas son

$$\begin{array}{ll} \psi^{(\alpha)}(x) = u^{(\alpha)}(p)e^{-ip\cdot x} & \text{energía positiva,} \\ \psi^{(\alpha)}(x) = v^{(\alpha)}(p)e^{ip\cdot x} & \text{energía negativa,} \end{array} \tag{2.134}$$

donde $\alpha = 1,2$, y $u^{(\alpha)}(p)$ y $v^{(\alpha)}(p)$ se obtienen multiplicando M_{RE} por los espinores de reposo (2.126), dando

$$u^{(1)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_l}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \tag{2.135}$$

$$v^{(1)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.136}$$

donde $p_{r,l} = p_x \pm ip_y$. La normalización de los espinores u es

$$\overline{u}^{(1)}u^{(1)} =$$

$$\left(\frac{E+m}{2m}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{p_z}{E+m} & \frac{p_l}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_l}{E+m} \end{pmatrix} = 1,$$

y similarmente para $u^{(2)}$. Los resultados finales son

$$\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})u^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\overline{v}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = -\delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = 0$$

$$u^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p})u^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = v^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2.137}$$

Además de (2.91) y (2.134), u y v satisfacen

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\mathbf{p}) = 0, \;\; (\gamma^\mu p_\mu + m)u(\mathbf{p}) = 0, \tag{2.138}$$

y los espinores adjuntos obedecen

$$\overline{u}(\mathbf{p})(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0, \overline{u}(\mathbf{p})(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0. \tag{2.139}$$

El operador

$$P_+ = \sum_\alpha u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \tag{2.140}$$

también es importante. Es un operador de proyección, ya que, en vista de (2.137),

$${P_+}^2 = \sum_{\alpha,\beta} u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})u^{(\beta)}(\mathbf{p})\overline{u}^{(\beta)}(\mathbf{p}) = \sum_\alpha u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = P_+. \tag{2.141}$$

Claramente elimina estados de energía negativa. Encontraremos ahora una expresión para P_+. De (2.138),

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)P_+ = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{\gamma^\mu p_\mu}{m} P_+ = P_+. \tag{2.142}$$

Ahora asumimos que P_+ es de la forma $a + b\gamma^\mu p_\mu$. Insertando (2.142) en esto tenemos $a = mb$. Entonces usando ${P_+}^2 = P_+$ da $b = 1/2m$, así que finalmente tenemos

$$P_+ = \sum_\alpha u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m}. \tag{2.143}$$

Similarmente el operador de proyección para estados de energía negativa es

$$P_- = -\sum_\alpha v^{(\alpha)}(\mathbf{p})\overline{v}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{2m}. \tag{2.144}$$

Como es de esperarse $P_+ + P_- = 1$. Es apropiado notar algunas propiedades de las trazas. Como estamos trabajando con matrices γ^μ y estas son matrices de 4×4, tenemos

$$Tr\ 1 = 4$$

y empleando la propiedad cíclica de la traza, tenemos

$$\begin{aligned} Tr\ (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) &= Tr\ (\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a) \\ &= \tfrac{1}{2} Tr\ a_\mu b_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= a \cdot b Tr\ 1 = 4a \cdot b. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Mostramos ahora que la traza de un número impar de matrices γ es cero. Para hacerlo, usamos el hecho de que γ^5, definida por (2.115), tiene las propiedades

$$(\gamma^5)^2 = 1, \qquad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{2.146}$$

Adoptemos, por conveniencia, la notación "gorro"

$$a_\mu \gamma^\mu = a \cdot \gamma \equiv \widehat{a}. \tag{2.147}$$

Entonces tenemos

$$Tr\ \widehat{a_1}...\widehat{a_n} = Tr\ \widehat{a_1}...\widehat{a_n}\gamma^5\gamma^5 = Tr\ \gamma_5\widehat{a_1}...\widehat{a_n}\gamma_5.$$

Ahora movemos la γ_5 de la izquierda pasando por cada a, con un consecuente cambio de signo cada vez, obteniendo eventualmente

$$Tr\ \widehat{a_1}...\widehat{a_n} = (-1)^n Tr\ \widehat{a_1}...\widehat{a_n}\gamma_5\gamma_5$$

así que

$$Tr\ \widehat{a_1}...\widehat{a_n} = 0, \quad n \text{ impar}. \tag{2.148}$$

Finalmente, sustituyendo

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$$

en los primeros dos factores de $Tr\ (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d)$, obtenemos

$$Tr\ (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) = -Tr\ (\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) + 2a \cdot b\, Tr\ (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d). \tag{2.149}$$

Estas fórmulas son importantes cuando se calculan secciones transversales de dispersión.

2.7 Límite no Relativista y el Momento Magnético del Electrón

Las partículas con espín también poseen un momento magnético "intrínseco". Ahora, una carga e de momento angular L circulando en una orbita cerrada interacciona con un campo magnético y posee un momento magnético efectivo

$$\mu = \frac{e}{2m}\mathbf{L}. \tag{2.150}$$

Si la naturaleza fuera sencilla, la constante de proporcionalidad entre el espín del electrón $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar\sigma$ y su momento magnético sería la misma, $\frac{e}{2m}$, de manera que el momento magnético intrínseco sería $\frac{e}{2m}|\mathbf{S}| = \frac{e\hbar}{4m}$. El consecuente desplazamiento en las frecuencias de lineas espectrales sería entonces el del efecto de Zeeman "normal". Los experimentos revelan, sin embargo, un efecto de Zeeman "anómalo", explicable si la constante de proporcionalidad para el espín el *dos veces* la del movimiento orbital de manera que el momento magnético del electrón es $-\mu$ donde

$$\mu = 2\frac{e}{2m}\mathbf{S} = \frac{e}{m}\mathbf{S} = \frac{e\hbar}{2m}\sigma. \tag{2.151}$$

(Aquí la carga del electrón se toma como negativa.) El factor 2 algunas veces es llamado el factor g de Landé, $g_s = 2$. Uno de los éxitos de la teoría de Dirac del electrón es que da el valor correcto de g_s. Para derivar esto debemos considerar la ecuación, no para un electrón libre, sino para un electrón en presencia de un campo electromagnético. Hay una prescripción de alargamiento de derivadas para hacer esto, conocida como la prescripción “mínima” (o “sustitución mínima”). Consiste en reemplazar el momento p^μ por

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - eA^\mu \tag{2.152}$$

o, con $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$,

$$E \longrightarrow E - e\phi, \qquad \mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \tag{2.153}$$

La ecuación de Dirac (2.91) es entonces

$$\gamma^0(E - e\phi)\psi - \gamma\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi = m\psi. \tag{2.154}$$

En la representación estandar de la matrices γ (ver (2.128) y (2.129))

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{2.155}$$

de donde obtenemos

$$(E - e\phi)\begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix} - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

que escribimos explícitamente como dos ecuaciones

$$(E - e\phi)\xi - \sigma\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\eta = m\xi, \tag{2.156}$$

$$-(E - e\phi)\eta - \sigma\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\xi = m\eta. \tag{2.157}$$

La segunda ecuación da

$$\eta = (E + m - e\phi)^{-1}\sigma\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\xi.$$

Nótese que el orden de estos factores puede ser importante, ya que si consideramos $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ como operador, él y $\phi(\mathbf{r})$ no conmutan. En el límite no relativista y de campo débil $E + m - e\phi \approx 2m$, $p \approx mv$, así que

$$\eta \approx \frac{1}{2m}\sigma\cdot(\mathbf{p} - e\mathbf{A})\xi = 0\left(\frac{v}{c}\right)\xi \tag{2.158}$$

y vemos que las últimas dos componentes de ψ son mucho más pequeñas que las primeras dos. Insertando (2.158) en (2.156) tenemos

$$E\xi = \frac{(\sigma\cdot\pi)(\sigma\cdot\pi)}{2m}\xi + m\xi + e\phi\xi$$

donde $\pi = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}$, y, con $E = m + W$, tenemos

$$W\xi = \left[\frac{1}{2m}(\sigma\cdot\pi)(\sigma\cdot\pi) + e\phi\right]\xi. \tag{2.159}$$

Ahora usando $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ si sigue que

$$(\sigma\cdot\mathbf{A})(\sigma\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\sigma\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{2.160}$$

por lo que

$$(\sigma \cdot \pi)^2 = \pi \cdot \pi + i\sigma \cdot (\pi \times \pi) = (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + i\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \tag{2.161}$$

La única parte diferente de cero del producto cruz en el último término es

$$\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}. \tag{2.162}$$

Usando la igualdad de operadores

$$[p_i, A_j] = i\hbar \partial_i A_j$$

tenemos, tomando la diferencia con la misma ecuación con $i \leftrightarrow j$,

$$(p_i A_j - p_j A_i) + (A_i p_j - A_j p_i) = -i\hbar(\partial_i A_j - \partial_j A_i).$$

Multiplicando ambos lados por ϵ_{ijk} y sumando sobre i y j obtenemos la componente k de

$$\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \times \mathbf{A} = -i\hbar \mathbf{B},$$

por lo que tenemos un valor para (2.162). Sustituyendo finalmente en (2.159) da $W\xi = \widehat{H}\xi$ donde

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}(\widehat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2m}\sigma \cdot \mathbf{B}. \tag{2.163}$$

Los primeros dos términos dan el Hamiltoniano bien conocido, y el último término es la energía de interacción de un momento magnético (2.151) con un campo magnético. Luego la ecuación de Dirac predice el momento magnético del electrón correcto, con $g_s = 2$.

Los otros términos, que despreciamos (véase la leyenda arriba de (2.158)), dan una interacción espín-orbita con el factor correcto de la precesión de Thomas de 2.

Parte 3

El Grupo de Poincaré

Como ya hemos dicho, la ecuación de Dirac describe partículas con espín $\frac{1}{2}$, y la manera como la derivamos parece garantizarnos esto. Pero para completar la descripción necesitamos encontrar un *operador de espín* S_i $(i = 1, 2, 3)$ con las relaciones de conmutación correctas

$$[S_i.S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k \tag{3.1}$$

y su cuadrado debe ser un invariante del grupo, i.e. debe conmutar con todos los generadores:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S^2 = s(s+1), \tag{3.2}$$

donde s es el espín de la partícula. Adicionalmente, el hecho de que hay dos soluciones a las ecuaciones $\gamma^\mu p_\mu u = mu$ significa que $\mathbf{S}$ debe conmutar con $\gamma^\mu p_\mu$

$$[\mathbf{S}, \gamma^\mu p_\mu] = 0. \tag{3.3}$$

La búsqueda de $\mathbf{S}$ resulta ser particularmente difícil, y no la seguiremos hasta el final pero encontraremos lo suficiente para mostrar algunos aspectos peculiares de la naturaleza del espín.

Podemos intentar como primera suposición

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Este tiene los eigenvalores correctos de para las soluciones de energía positiva y negativa $\pm\frac{1}{2}$, y obedece las relaciones de conmutación (3.1), pero no obedece (3.3) porque

$$[\Sigma, \gamma^\mu] \neq 0.$$

Esto puede verse directamente trabajando con uno o dos conmutadores, u observando que, si definimos

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{3.5}$$

luego, en la representación estandar (2.155),

$$\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk}\Sigma_k, \tag{3.6}$$

y entonces tenemos

$$[\Sigma_i, \gamma_\mu] = i\epsilon_{ijk}(\gamma_j g_{k\mu} - \gamma_k g_{j\mu}).$$

El operador relativista de espín, no es, entonces, $\frac{1}{2}\Sigma$. (Para una partícula en reposo, sin embargo, $\gamma^\mu p_\mu = E\gamma^0$, y entonces $\frac{1}{2}\Sigma$ es un buen operador de espín.) Σ es, por supuesto, la matríz representativa de $\mathbf{S}$, así que concluimos que el operador relativista de espín no es $\frac{1}{2}\mathbf{S}$. Esto se confirma por el hecho de que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S^2$ no conmuta con todos los generadores del grupo de Lorentz. Por ejemplo,

$$[S^2, K_1] = [{S_1}^2, K_1] + [{S_2}^2, K_1] + [{S_3}^2, K_1]$$

y es fácil ver que

$$[{S_1}^2, K_1] = 0,$$

$$[{S_2}^2, K_1] = -i(S_2 K_3 + K_3 S_2),$$

$$[{S_3}^2, K_1] i(S_3 K_2 + K_2 S_3),$$

así que

$$[S^2, K_1] \neq 0.$$

y por lo tanto

$$[S^2, K_i] \neq 0. \tag{3.7}$$

El espín es una propiedad "cinemática" de las partículas elementales. La otra propiedad cinemática obvia que poseen es la masa. Ambas deberían describirse por cantidades invariantes bajo transformaciones relativistas. Ahora, la masa M es dada por

$$M^2 = P_\mu P^\mu \tag{3.8}$$

y P_μ, el operador de momento, no aparece en el análisis del grupo de Lorentz (homogéneo), descrito anteriormente. Esto es porque P_μ es el generador de *translaciones espacio-temporales*

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{3.9}$$

las cuales nunca consideramos. Lo que debemos hacer pues juntar estas transformaciones con las del grupo de Lorentz. Esto da el *grupo de Lorentz inhomogéneo*, comúnmente llamado grupo de Poincaré. Fue Wigner quien mostró por primera vez un análisis de este grupo. Lo que él encontró fue que la masa y el espín efectivamente las dos propiedades que caracterizan a los sistemas invariantes bajo el grupo de Poincaré, y que el espín también corresponde a un grupo de simetría de rotación $SU(2)$, pero *solo si* $M^2 \geq 0$, i.e. si el momento es "del género temporal". En el caso $M^2 = 0$, el espín deja de ser descrito por $SU(2)$, y esto es, de hecho, el porqué del hecho de que los estados de polarización de una partícula sin masa con espín S son $S_z = \pm S$ solamente; por ejemplo, los fotones físicos no existen en un estado $S_z = 0$, mientras que las partículas masivas de espín 1 sí. En el caso de momento de "género espacial", $M^2 \leq 0$, el "espín" nuevamente es diferente, y puede en realidad corresponder a un parámetro contínuo. Veamos ahora la estructura del grupo de Poincaré. Si hacemos una translación a través de una distancia a^μ, $e^{iP\cdot a}$, después un empuje a un marco que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = \tanh\phi$, $e^{iK\cdot\phi}$, luego transladamos de regreso una cantidad $-a^\mu$, y por último empujamos al revés aplicando una velocidad $-\mathbf{v}$, entonces ¿cuál es el resultado final? El grado de diferencia del punto inicial es, por supuesto, la medida de la estructura del grupo. La práctica común es considerar transformaciones infinitesimales (desde las cuales las finitas pueden ser generadas) y así

$$\begin{array}{ll} e^{-i\mathbf{K}\cdot\phi}e^{-iP\cdot a}e^{i\mathbf{K}\cdot\phi}e^{iP\cdot a} & = (1-i\mathbf{K}\cdot\phi)(1-iP\cdot a)(1+i\mathbf{K}\cdot\phi)(1+iP\cdot a) \\ . & = 1+[P_\mu,P_\nu]a^\mu a^\nu + 2[P_\mu,K_i]a^\mu\phi_i + [K_i,K_j]\phi_i\phi_j. \end{array}$$

Por lo que la estructura del grupo se conoce cuando las relaciones de conmutación entre los generadores es conocida. El grupo de Lorentz inhomogéneo tiene diez generadores: tres Ss para rotaciones, tres Ks para empujes y cuatro Ps para translaciones. Las relaciones de conmutación entre las Ss y Ks ya han sido encontradas (2.68). Será pues sencillo derivar una expresión para P_μ, y así calcular el conjunto completo de relaciones de conmutación entre los generadores del grupo de Poincaré. (Las relaciones de conmutación de los generadores de un grupo son llamadas el *álgebra de Lie* del grupo, de manera que (2.68) es el álgebra de Lie del grupo de Lorentz.) Empecemos derivando una expresión para S_z, que genera rotaciones alrededor del eje z:

$$\begin{array}{ll} x' = & x\cos\theta + y\text{sen}\theta, \\ y' = & -x\text{sen}\theta + \text{y}\cos\theta, \\ z' = & z \end{array}$$

El generador S_z es definido a través de su acción sobre una función $f(x,y,z)$ como

$$\begin{array}{ll} S_z f(x,y,z) & = i\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{f(x',y',z')-f(x,y,z)}{\theta}\right] \\ & = i\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{f(x+y\theta,y-x\theta,z)-f(x,y,z)}{\theta}\right] \\ & = i\left(y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{array} \tag{3.10}$$

o

$$S_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{3.11}$$

Similarmente

$$S_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad S_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{3.12}$$

y puede probarse que

$$[S_x, S_y] = iS_z, \qquad \text{y permutaciones cíclicas.} \tag{3.13}$$

Las expresiones (3.11) y (3.12) son las expresiones mecano-cuánticas para los operadores de momento angular (con el factor $\hbar$). La fórmula (3.10) puede reescribirse de acuerdo con la siguiente definición. El generador correspondiente a un parámetro a^α se define como

$$\begin{array}{ll} X_\alpha = & i\left(\frac{\partial x'}{\partial a^\alpha}\Big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial a^\alpha}\Big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial a^\alpha}\Big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t'}{\partial a^\alpha}\Big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial t}1\right) \\ & i\frac{\partial x'^\mu}{\partial a^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (\alpha = 1,...,r). \end{array} \tag{3.14}$$

Esta se refiere a un grupo de transformaciones de r-parámetros. Puede comprobarse que, con $a^\alpha = \theta$, esta definición da S_z. Ahora aplicamos la fórmula (3.14) a las transformaciones de Lorentz puras:

$$x' = \gamma(x + vt), \quad y' = y, \quad z = z, \quad t' = \gamma(t + vx), \qquad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

De manera análoga a como procedimos en (3.10) encontramos que el generador K_x es dado por

$$K_x = i\left(t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{3.15}$$

y similarmente

$$K_y = i\left(t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad K_z = i\left(t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{3.16}$$

Esto da

$$\begin{array}{ll} [K_x, K_y] = -iS_z, & \text{y permutaciones cíclicas,} \\ [K_x, S_y] = iK_z, & \text{y permutaciones cíclicas,} \\ [K_x, S_x] = 0, & \text{etc.,} \end{array} \tag{3.17}$$

exactamente como en (2.68). Vemos nuevamente que las transformaciones de Lorentz puras no forman un subgrupo del grupo de Lorentz, pero las rotaciones sí. Las relaciones (3.13) y (3.17) constituyen el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, que puede ser escrita de manera unificada definiendo

$$J_{\mu\nu}(\mu, \nu = 0, ..., 3) = \left\{ \begin{array}{c} J_{ij} = -J_{ji} = \epsilon_{ijk}S_k \\ J_{i0} = -J_{0i} = -K_i \end{array} \right. \quad (i, j, k, = 1, 2, 3). \tag{3.18}$$

Entonces tenemos

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}). \tag{3.19}$$

Para obtener el álgebra de Lie del grupo de Poincaré debemos tomar en cuenta los generadores de translaciones

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

que son, por (3.14),

$$P_x = i\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \text{etc.,}$$

o

$$P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{3.20}$$

lo que justifica el símbolo P_μ, los generadores de translaciones son los operadores de energía-momento. Ahora es directo probar las relaciones de conmutación

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{3.21}$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho]. \tag{3.22}$$

La relación (3.21) muestra que las translaciones en diferentes direcciones conmutan (lo que es intuitivamente obvio), y (3.21) y(3.22) muestran que tanto **S** y **P** conmutan con el hamiltoniano $P_0 = H$, pero **K** no, así que no da una cantidad conservada. Las relaciones (3.19), (3.21) y (3.22) muestran que el álgebra de Lie que involucra los diez generadores es efectivamente *cerrada* (los operadores en los miembros derechos están contenidos en el conjunto), y por lo tanto que las transformaciones generan un grupo. Una transformación de Lorentz inhomogénea general (o sea, que incluye empujes, rotaciones y translaciones) es

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{3.23}$$

La matríz Λ (una generalización de (2.64) para incluir rotaciones) debe conservar la "longitud" de x: $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$, por lo que

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \tag{3.24}$$

o

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\sigma{}_\mu = \delta^\sigma_\rho, \tag{3.25}$$

así que la inversa de Λ es

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu. \tag{3.26}$$

Apliquemos ahora una segunda transformación $\overline{\Lambda}$ a x'^μ

$$x''^\mu = \overline{\Lambda}^\mu{}_\nu (x'^\nu) + \overline{a}^\mu = \overline{\Lambda}^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_k x^k + \overline{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu + \overline{a}^\mu. \tag{3.27}$$

Esta es de la forma (3.23), y podemos expresar la operación del grupo como

$$\{\overline{\Lambda}, \overline{a}\}\{\Lambda, a\} = \{\overline{\Lambda}\Lambda, \overline{\Lambda}a + \overline{a}\}. \tag{3.28}$$

El elemento unidad es por supuesto $\{1, 0\}$. Veamos ahora el método de Wigner. Este se funda en el hecho de que, para un estado con momento p^μ, el efecto de una transformación de Lorentz es cambiar p_μ, pero dejar $p^\mu p_\mu$ inalterado. En efecto, un estado $|p\rangle$ con

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle \tag{3.29}$$

bajo una transformación (Λ, a) se convierte a

$$U(\Lambda, a) |p\rangle = |\Lambda p\rangle \tag{3.30}$$

con

$$P^\mu |\Lambda p\rangle = (\Lambda p)^\mu |\Lambda p\rangle \tag{3.31}$$

pero por (3.25)

$$(\Lambda p)^2 = (\Lambda p)^\mu (\Lambda p)_\mu = P^\mu P_\mu = P^2. \tag{3.32}$$

Por lo que una transformación de Lorentz deja $P^\mu P_\mu$ invariante. Hasta ahora, esto es porque $P^\mu P_\mu$ conmuta con todos los generadores del grupo, y entonces es un invariante llamado el *primer invariante de Casimir* C_1,

$$C_1 = P^\mu P_\mu. \tag{3.33}$$

Como consecuencia, todos los estados obtenidos por transformaciones de Lorentz desde un estado inicial tienen el mismo valor de p^2. Además, como el signo de p^0 no cambia con una transformación de Lorentz, el conjunto completo de estados que forman bases para representaciones del grupo cae dentro de seis distintas categorías:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & p^2 = m^2 > 0, & p^0 > 0, \\
\text{(ii)} & p^2 = m^2 > 0, & p^0 < 0, \\
\text{(iii)} & p^2 = 0, & p^0 > 0, \\
\text{(iv)} & p^2 = 0, & p^0 < 0, \\
\text{(v)} & p^\mu \equiv 0, & \\
\text{(vi)} & p^2 < 0. &
\end{array} \tag{3.34}$$

La primera y la tercera categorias corresponden a partículas físicas masivas y sin masa, la quinta es el vacío, y la sexta debe corresponder a partículas virtuales (que frecuentemente tienen momento del género espacial).

Habiendo escogido un p^μ particular, que pertenece a una categoría particular $\{p^\mu\}$, una observación importante es que el subgrupo del grupo de Poincaré que deja p^μ invariante, el cual es llamado el *grupito*[1] de p^μ, tiene la misma estructura para todos los momentos en $\{p^\mu\}$. Considérese ahora la categoría (i), $p^2 = m^2$. Un p^μ particular es el del marco de la partícula en reposo; denotémoslo por k^μ:

$$k^\mu = (m, 0, 0, 0). \tag{3.35}$$

¿Cuál será su grupito? Claramente es el grupo de rotaciones, ya que éste no tendrá efecto sobre k^μ:

$$\text{El grupito para } k^\mu \text{ es el grupo de rotaciones } SU(2). \tag{3.36}$$

Así, para un momento del género temporal, saber el efecto de una transformación de Lorentz arbitraria requiere solo un conocimiento de las representaciones del grupo de rotaciones. Esta es la conclusión del trabajo de Wigner, y para entenderla más apropiadamente, vamos a ver algunos detalles. Considérese p^μ del género temporal arbitrario. Claramente existe una transformación de Lorentz que transforma k^μ (el marco en reposo anterior) en p^μ. Llámese $L(p)$:

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p) k^\nu. \tag{3.37}$$

(En general, L será un producto $R^{-1}BR$ donde R es una rotación que lleva a p al eje z y B es un empuje de la forma (2.64.) Denotamos los estados en el espacio de Hilbert $|p, \sigma\rangle$, y $|k, \sigma\rangle$: σ es un índice *de espín*. Correspondientemente a (3.37) en el espacio-tiempo, tenemos la relación en el espacio de Hilbert

$$|p, \sigma\rangle = U(L(p)) \, |k, \sigma\rangle \,. \tag{3.38}$$

[1] A falta de nomenclatura en español para referirse al concepto matemático que en inglés se designa como "little group", se ha traducido directamente y a la vez definido esta palabra.

Aquí $U(L(p))$ es un operador unitario (matríz) que representa a $L(p)$. Ahora considérese una transformación de Lorentz arbitraria Λ,

$$p^\mu \longrightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu, \tag{3.39}$$

y la correspondiente transformación unitaria

$$|p,\sigma\rangle \longrightarrow U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle\,. \tag{3.40}$$

Necesitamos encontrar $U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle$. Primero usamos (3.38):

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = U(\Lambda)U(L(p))\,|k,\sigma\rangle$$

luego multiplicamos por lo que es claramente la identidad

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U^{-1}(L(\Lambda p))U(\Lambda)U(L(p))\,|k,\sigma\rangle$$

después usamos la ley del grupo $U^{-1}(A) = U(A^{-1})$

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p))U(\Lambda)U(L(p))\,|k,\sigma\rangle$$

y de nuevo otra ley de la forma $U(A)U(B)U(C) = U(ABC)$

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\,|k,\sigma\rangle\,. \tag{3.41}$$

Ahora $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ es una matríz que, cuando opera sobre k^μ, da k^μ otra vez, como $L(p)$ cambia k a p (ecuación (3.37)), Λ cambia p a Λp, y $L^{-1}(\Lambda p)$ cambia Λp a k, entonces $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ es una rotación (ver (3.36)), y $U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))$ es entonces una matríz de la forma $\exp(i\mathbf{S}\cdot\theta)$, cuyos elementos denotamos $D_{\sigma'\sigma}(R)$, con $R = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$, así que

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = U(L(\Lambda p))\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)\,|k,\sigma'\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)U(L(\Lambda p))\,|k,\sigma'\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)\,|\Lambda p,\sigma'\rangle\,, \tag{3.42}$$

donde se ha usado (3.38) en la última línea. Concluimos que, para conocer las representaciones del grupo de Lorentz para un estado del género temporal, solo necesitamos saber las representaciones del grupo de rotaciones. Por lo que el espín, definido como cualquier característica que los estados pueden tener y que es afectada por las transformaciones de Lorentz, está dado por el grupo de rotaciones, y hemos entonces probado que (3.36) se cumple para *todos* los momentos de género temporal. Adviértase qué resultado tan impresionante es este. Al principio, cuando aprendiamos mecánica cuántica, *asumiamos* que el espín era un especie de momento angular y por lo tanto dado por una representación del grupo de rotaciones, pero si no fuera por el trabajo de Wigner no tendríamos una explicación razonable de esta suposición. Por otra parte, cuando tratamos la categoria (iii), estados con momento de género temporal, encontramos que esto no es verdad; el espín ya no es dado por el grupo de rotaciones. Aún tenemos que preguntar: si la masa corresponde al operador de Casimir (3.33), ¿qué operador invariante corresponde al espín? Vimos en (3.7) que no es S^2. Introduzcamos el *pseudovector de Pauli-Lubanski* W_μ:

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma. \tag{3.43}$$

Aquí $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo totalmente antisimétrico en cuatro dimensiones. Es claro que W_μ es ortogonal a P^μ:

$$W_\mu P^\mu = 0, \tag{3.44}$$

de manera que en el marco de reposo de la partícula W es de género espacial, $W_\mu = (0, \mathbf{W})$ con

$$W_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{i\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma = -\frac{m}{2}\epsilon_{ijk0}J^{jk} = -m\Sigma_i,$$

que muestra que W_i se reduce esencialmente a Σ_i en el marco de reposo. Puede mostrarse que el segundo invariante de Casimir es

$$C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1) \tag{3.45}$$

donde s es el espín de la partícula. El grupo de Poincaré es de rango 2, así que solo hay dos invariantes de Casimir, que ya encontramos. Lo que todavía no encontramos, sin embargo, son los operadores de espín mismos. No pueden ser $W_i (i = 1, 2, 3)$ porque estos son solo tres componentes de un 4-vector, y en cualquier caso, W_i no tiene las relaciones de conmutación requeridas de $SU(2)$ (3.1). Los operadores de espín correctos son más bien de forma complicada.
Consideremos breve, y finalmente el caso de partículas de género lumínico, $p^2 = 0$. Elijamos

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \tag{3.46}$$

que corresponde al marco de reposo en el caso de género lumínico. Esto describe una partícula sin masa que se mueve a lo largo del eje z. Confiamos en el método del grupito de Wigner nuevamente, así que necesitamos saber cuál es la transformación de Lorentz más general que deja k^μ invariante. Resulta ser una combinación particular de empujes (con parámetros u y v) y rotaciones (parámetros θ y, u, v), y en lugar de $U(L^{-|}(\Lambda p)\Lambda L(p))$ en (3.41) obtenemos

$$U = 1 + i\theta S_3 + iu(K_1 - S_2) + iv(K_2 + S_1) = 1 + i\theta S_3 + iuL_1 + ivL_2. \tag{3.47}$$

Los generadores L_1, L_2 y S_3 forman un álgebra de Lie

$$\begin{aligned} &[L_1, L_2] = 0, \\ &[S_3, L_1] = iL_2, \\ &[L_2, S_3] = iL_1. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Esta no es el álgebra de Lie del grupo de rotaciones $SU(2)$, por el cero en la primera relación. De hecho corresponde al grupo de rotaciones (generadas por S_3) y translaciones (generadas por L_1, L_2) en el plano (el llamado grupo euclidiano $E(2)$). El significado físico de esto no es claro, pero podemos ver que el "espín" de partículas sin masa no es el de las masivas. Podemos de hecho aprender algo de esto notando que, ya que $m^2 = 0$, y de (3.45) tenemos

$$W \cdot W \left|k\right\rangle = 0, \qquad P \cdot P \left|k\right\rangle = 0 \tag{3.49}$$

y de (3.44)

$$W \cdot P \left|k\right\rangle = 0,$$

entonces W^μ y P^μ son ortogonales y ambos de género lumínico. Esto significa que deben ser proporcionales,

$$(W^{\mu} - \lambda P^{\mu}) |k\rangle = 0, \tag{3.50}$$

y tenemos el resultado de que el estado de una partícula sin masa esta caracterizado por un número λ, que es la razón de W^{μ} y P^{μ} y por tanto tiene dimensiones de momento angular. Este es llamado *helicidad*. Si se incluye la paridad, la helicidad toma dos valores, λ y $-\lambda$ para partículas sin masa (este es un famoso teorema de Weinberg [37]). Lo que parece ser un misterio es porqué λ es entero o semientero.

Esto reproduce lo que sabemos acerca del neutrino de Weyl (asumiendo que el neutrino no tiene masa) y el fotón. Un neutrino izquierdo sin masa obedece la ecuación de Weyl y tiene $\lambda = -\frac{1}{2}$. Los fotones pueden tener estados tanto derechos como izquierdos circularmente polarizados, con $\lambda \pm 1$ (pero no $\lambda = 0$), que podría aparecer si el fotón fuera masivo.

Parte 4

Teoría Generalizada para Partículas de Espín $\frac{1}{2}$

4.1 Ecuación de Dirac Generalizada

En esta sección investigaremos la influencia de las fases en las ecuaciones de la MCR. Empezaremos nuevamente con la construcción de la ecuación de Dirac pero tomando en cuenta una fase arbitraria en la llamada relación de Ryder para espinores en reposo. Esta construcción se hace en base a las propiedades de transformación de espinores (reglas de Wigner), las cuales se cumplen para cualquier espín. Con el fin de tener una notación conveniente, procedemos a introducir algunas definiciones, las cuales de hecho utilizaremos para espín arbitrario. Cuando nos refiramos a un espín en particular, se aclarará oportunamente.

Como hicimos anteriormente, vamos a restringirnos a transformaciones de Loretz puras (sin rotaciones). En este caso renombramos las matrices M y N definidas en las ecuaciones (2.73) y (2.74), de manera que se tiene

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \Lambda_R(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu}) = \exp(+\mathbf{S}\cdot\phi) = {\Lambda_L}^{-1}(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu}) \\ N &\longrightarrow \Lambda_L(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu}) = \exp(-\mathbf{S}\cdot\phi) = {\Lambda_R}^{-1}(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde $\overset{0}{p^\mu} = (E, \mathbf{0})$, p^μ esta definido en (2.10), $\mathbf{S} = \sum_i S_i \mathbf{e}_i$ es un operador vectorial compuesto de generadores cuya dimensión depende del espín s en cuestión, y Λ_R (Λ_L) es la representación irreducible $(s, 0)$ ($(0, s)$) del grupo de Lorentz que relaciona los marcos en reposo y en movimiento. Ahora bien, en Mecánica Cuántica las funciones de estado que describen un sistema tienen asociada una arbitrariedad debida a un factor de fase, el cual es anulado al tomar la densidad de probabilidad asociada con la función. Como esta cantidad es la que tiene importancia en la descripción del sistema fisico, la fase queda indefinida. En la MCR que es nuestro caso, vamos a atribuir dicha arbitrariedad en la fase al considerar espinores en un marco en reposo. Entonces podemos escribir la siguiente relación (esta generalización fue hecha por V. Dvoeglazov en [8], [9] y [10]):

$$\begin{aligned} &\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) = e^{+i\alpha}\phi_L(\overset{0}{p^\mu}) \quad \text{(relación de Ryder generalizada)} \\ &\phi_L(\overset{0}{p^\mu}) = e^{-i\alpha}\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Además los espinores en un marco en reposo se relacionan con un marco en movimiento a través de las reglas de Wigner (ver ref.[12])

$$\phi_R(p^\mu) = \Lambda_R(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu})\phi_R(\overset{0}{p^\mu}), \qquad \phi_L(p^\mu) = \Lambda_L(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu})\phi_L(\overset{0}{p^\mu}). \tag{4.3}$$

Introduciendo la relación de Ryder generalizada tenemos

$$\phi_R(p^\mu) = e^{i\alpha}\Lambda_R(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu})\phi_L(\overset{0}{p^\mu}), \qquad \phi_L(p^\mu) = e^{-i\alpha}\Lambda_L(p^\mu \leftarrow \overset{0}{p^\mu})\phi_R(\overset{0}{p^\mu}). \tag{4.4}$$

Para que estas relaciones involucren espinores con momento diferente de cero, es mejor expresarlas de otra forma, observando que un espinor en un marco en reposo puede obtenerse de uno en movimiento bajo una transformación Lorentz inversa. Así, podemos reescribir las expresiones (4.4) de la siguiente forma (en adelante se omitirán los argumentos de las Λ's por comodidad)

$$\phi_R(p^\mu) = e^{i\alpha}\Lambda_R{\Lambda_L}^{-1}\phi_L(p^\mu), \qquad \phi_L(p^\mu) = e^{-i\alpha}\Lambda_L{\Lambda_R}^{-1}\phi_R(p^\mu). \tag{4.5}$$

Ahora bien, como nos interesa introducir la operación paridad necesitamos incluirla en las representaciónes del grupo de Lorentz. Esto se logra haciendo la suma directa de las dos representaciones: $(s, 0) \oplus (0, s)$. Con esto obtenemos una *representación irreducible del grupo de Lorentz extendido a paridad*. Así pues, nuestra función de onda resulta ser un nuevo objeto llamado "biespinor". Entonces escribimos las expresiones (4.5) como

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\Lambda_R{\Lambda_L}^{-1}\phi_L(p^\mu) \\ e^{-i\alpha}\Lambda_L{\Lambda_R}^{-1}\phi_R(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

o con matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha}\Lambda_R{\Lambda_L}^{-1} \\ e^{-i\alpha}\Lambda_L{\Lambda_R}^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}.$$

Podemos definir la matríz de fase $\Omega = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$, de manera que después de multiplicar por esta y agrupar elementos en un solo miembro de la igualdad tenemos

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} & \Lambda_R{\Lambda_L}^{-1} \\ \Lambda_L{\Lambda_R}^{-1} & -e^{i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = 0. \tag{4.7}$$

En el caso particular de espín 1/2 (donde $\mathbf{S} = \frac{\sigma}{2}$), se obtiene

$$\begin{pmatrix} -\exp(-i\alpha) & \exp(\sigma\cdot\phi) \\ \exp(-\sigma\cdot\phi) & \exp(i\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

Luego de desarrollar en series $exp(\pm\sigma\cdot\phi)$ y agrupar términos podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} & [\cosh\phi + (\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathrm{senh}\phi] \\ [\cosh\phi - (\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathrm{senh}\phi] & -e^{i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.9}$$

donde $\hat{\mathbf{n}} = \phi / \mid \phi \mid$. Ahora, introduciendo las relaciones

$$\cosh\phi = E/m, \qquad \mathrm{senh}\phi = \mid \mathbf{p} \mid /\mathrm{m}, \qquad \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}/\mid \mathbf{p} \mid, \tag{4.10}$$

y multiplicando por m tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc} -me^{-i\alpha} & E+\sigma\cdot\mathbf{p} \\ E-\sigma\cdot\mathbf{p} & -me^{i\alpha} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right)=0,$$

o poniendo $\left(\begin{array}{c} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right)=\psi(p^\mu)$:

$$[\gamma^\mu p_\mu - m\Omega]\psi(p^\mu)=0 \tag{4.11}$$

En forma explícita esta es

$$\left(\begin{array}{cc} -m(\cos\alpha - i\text{sen}\alpha) & E+\sigma\cdot\mathbf{p} \\ E-\sigma\cdot\mathbf{p} & -m(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right)=0 \tag{4.12}$$

que con ayuda de las matrices gamma (2.90) y (2.115), podemos escribir como

$$[\gamma^\mu p_\mu - m\cos\alpha + im\gamma^5\text{sen}\alpha]\psi(\mathrm{p}^\mu)=0. \tag{4.13}$$

Resulta que la ecuación de Dirac para biespinores de energía positiva (negativa) se obtiene de aquí al fijar $\alpha=0$ (π), y como puede observarse resultan de elecciones particulares de la fase.

Si hacemos ahora $\alpha=\pm\pi/2$ la ecuación (4.12) se convierte en

$$\left(\begin{array}{cc} \pm im & E+\sigma\cdot\mathbf{p} \\ E-\sigma\cdot\mathbf{p} & \mp im \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_R(p) \\ \phi_L(p) \end{array}\right)=0 \tag{4.14}$$

que podemos reescribir como

$$(\gamma^\mu p_\mu \pm im\gamma^5)\psi(p^\mu)=0; \tag{4.15}$$

escrita en el espacio de las coordenadas ($p^\mu \to i\partial^\mu$) sería:

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m\gamma^5)\psi(x^\mu)=0 \tag{4.16}$$

A primera vista, puesto que la forma de esta ecuación dinámica es diferente de la de Dirac, esperamos que los biespinores tengan una forma diferente y que impliquen tal vez excitaciones físicas nuevas. No obstante, en [8] se muestra que ella está relacionada con la ecuación original de Dirac por medio de una transformación unitaria, de modo que nada debería cambiar. ¡Pero no es así! Esto se debe a que, después de construir una *función lagrangiana* debe ser posible obtener, después de considerar las ecuaciones de Euler-Lagrange, tanto la ecuación (4.16) como su adjunta (análoga a la ecuación (2.101)). Sin embargo, en la misma referencia se demuestra que esto es imposible de hacer utilizando solamente las variables ψ y $\overline{\psi}$, sino que hay que introducir por lo menos otra variable y su correspondiente adjunta, de manera que la nueva función de onda tendría 8 componentes (en [10] esta función ha sido nombrada "dibispinor"). Así pues, a partir del teorema de Noether para la función lagrangiana modificada y considerando algunas simetrías, se deducen expresiones diferentes para por ejemplo, el vector de densidad de corriente, y el operador de carga, el tensor de energía-momento y el tensor de momento angular y el operador de espín. Además las propiedades de las soluciones de la ecuación (4.15) respecto a la operación paridad, son diferentes comparando con las que tienen las soluciones de la ecuación de Dirac.

Otro hecho interesante que cabe mencionar esta relacionado con el anticonmutador de dos funciones de campo libres a una separación arbitraria $x-x'$, a tiempos iguales. El resultado incluye la función de Green par de la ecuación de Klein-Gordon (resultado (11) de [11]), la cual es diferente de cero para $(x - x')^2 \leq 0$, es decir para intervalos del género espacial. Esto implica que observables "locales", que se construyen utilizando los operadores de campo y el teorema de Wick, no conmutan a tiempos iguales. Entonces la teoría implica no-localidad.

Habiendo analizado las implicaciones de la relación (4.2), procedemos a investigar otra posibilidad. Otra posibilidad de relacionar espinores en reposo es a través de una transformación lineal arbitraria $\mathbf{T}$, junto con la operación de conjugación compleja (ver [9], [10]):

$$\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) = \mathbf{T}\phi_L{}^*(\overset{0}{p^\mu}). \tag{4.17}$$

Por otra parte, las matrices de Pauli σ_i junto con la matríz identidad forman un conjunto completo, de manera que cualquier matríz puede escribirse en términos de ellas. Además por un teorema matemático, la propiedad de completez se conserva si se multiplica dicho conjunto por una matríz no singular y podemos expresar a $\mathbf{T}$ usando el nuevo conjunto. Para nuestros propósitos procedemos a multiplicar por la matríz σ_2, para que al expandir a $\mathbf{T}$ en función del conjunto $\{\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_i\}$, la expresión (4.17) quede en la forma

$$\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) = ie^{i\beta}\Theta_{1/2}\phi_L{}^*(\overset{0}{p^\mu}). \tag{4.18}$$

Ahora bien, usando el hecho de que $\Theta_{1/2} = -i\sigma_2$, donde Θ_s es el operador de Wigner (que para cualquier espín satisface $\Theta_s\mathbf{S}\Theta_s{}^{-1} = -\mathbf{S}^*$), obtenemos

$$\phi_L(\overset{0}{p^\mu}) = -ie^{i\beta}\Theta_{1/2}\phi_R{}^*(\overset{0}{p^\mu}). \tag{4.19}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi_R(p^\mu) &= +ie^{i\beta}\Lambda_R\Theta_{1/2}[\Lambda_L{}^{-1}]^*\phi_L{}^*(p^\mu), \\ \phi_L(p^\mu) &= -ie^{i\beta}\Lambda_L\Theta_{1/2}[\Lambda_R{}^{-1}]^*\phi_R{}^*(p^\mu); \end{aligned} \tag{4.20}$$

y usando la propiedad mencionada del operador de Wigner

$$\begin{aligned} \phi_R(p^\mu) &= +ie^{i\beta}\Theta_{1/2}\phi_L{}^*(p^\mu), \\ \phi_L(p^\mu) &= -ie^{i\beta}\Theta_{1/2}\phi_R{}^*(p^\mu). \end{aligned} \tag{4.21}$$

En forma matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = e^{i\beta}\begin{pmatrix} 0 & i\Theta_{1/2} \\ -i\Theta_{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R{}^*(p^\mu) \\ \phi_L{}^*(p^\mu) \end{pmatrix} = S^c{}_{1/2}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

donde $S^c{}_{1/2}$ es el operador de conjugación de carga. Vemos entonces que en el caso de la relación (4.17), en lugar de obtener una ecuación de movimiento se obtiene una condición de autoconjugación de carga, en la cual cada componente del biespinor satisface solamente la ecuación de Klein-Gordon.

Adicionalmente y sin entrar en detalles, mencionamos que a partir de la forma más general de la relación de Ryder

$$\phi_R(\overset{0}{p^\mu}) = \mathbf{T}_1\phi_L(\overset{0}{p^\mu}) + \mathbf{T}_2\phi_L{}^*(\overset{0}{p^\mu}), \tag{4.23}$$

puede obtenerse una ecuación generalizada en la representación $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$:

$$\left(a\frac{\gamma^\mu p_\mu}{m} + b\Omega S^c{}_{1/2} - \Omega\right)\psi(p^\mu) = 0, \tag{4.24}$$

la cual fue obtenida en las referencias citadas.

4.2 Base de Helicidad para espín $\frac{1}{2}$

Existen otras ideas aparte de lo tratado en la sección anterior. En algunos artículos [14, 15, 16, 17] se ha generalizado la ecuación de Dirac de diferente forma. Así mismo se ha generalizado el formalismo de Bargmann y Wigner[18]. En base a esto se ha propuesto un conjunto de 12 ecuaciones para un campo tensorial antisimétrico de segundo rango. Algunas de ellas llevan a transiciones con rompimiento de paridad. En esta sección se presenta un estudio de topicos que se relacionan con los trabajos anteriores [7].

Como es sabido, el operador $\hat{\mathbf{S}}_3 = \sigma_3/2 \otimes I_2$ no conmuta con el Hamiltoniano de Dirac si el 3-momento no está alineado con el tercer eje, es decir el eje z (la función de campo se expande en ondas planas):

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathbf{S}}_3]_- = (\gamma^0\gamma^k \times \nabla_i)_3 \tag{4.25}$$

Además, Berestetskiĭ, Lifshitz y Pitaevskĭ señalan que [19] "... el momento orbital angular $\mathbf{l}$ y el espin $\mathbf{s}$ de una partícula en movimiento no se conservan por separado. Unicamente el momento angular total $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ se conserva. Por eso, la componente del espín en cualquier dirección fija (tomada a lo largo del eje z), tampoco se conserva, y no puede elegirse para enumerar los estados de polarización (espín) de una partícula en movimiento." Lo mismo declaró Novozhilov en su libro [20].

Por otra parte, el operador de helicidad $\sigma \cdot \widehat{\mathbf{p}}/2 \otimes I_2$, $\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ conmuta con el Hamiltoniano (más precisamente, el conmutador es igual a cero cuando actúa sobre las soluciones de onda plana de una partícula fermiónica).

A pesar de ello, lo más común es el empleo de una base construida con 4-espinores tales que son eigen-estados del operador $\hat{\mathbf{S}}_3$,

$$u_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = N^+_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = N^+_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = N^-_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = N^-_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

El primer subíndice significa el espín, el segundo los estados de polarización, y las N son constantes de normalización que aquí eligiremos de manera que se satisfaga (2.137). Estos espinores pueden obtenerse bajo la transformación unitaria que convierte las matrices gamma presentadas en la sección (2.4) de la representación estandar a la llamada representación espinorial (véase ec 2.90). Continuando, adicionalmente a lo dicho la base de helicidad no ha sido bien estudiada ni es muy utilizada (véase sin embargo [20, 21, 22]).

Los espinores en la base usual son

$$u_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ p^- + m \\ -p_r \end{pmatrix} \quad u_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ -p_l \\ p^+ + m \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$v_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ -p^- - m \\ p_r \end{pmatrix} \quad v_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ p_l \\ -p^+ - m \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

donde $p^\pm = E \pm p_z$, $p_{r,l} = p_x \pm ip_y$. Ellos son los autoestados de paridad con autovalores ± 1, donde usamos la matríz $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ como operador de paridad (en [27] puede consultarse el método para obtener la matríz de paridad). Centremos ahora nuestra atención en la base de helicidad. Los 2-eigen-espinores del operador de helicidad

$$\frac{1}{2}\sigma \cdot \widehat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ \mathrm{sen}\theta \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

pueden parametrizarse de la siguiente forma [23, 24]:

$$\phi_{\frac{1}{2}\uparrow} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \phi_{\frac{1}{2}\downarrow} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{+i\phi/2} \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

para los auto-valores $\pm 1/2$, respectivamente.

Ahora bien, para imponer los requerimientos de la teoría cuántica y la teoría relativista a una partícula cualquiera, basta que su función de onda satisfaga una ecuación de Klein y Gordon generalizada.[1] La ecuación sería ya entonces una ecuación de movimiento. En el caso de partículas de espín 1/2 (i. e., dos grados de libertad), debemos esperar por tanto que ella sea equivalente a la ecuación de Dirac que derivamos de forma diferente. Con $c = \hbar = 1$ y dado que $p^2 = (\sigma \cdot \mathbf{p}^2)$ tenemos[2]

$$(E + \sigma \cdot \mathbf{p})(E - \sigma \cdot \mathbf{p})\phi = m^2\phi\,. \tag{4.31}$$

Ésta puede interpretarse como un conjunto de dos ecuaciones de primer grado para 2-espinores. Al mismo tiempo, observamos que estos últimos pueden elegirse como auto-estados del operador de helicidad, que de hecho se encuentra en (4.31):[3]

$$\begin{aligned} (E - (\sigma \cdot \mathbf{p}))\phi_\uparrow &= (E - p)\phi_\uparrow = m\chi_\uparrow\,, && (4.32) \\ (E + (\sigma \cdot \mathbf{p}))\chi_\uparrow &= (E + p)\chi_\uparrow = m\phi_\uparrow\,, && (4.33) \\ (E - (\sigma \cdot \mathbf{p}))\phi_\downarrow &= (E + p)\phi_\downarrow = m\chi_\downarrow\,, && (4.34) \\ (E + (\sigma \cdot \mathbf{p}))\chi_\downarrow &= (E - p)\chi_\downarrow = m\phi_\downarrow\,. && (4.35) \end{aligned}$$

[1] El adjetivo se debe a que podemos escribir esta ecuación para cualquier espín.

[2] El método presentado a continuación se debe a van der Waerden y Sakurai [38]. Recientemente ha sido usado por A. Gersten y V. Dvoeglazov.

[3] Esto no puede hacerse si elegimos la base (4.26), en cual los 4-espinores son autoestados del operador paridad.

En otra base que no sea la de helicidad, no podemos obtener relaciones tan simples entre ϕ_h y χ_h.

Cuando los espinores ϕ han sido definidos por la ecuación (4.30) podemos construir los 4-espinores correspondientes u y v [4]

$$u_\uparrow(p^\mu) = N_\uparrow^+ \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \frac{E-p}{m}\phi_\uparrow \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+p}{m}}\phi_\uparrow \\ \sqrt{\frac{m}{E+p}}\phi_\uparrow \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(p^\mu) = N_\downarrow^+ \begin{pmatrix} \phi_\downarrow \\ \frac{E+p}{m}\phi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{E+p}}\phi_\downarrow \\ \sqrt{\frac{E+p}{m}}\phi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

$$v_\uparrow(p^\mu) = N_\uparrow^- \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ -\frac{E-p}{m}\phi_\uparrow \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+p}{m}}\phi_\uparrow \\ -\sqrt{\frac{m}{E+p}}\phi_\uparrow \end{pmatrix} \quad v_\downarrow(p^\mu) = N_\downarrow^- \begin{pmatrix} \phi_\downarrow \\ -\frac{E+p}{m}\phi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{E+p}}\phi_\downarrow \\ -\sqrt{\frac{E+p}{m}}\phi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

donde se ha normalizado a la unidad (± 1)):[5]

$$\bar{u}_\lambda(p^\mu) u_{\lambda'}(p^\mu) = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \bar{v}_\lambda(p^\mu) v_{\lambda'}(p^\mu) = -\delta_{\lambda\lambda'}\,, \tag{4.42}$$

$$\bar{u}_\lambda(p^\mu) v_{\lambda'}(p^\mu) = 0 = \bar{v}_\lambda(p^\mu) u_{\lambda'}(p^\mu) \tag{4.43}$$

Se puede probar que la matríz

$$P = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

es buena como operador de paridad tanto en la base de helicidad como en la base original de la teoría de Dirac. Es más, los 4-espinores (4.40,4.41) satisfen la ecuación de Dirac en la representación espinorial de las matrices γ (véase directamente de (4.31)). Por eso, la función transformada bajo paridad $\Psi'(t, -\mathbf{x}) = P\Psi(t, \mathbf{x})$ tiene que satisfer la ecuación siguiente

$$[i\gamma^\mu \partial'_\mu - m]\Psi'(t, -\mathbf{x}) = 0\,, \tag{4.45}$$

con $\partial'_\mu = (\partial/\partial t, -\nabla_i)$. Esto es posible solo cuando $P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0$ y $P^{-1}\gamma^i P = -\gamma^i$. La matríz (4.44) cumple con los requerimientos exigidos normalmente. También es posible construir operadores de proyección sobre los estados u y v similares a (2.143) y (2.144)

[4] También se puede intentar construir otro esquema diferente de la teoría de Dirac: los 4-espinores podrían ser considerados no como autoespinores del operador de helicidad en el espacio de representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$, cf. [15], sino que podrían ser los auto-estados del operador de helicidad *quiral*, que fue introducida en [2a]. En este caso, en lugar de las ecuaciones de Dirac las ecuaciones en el espacio de momentos pueden escribirse (cf. [2c],[16])

$$p_\mu \gamma^\mu \mathcal{U}_\uparrow - m\mathcal{U}_\downarrow = 0\,, \tag{4.36}$$

$$p_\mu \gamma^\mu \mathcal{U}_\downarrow - m\mathcal{U}_\uparrow = 0\,, \tag{4.37}$$

$$p_\mu \gamma^\mu \mathcal{V}_\uparrow + m\mathcal{V}_\downarrow = 0\,, \tag{4.38}$$

$$p_\mu \gamma^\mu \mathcal{V}_\downarrow - m\mathcal{V}_\uparrow = 0\,. \tag{4.39}$$

Las flechas $\uparrow\downarrow$ se refieren a los estados de helicidad quiral, por ejemplo, $u_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N\phi_\eta \\ N^{-1}\phi_{-\eta} \end{pmatrix}$.

[5] Claro, que no hay dificultades en cambiar la normalización a $\pm m$, que puede ser más conveniente para el estudio del límite sin masa.

$$P_+ = +\sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{p})\bar{u}_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{2m}\,, \tag{4.46}$$

$$P_- = -\sum_\lambda v_\lambda(\mathbf{p})\bar{v}_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{m - p_\mu\gamma^\mu}{2m}\,, \tag{4.47}$$

con las propiedades requeridas $P_+ + P_- = 1$ y $P_\pm^2 = P_\pm$. Con ellos podemos expandir los 4-espinores definidos en la base (4.26) como una combinación lineal de los 4-espinores en la base de helicidad:

$$u_\sigma(p^\mu) = A_{\sigma\lambda}u_\lambda(p^\mu) + B_{\sigma\lambda}v_\lambda(p^\mu)\,, \tag{4.48}$$

$$v_\sigma(p^\mu) = C_{\sigma\lambda}u_\lambda(p^\mu) + D_{\sigma\lambda}v_\lambda(p^\mu)\,. \tag{4.49}$$

Multiplicando estas ecuaciones por $\bar{u}_{\lambda'}$, $\bar{v}_{\lambda'}$ y utilizando las condiciones de normalización, obtenemos $A_{\sigma\lambda} = D_{\sigma\lambda} = \bar{u}_\lambda u_\sigma$, $B_{\sigma\lambda} = C_{\sigma\lambda} = -\bar{v}_\lambda u_\sigma$. Así que, la matríz de transformación de la base usual a la base de helicidad es

$$\begin{pmatrix} u_\sigma \\ v_\sigma \end{pmatrix} = \mathcal{U}\begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

en la que ni A ni B son unitarias:

$$A = (a_{++} + a_{+-})(\sigma_\mu a^\mu) + (-a_{-+} + a_{--})(\sigma_\mu a^\mu)\sigma_3\,, \tag{4.51}$$

$$B = (-a_{++} + a_{+-})(\sigma_\mu a^\mu) + (a_{-+} + a_{--})(\sigma_\mu a^\mu)\sigma_3\,, \tag{4.52}$$

donde

$$a^0 = -i\cos(\theta/2)\mathrm{sen}(\phi/2) \in \Im\mathrm{m}\,, \quad \mathrm{a}^1 = \mathrm{sen}(\theta/2)\cos(\phi/2) \in \Re\mathrm{e}\,, \tag{4.53}$$

$$a^2 = \mathrm{sen}(\theta/2)\mathrm{sen}(\phi/2) \in \Re\mathrm{e}\,, \quad \mathrm{a}^3 = \cos(\theta/2)\cos(\phi/2) \in \Re\mathrm{e}\,, \tag{4.54}$$

y

$$a_{++} = \frac{\sqrt{(E+m)(E+p)}}{2\sqrt{2}m}\,, \quad a_{+-} = \frac{\sqrt{(E+m)(E-p)}}{2\sqrt{2}m}\,, \tag{4.55}$$

$$a_{-+} = \frac{\sqrt{(E-m)(E+p)}}{2\sqrt{2}m}\,, \quad a_{--} = \frac{\sqrt{(E-m)(E-p)}}{2\sqrt{2}m}\,. \tag{4.56}$$

Sin embargo, $A^\dagger A + B^\dagger B = 1$, que lleva a la conclusión de que la matríz de 4×4 $\mathcal{U}$ es unitaria. Esta matríz actúa a los índices de *espín* (σ,λ), *no* a los indices espinoriales, por lo que la transformación también se expresa en la siguiente forma:

$$u_\sigma^\alpha = [A_{\sigma\lambda} \otimes I_{\alpha\beta} + B_{\sigma\lambda} \otimes \gamma^5_{\alpha\beta}]u_\lambda^\beta\,, \tag{4.57}$$

$$v_\sigma^\alpha = [A_{\sigma\lambda} \otimes I_{\alpha\beta} + B_{\sigma\lambda} \otimes \gamma^5_{\alpha\beta}]v_\lambda^\beta\,. \tag{4.58}$$

A continuación se investigan las propiedades de los 4-espinores en la base de helicidad con respecto a las operaciones de simetrias discretas P, C y T. Se espera que $\lambda \to -\lambda$ con respecto a paridad P, como dicen Berestetskiĭ, Lifshitz y Pitaevskiĭ [19].[6] Para $\mathbf{p}$ tenemos $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$. Esto implica en un sistema de coordenadas esféricas que los ángulos cambian según $\theta \to \pi - \theta$, $\varphi \to \pi + \varphi$ y los 2-autoespinores de helicidad $\phi_{\uparrow\downarrow}$ se transforman a $-i\phi_{\downarrow\uparrow}$, vease [24]. Entonces,

$$
\begin{aligned}
Pu_{\uparrow}(-\mathbf{p}) &= -iu_{\downarrow}(\mathbf{p})\,, Pv_{\uparrow}(-\mathbf{p}) = +iv_{\downarrow}(\mathbf{p})\,, && (4.59)\\
Pu_{\downarrow}(-\mathbf{p}) &= -iu_{\uparrow}(\mathbf{p})\,, Pv_{\downarrow}(-\mathbf{p}) = +iv_{\uparrow}(\mathbf{p})\,. && (4.60)
\end{aligned}
$$

Concluimos que a nivel clásico (dentro de la Teoría Clásica de Campos), los 4-espinores de helicidad se transforman a los 4-espinores de helicidad opuesta.
Con respecto a la operación de conjugación de carga:

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ -\Theta & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K} \tag{4.61}
$$

donde K es la operación *conjugación compleja*, tenemos

$$
\begin{aligned}
Cu_{\uparrow}(\mathbf{p}) &= -v_{\downarrow}(\mathbf{p})\,, Cv_{\uparrow}(\mathbf{p}) = +u_{\downarrow}(\mathbf{p})\,, && (4.62)\\
Cu_{\downarrow}(\mathbf{p}) &= +v_{\uparrow}(\mathbf{p})\,, Cv_{\downarrow}(\mathbf{p}) = -u_{\uparrow}(\mathbf{p})\,, && (4.63)
\end{aligned}
$$

gracias a las propiedades del operador de Wigner $\Theta\phi_{\uparrow}^{*} = -\phi_{\downarrow}$ y $\Theta\phi_{\downarrow}^{*} = \phi_{\uparrow}$. En el caso de la operación CP (y PC) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
CPu_{\uparrow}(-\mathbf{p}) &= -PCu_{\uparrow}(-\mathbf{p}) = +iv_{\uparrow}(\mathbf{p})\,, && (4.64)\\
CPu_{\downarrow}(-\mathbf{p}) &= -PCu_{\downarrow}(-\mathbf{p}) = -iv_{\downarrow}(\mathbf{p})\,, && (4.65)\\
CPv_{\uparrow}(-\mathbf{p}) &= -PCv_{\uparrow}(-\mathbf{p}) = +iu_{\uparrow}(\mathbf{p})\,, && (4.66)\\
CPv_{\downarrow}(-\mathbf{p}) &= -PCv_{\downarrow}(-\mathbf{p}) = -iu_{\downarrow}(\mathbf{p})\,. && (4.67)
\end{aligned}
$$

En el espacio de Fock pueden encontrarse resultados similares.[7] Para ello definimos el operador de campo como

$$
\Psi(x^{\mu}) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} [u_{\lambda} a_{\lambda} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + v_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} e^{+ip_{\mu}x^{\mu}}] \tag{4.68}
$$

Donde se introduce un factor $\sqrt{m}$ para conservar la normalización acostumbrada de campos fermiónicos. En el sistema de unidades $c = \hbar = 1$, dichos campos deben tener dimensiones de $[energia]^{3/2}$, con objeto de que la acción $S = \int \mathcal{L} d^4x$ sea adimensional (en concordancia con $\hbar = 1$). Se asume que las relaciones de conmutación son las relaciones estándar [25, 26, 27, 28][8] (compare con [15, 16])

[6] De hecho, si $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, entonces el vector $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, pero el pseudovector $\mathbf{S} \to \mathbf{S}$, de donde se sigue la declaración de arriba.

[7] Lo que sigue fue hecho en [7].

[8] Los unicos cambios posibles pueden ser relacionados con formas diferentes de normalización de los 4-espinores, los cuales contribuyen un factor adicional de la función δ.

$$
\begin{aligned}
\Big[a_\lambda(\mathbf{p}), a^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ &= 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta_{\lambda\lambda'} \quad [a_\lambda(\mathbf{p}), a_{\lambda'}(\mathbf{k})]_+ = 0 = \Big[a^\dagger_\lambda(\mathbf{p}), a^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ \,, &(4.69)\\
\Big[a_\lambda(\mathbf{p}), b^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ &= 0 \;= \Big[b_\lambda(\mathbf{p}), a^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ \,, &(4.70)\\
\Big[b_\lambda(\mathbf{p}), b^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ &= 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta_{\lambda\lambda'} \quad [b_\lambda(\mathbf{p}), b_{\lambda'}(\mathbf{k})]_+ = 0 = \Big[b^\dagger_\lambda(\mathbf{p}), b^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k})\Big]_+ \,. &(4.71)
\end{aligned}
$$

Si uno define $U_P\Psi(x^\mu)U_P^{-1} = \gamma^0\Psi(x^{\mu'})$, $U_C\Psi(x^\mu)U_C^{-1} = C\Psi^\dagger(x^\mu)$ y el operador anti-unitario de inversión del tiempo $(V_T\Psi(x^\mu)V_T^{-1})^\dagger = T\Psi^\dagger(x^{\mu''})$, entonces es fácil obtener las transformaciones corespondientes de los operadores de creación y anniquilación (cf. los libros de texto citados).

$$
\begin{aligned}
U_P a_\lambda U_P^{-1} &= -ia_{-\lambda}(-\mathbf{p}) \quad U_P b_\lambda U_P^{-1} = -ib_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,, &(4.72)\\
U_C a_\lambda U_C^{-1} &= (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda} b_{-\lambda}(\mathbf{p}) \quad U_C b_\lambda U_C^{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} a_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,. &(4.73)
\end{aligned}
$$

Como consecuencia, obtenemos (si el vacío físico tiene paridades postivas $U_P|0> = |0>$, $U_C|0> = |0>$)

$$
\begin{aligned}
&U_P a^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = U_P a^\dagger_\lambda U_P^{-1}|0> = ia^\dagger_{-\lambda}(-\mathbf{p})|0> = i|-\mathbf{p}, -\lambda>^+\,, &(4.74)\\
&U_P b^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = U_P b^\dagger_\lambda U_P^{-1}|0> = ib^\dagger_{-\lambda}(-\mathbf{p})|0> = i|-\mathbf{p}, -\lambda>^-\,; &(4.75)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&U_C a^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = U_C a^\dagger_\lambda U_C^{-1}|0> = (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda} b^\dagger_{-\lambda}(\mathbf{p})|0> = (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda}|\mathbf{p}, -\lambda>^-\,, &(4.76)\\
&U_C b^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = U_C b^\dagger_\lambda U_C^{-1}|0> = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} a^\dagger_{-\lambda}(\mathbf{p})|0> = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}|\mathbf{p}, -\lambda>^+\,. &(4.77)
\end{aligned}
$$

Finalmente, para la operación CP obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&U_P U_C a^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = -U_C U_P a^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda} U_P b^\dagger_{-\lambda}|0> =\\
&= (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda} b^\dagger_\lambda(-\mathbf{p})|0> = (-1)^{\frac{1}{2}+\lambda}|-\mathbf{p}, \lambda>^-\,, &(4.78)\\
&U_P U_C b^\dagger_\lambda(\mathbf{p})|0> = -U_C U_P b^\dagger_\lambda(\mathbf{p}) = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} U_P a^\dagger_{-\lambda}|0> =\\
&= (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} a^\dagger_\lambda(-\mathbf{p})|0> = (-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}|-\mathbf{p}, -\lambda>^+\,, &(4.79)
\end{aligned}
$$

lo que significa que las operaciones P y C anticonmutan en el caso de la representación $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$, el cuál es un resultado opuesto al de la teoría basada en 4-espinores, eigen-estados de helicidad quiral (cf. [16]). Debido a que V_T es un operador anti-unitario, hay que tomar en cuenta que en este caso los c-numeros se ponen afuera de operación de conjugación hermitica *sin* conjugación compleja:

$$
[V_T\lambda A V_T^{-1}]^\dagger = [\lambda^* V_T A V_T^{-1}]^\dagger = \lambda[V_T A^\dagger V_T^{-1}]\,. \tag{4.80}
$$

Tomando en cuenta esta definición obtenemos:[9]

[9]Se escoge $T = \begin{pmatrix}\Theta & 0\\ 0 & \Theta\end{pmatrix}$ de manera que se satisfagan las condiciones $T^{-1}\gamma_0^T T = \gamma_0$, $T^{-1}\gamma_i^T T = \gamma_i$ y $T^T = -T$.

$$
\begin{aligned}
V_T a^\dagger_\lambda V_T^{-1} &= +i(-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} a^\dagger_\lambda(-\mathbf{p})\,, &(4.81)\\
V_T b_\lambda V_T^{-1} &= +i(-1)^{\frac{1}{2}-\lambda} b_\lambda(-\mathbf{p})\,. &(4.82)
\end{aligned}
$$

Además, observamos que la respuesta a la pregunta de si una partícula y su antipartícula tienen paridades iguales u opuestas, depende de un factor de fase según la siguiente expresión:

$$
U_P \Psi(t,\mathbf{x}) U_P^{-1} = e^{i\alpha}\gamma^0 \Psi(t,-\mathbf{x})\,. \tag{4.83}
$$

De hecho, si repetimos el procedimiento de los libros de texto [28], tenemos:

$$
\begin{aligned}
&U_P \left[\sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} (u_\lambda(\mathbf{p}) a_\lambda(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + v_\lambda(\mathbf{p}) b^\dagger_\lambda(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu}) \right] U_P^{-1} = \\
&= e^{i\alpha} \left[\sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} (\gamma^0 u_\lambda(-\mathbf{p}) a_\lambda(-\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \gamma^0 v_\lambda(-\mathbf{p}) b^\dagger_\lambda(-\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu}) \right] = \\
&= e^{i\alpha} \left[\sum_\lambda \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} (-iu_{-\lambda}(\mathbf{p}) a_\lambda(-\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + iv_\lambda(\mathbf{p}) b^\dagger_\lambda(-\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu}) \right]. \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

Multiplicando por $u_{\lambda'}(\mathbf{p})$ y $v_{\lambda'}(\mathbf{p})$ consecutivamente, y usando las condiciones de normalización, obtenemos

$$
\begin{aligned}
U_P a_\lambda U_P^{-1} &= -ie^{i\alpha} a_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,, &(4.85)\\
U_P b^\dagger_\lambda U_P^{-1} &= +ie^{i\alpha} b^\dagger_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,. &(4.86)
\end{aligned}
$$

Como se ve, $\alpha = \pi/2$ nos lleva a paridades *opuestas* de los operadores de creación y aniquilación para partículas y anti-partículas:

$$
\begin{aligned}
U_P a_\lambda U_P^{-1} &= +a_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,, &(4.87)\\
U_P b_\lambda U_P^{-1} &= -b_{-\lambda}(-\mathbf{p})\,. &(4.88)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se conserva una diferencia que se encuentra en el caso de Dirac: λ transforma a $-\lambda$. Como conclusión, vemos que la cuestión de paridades relativas intrínsecas iguales (u opuestas) está relacionada con el factor de fase en la ecuación (4.83). En cierto sentido tenemos una situación parecida en la construcción del operador de campo para neutrinos (cf. con el factor de fase de Goldhaber y Kayser).

Finalmente, se procede a buscar la forma explícita del operador de paridad U_P. Probaremos que él conmuta con el Hamiltoniano. Vamos utilizar el método presentado en [28, §10.2-10.3]. Éste está basado en la prescripción de que $U_P = \exp[i\alpha\hat{A}]\exp[i\hat{B}]$ con $\hat{A} = \sum_s \int d^3\mathbf{p}[a^\dagger_{\mathbf{p},s} a_{-\mathbf{p}s} + b^\dagger_{\mathbf{p}s} b_{-\mathbf{p}s}]$ y $\hat{B} = \sum_s \int d^3\mathbf{p}[\beta a^\dagger_{\mathbf{p},s} a_{\mathbf{p}s} + \gamma b^\dagger_{\mathbf{p}s} b_{\mathbf{p}s}]$. Utilizando la identidad

$$
e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}]_- + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \dots \tag{4.89}
$$

y $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]_- = [\hat{A}, \hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]_+$ se puede fijar los parámetros α, β, γ de tal manera que se satisfaga el *requerimiento físico* de que las partículas de Dirac tengan paridades opuestas. En nuestro caso, necesitamos satisfacer (4.72), i.e., el operador tiene que invertir no solo el signo del momento, sino también el signo de la helicidad. Esto puede hacerse proponiendo un postulado parecido: $U_P = e^{i\alpha\hat{A}}$ con

$$\hat{A} = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E}[a^\dagger_\lambda(\mathbf{p})a_{-\lambda}(-\mathbf{p}) + b^\dagger_\lambda(\mathbf{p})b_{-\lambda}(-\mathbf{p})]\,. \tag{4.90}$$

Como puede comprobarse directamente, las equaciones (4.72) se satisfacen si $\alpha = \pi/2$. Hay que comparar este operador de paridad con el que fue dado en [27, 28] para el campo de Dirac:[10]

$$\begin{aligned} U_P = \exp\Bigg[i\frac{\pi}{2} \int d^3\mathbf{p} \sum_s \big(& a(\mathbf{p},s)^\dagger a(\tilde{\mathbf{p}},s) + b(\mathbf{p},s)^\dagger b(\tilde{\mathbf{p}},s) - \\ & -a(\mathbf{p},s)^\dagger a(\mathbf{p},s) + d(\mathbf{p},s)^\dagger b(\mathbf{p},s)\big)\Bigg]\,, \quad \text{(10.69) del trabajo [28]} \end{aligned} \tag{4.91}$$

Verificando directamente se puede llegar a que en el espacio de Fock, nuestro nuevo operador U_P conmuta con el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}\Theta^{00} = \int d^3\mathbf{k} \sum_\lambda [a^\dagger_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k}) - b_\lambda(\mathbf{k})b^\dagger_\lambda(\mathbf{k})]\,, \tag{4.92}$$

i.e.

$$[U_P, \mathcal{H}]_- = 0\,. \tag{4.93}$$

Por cierto, podemos intentar escoger otros conjuntos además de las relaciones de conmutación [2b,3] (por ejemplo, considerando un conjunto de estados bi-ortonormales). Hemos probado entonces que los espinores en la base de helicidad no son eigen-estados de paridad tanto a nivel de teoría clásica de campos como a nivel de *segunda cuantización.* Ya que paridad es un número cuántico "bueno", esto puede tener consecuencias en las interpretaciones físicas.

Entre las teorías generalizadas podemos mencionar una teoría en la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, basada en los 4-autoespinores de helicidad quiral. Además se han descubierto relaciones con la consideración de Foldy y Nigam. Las ecuaciones correspondientes fueron tratadas en [16] y otros artículos. Posteriormente surgieron artículos de Ziino y Barut [14] entre otros, que también tienen relaciones con las cuestiónes que hemos discutido. Una teoría análoga para la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$ se construye si definimos los operadores de campo como:

$$\Psi_1 \quad = \quad \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} \left[(u_\uparrow a_\uparrow + v_\uparrow b_\uparrow)e^{-ip_\mu x^\mu} + (u_\uparrow a^\dagger_\uparrow + v_\uparrow b^\dagger_\uparrow)e^{+ip_\mu x^\mu}\right]\,, \tag{4.94}$$

[10] Greiner utilizó las siguientes relaciones de conmutación $\left[a(\mathbf{p},s), a^\dagger(\mathbf{p}',s')\right]_+ = \left[b(\mathbf{p},s), b^\dagger(\mathbf{p}',s')\right]_+ = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{ss'}$. Se debe notar que la forma de Greiner del operador de paridad no es única. Itzykson and Zuber [27] propusieron otra, que difiere del trabajo [28] por varios factores de fase. Para buscar las relaciones entre estas dos formas de operadores de paridad se debe aplicar una rotación adicional en el espacio de Fock.

$$\Psi_2 \quad = \quad \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{m}}{2E} \left[(u_\downarrow a_\downarrow - v_\downarrow b_\downarrow) e^{-ip_\mu x^\mu} + (u_\downarrow a_\downarrow^\dagger - v_\downarrow b_\downarrow^\dagger) e^{+ip_\mu x^\mu} \right] . \qquad (4.95)$$

En la siguiente parte del presente trabajo se presentan las algunas de las ideas tratadas en esta parte de la tesis para el caso de partículas de espín 1.

Parte 5

Teoría para Partículas de Espín 1

A partir de aquí analizaremos partículas de espín 1. Primero introduciremos en esta sección las teorías con las que se ellas se relacionan. Suponemos que los fotones no tienen masa y son descritos por las ecuaciones de Maxwell, y las partículas masivas de espín 1 (por ejemplo, los bosones intermediarios $W^{\pm}$ de la interacción débil) son descritos por la ecuación de Proca.

5.1 Las Ecuaciones de Maxwell y Proca

Las ecuaciones de Maxwell describen los campos eléctricos y magnéticos, los cuales son tomados como entes contínuos (a primera vista no tienen nada que ver con partículas). En el tiempo en que fueron descubiertas, no se tenía cuenta de la MC, mecánica cuántica, ni de la TER, Teoría Especial de la Relatividad. Sin embargo resulta que son covariantes bajo transformaciones de Lorentz. Esta fue una observación de Einstein y de hecho fue la causa del nacimiento de la TER. En lo que sigue se busca una notación que exprese la covarianza explícitamente. Las ecuaciones de Maxwell (en unidades racionalizadas Heaviside-Lorentz, de manera que $e^2/4\pi hc = \alpha = 1/137$) son

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \ div\mathbf{B} = 0, \qquad \text{(b)}\ \ rot\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ &\text{(c)}\ \ div\mathbf{E} = \rho, \qquad \text{(d)}\ \ rot\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(a) nos dice que no hay cargas magnéticas, (b) es la ley de Faraday, que se interpreta generalmente como que un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico. (c) es la ley de Gauss: la carga eléctrica es fuente de campo eléctrico; (d) es la ley de Ampere con un término adicional debido a Maxwell: la corriente eléctrica y/o campos eléctricos cambiantes generan campos magnéticos. Las ecuaciones (a) y (b) son conocidas como las ecuaciones homogéneas, (c) y (d) como las inhomogéneas. Introduciendo el 4-vector potencial

$$A^{\mu} = (\phi, \mathbf{A}) \tag{5.2}$$

con

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \tag{5.3}$$

las ecuaciones (a) y (b) quedan *automáticmente satisfechas*, ya que div(rot)=0 y rot(grad)=0. Obsérvese que los miembros derechos de la ecuaciones (5.3) son las componentes de un rotacional 4-dimensional, definido por

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{5.4}$$

Este tiene componentes (recuérdese que $\partial^i = -\partial_i$)

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi\right)_i = -E^i \tag{5.5}$$

y

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k, \tag{5.6}$$

donde $\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$ es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico (2.122). Las ecuaciones (5.4) y (5.5) pueden escribirse en forma matricial, donde las filas y las columnas corresponden a los números 0,1,2,3:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

$F^{\mu\nu}$ es llamado el *tensor de campo electromagnético*. Bajo transformaciones de Lorentz se transforma como un tensor antisimétrico de segundo rango.

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}.$$

Resumiendo: si escribimos los campos eléctricos y magnéticos en términos del tensor $F^{\mu\nu}$, entonces el enunciado de que $F^{\mu\nu}$ es un rotacional 4-dimensional significa que las primeras dos ecuaciones de Maxwell (homogéneas) se satisfacen automáticamente.
Consideremos ahora las ecuaciones inhomogéneas. Ambas están contenidas en la ecuación covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{5.8}$$

con

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}). \tag{5.9}$$

Si se hace $\nu = 0$ da

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho,$$

$$-\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} = j^1,$$

que es la componente 1 de (d). Aunque (5.3) especifica los campos eléctrico y magnético en términos de $\mathbf{A}$ y ϕ, no lo hace de manera unica, porque bajo una *transformación de calibración*

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} - \nabla\xi, \qquad \phi \longrightarrow \phi + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{5.10}$$

que tiene la forma covariante

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \xi, \tag{5.11}$$

donde ξ es una función escalar arbitraria, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ permanecen sin cambio; lo mismo con $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu)\xi = F^{\mu\nu}. \tag{5.12}$$

Sustituyendo (5.4) en (5.8) vemos que A^μ satisface

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{5.13}$$

Podemos ahora hacer uso de (5.11) y escoger un ξ tal que el A^μ transformado satisfaga la condición de *calibración de Lorentz*:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{5.14}$$

Con esta elección de calibración (5.13) es

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu = j^\mu, \tag{5.15}$$

la cual enuncia las bien conocidas ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \rho, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}, \tag{5.16}$$

cuyas soluciones dan los potenciales de Liénard-Wiechert (ver [3]). En el *vacío*, la ecuación (5.15) es

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu = 0, \tag{5.17}$$

que significa que cuando la naturaleza cuántica del campo electromagnético está completamente explotada, parecería corresponder a partículas sin masa (que por lo tanto viajan a la velocidad de la luz)[1]. Ahora tenemos que presentar las ecuaciones de Maxwell en una forma manifiestamente covariante. Las ecuaciones homogéneas (a) y (b) están resumidas en la ecuación (5.4). Las ecuaciones inhomogéneas (c) y (d) están resumidas en (5.8). Ahora mostraremos que hay una forma hábil de combinar las ecuaciones (5.3) y (5.4), tal que no se necesita hacer referencia al vector potencial A^μ. De (5.4) se sigue que

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \tag{5.18}$$

Definimos ahora el *tensor dual* $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ por

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{5.19}$$

donde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita en cuatro dimensiones. Sus elementos son

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

[1] Esto es compatible con la relación de Einstein 1.3 para cuando m=0.

Por la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, se sigue que la ecuación

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{5.21}$$

reproduce (5.18); alternativamente (5.20) da las ecuaciones de Maxwell (a) y (b). En conclusión las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en la forma compacta

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.22}$$

Las partículas masivas de espín 1 obedecen ecuaciones que generalizan las ecuaciones de Maxwell (sin fuentes). Son conocidas como las *ecuaciones de Proca*:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{5.23}$$

Tomando la divergencia de esto tenemos

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0, \tag{5.24}$$

y como $m^2 \neq 0$, encontramos que $\partial_\nu A^\nu = 0$; la condición de Lorentz, siempre es válida para partículas masivas de espín 1, se pierde la libertad de transformaciones de calibración que tenían las ecuaciones de Maxwell. De hecho, como $F^{\mu\nu}$ es un invariante de calibración, se sigue de (5.23) que *las ecuaciones para partículas masivas de espín 1 no son invariantes de calibración.* Sustituyendo (5.24) en (5.23) obtenemos

$$(\partial^\alpha \partial_\alpha + m^2) A^\mu = 0 \tag{5.25}$$

así como

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{5.26}$$

La ecuación (5.25) muestra, como es de esperarse, que tenemos partículas de masa m (es compatible con $E^2 - p^2 = m^2$). La ecuación (5.26) es una condición impuesta a las cuatro componentes de A^μ, así que hay solo tres componentes independientes, lo que es apropiado para una partícula masiva de espín 1[2]. Haciendo un recuento general de las ecuaciones de onda tenemos

$$\begin{array}{ll}
(\partial^\alpha \partial_\alpha + m^2)\phi = 0, & \text{(Klein-Gordon)} \\[1em]
(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, & \text{(Dirac)} \\
(\partial^\alpha \partial_\alpha + m^2)\psi = 0, & \\[1em]
\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, & \text{(Maxwell)} \\
\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu = 0, & \\[1em]
\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, & \text{(Proca)} \\
(\partial^\alpha \partial_\alpha + m^2) A^\mu = 0. &
\end{array}$$

Cada componente del campo de espín $\frac{1}{2}$ y espín 1 satisface una ecuación de Klein-Gordon (con $m = 0$ para el fotón), que es, después de todo, solamente un requerimiento de la relatividad

[2]De esta manera hemos eliminado la componente correspondiente a espín 0 del 4-potencial, la cual aparece al construir la representación $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz.

$(E^2 - p^2 = m^2)$ y la teoría cuántica ($E \longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{p} \longrightarrow -i\nabla$). Por lo tanto las ecuaciones de Dirac, Maxwell y Proca son de diferente tipo de la ecuación de Klein-Gordon. Vimos anteriormente que la ecuación de Dirac podría derivarse considerando la transfomación de espinores bajo el grupo de Lorentz, y puede mostrarse (ver Cap. 5 en [26] y parte 5.3) que las ecuaciones de Maxwell y Proca pueden obtenerse de la misma manera. Entonces estas ecuaciones para campos de espín diferente de cero, son simplemente una relación entre las componentes del espín. La ecuación de Klein-Gordon no es de esta naturaleza, ya que solo tenemos una componente.
Una observación final: en nuestra derivación de la ecuación de Dirac, nos basamos en la suposición de que las componentes del campo de espín $\frac{1}{2}$ forman un *espacio vectorial lineal*, adecuado como base para construir una representación del grupo de Lorentz. Esta suposición, está físicamente muy lejos de ser trivial, porque corresponde a un *principio de superposición* y por lo tanto a una dualidad onda-partícula y a la teoría cuántica. En otras palabras, los campos con los que hemos tratado son campos cuánticos. El decir que debemos someter a estos campos a una "segunda cuantización" (lo que se encuentra frecuentemente en la literatura) es, en este sentido, erróneo. Es mejor decir que se estudiará más ampliamente lo que implica que estos campos sean campos cuánticos, por ejemplo investigando las relaciones de conmutación que deben mantenerse entre ellos (amplitudes de estados correspondientes).

5.2 Ecuaciones de Maxwell y Geometría Diferencial

Las ecuaciones de Maxwell (5.22) relacionan tensores antisimétricos y vectores, pero como indican los índices, lo hacen componente por componente. Comparadas con ecuaciones tales como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, esto puede ser considerado como un paso retrógrado; $\nabla \cdot \mathbf{B}$ es una notación más económica que $\nabla_i B_i$, a la que es equivalente. Esto nos lleva a preguntar, ¿hay una manera de escribir las ecuaciones de Maxwell en términos del tensor F y la corriente j, sin hacer referencia explícita a las componentes? Por el desarrollo de la geometría diferencial, efectivamente hay una manera de hacerlo, y las ecuaciones de Maxwell toman la elegange forma $dF = 0$, $d^*F = J$; ¡la antisimetría del tensor de campo F está automáticamente incluida! En esta sección se explicará brevemente esta notación. Una reacción común de los físicos a este tipo de desarrollo matemático es la de impaciencia. Después de todo, afirman, la ecuación $d^*F = J$ tiene que ser transladada a la forma $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ antes de que pueda tratarse en un sistema de coordenadas particular. Esto puede ser verdad, pero resulta que el desarrollo de notación (y esto se ha presentado repetidas veces en la historia)[1] ha correspondido a una dependencia en nuestro entendimiento. El punto es que, con todos los desarrollos en las matemáticas contemporáneas, se han introducido nuevos conceptos, y hecho distinciones que en el pasado no habían sido hechas.
Para empezar, considérese el significado de las integrales de línea y superficie ordinarias:

$$\begin{aligned} I_1 = &\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \\ I_2 = &\int_S (G_x dy \wedge dz + G_y dz \wedge dx + G_z dx \wedge dy) = \int_S \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

I_1 y I_2 son números. I_1 es la integral de algo sobre una línea C, y I_2 la integral de algo más sobre un superficie S. Luego, en algún sentido, el "algo" es *dual* a la "línea", ya que cuando se "combinan" (por la integral) el resultado es un número puro. Similarmente, para I_2, el "algo más" es dual a la "superficie". Sistematizamos esto acuñando nuevas palabras; la línea y la superficie son llamadas *cadenas*, y los objetos integrados sobre las cadenas son llamados *formas diferenciales*

[1] ejemplos muy simples de ello son las derivadas, la notación vectorial, el operador nabla, entre muchos otros.

o simplemente *formas*. Así que las formas son duales a las cadenas. Llamaremos a una línea una 1-cadena, porque tiene una dimensión, a una superficie 2-cadena, etc., y denotaremos la cadena genérica C_n, con n dimensiones. Entonces tenemos

$$\begin{array}{ll} C_0 & 0-\text{cadena=punto}, \\ C_1 & 1-\text{cadena=línea}, \\ C_2 & 2-\text{cadena=área}, \\ C_3 & 3-\text{cadena=volumen}, \\ C_n & n-\text{cadena}. \end{array} \tag{5.28}$$

Ahora, la frontera de una $n-$cadena es una $(n-1)$-cadena. La frontera de un área es una línea, y la de una línea son dos puntos. Definimos un *operador de frontera* ∂ que mapea una C_n a una C_{n-1}

$$C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \quad \text{o} \quad \partial C_n = C_{n-1}. \tag{5.29}$$

Algunas cadenas no tienen fronteras: la superficie de una esfera es una 2-cadena (área) que no tiene frontera, y una línea cerrada como una circunferencia es una 1-cadena sin fronteras. Tales *cadenas cerradas* son llamadas *ciclos* y denotadas Z_n. Como ellas no tienen frontera, es claro que

$$\partial Z_n = 0. \tag{5.30}$$

Por otra parte, hay cadenas que son ellas mismas fronteras de cadenas de dimensiones superiores, y son denotadas B_n:

$$B_n = \partial C_{n+1}. \tag{5.31}$$

Por ejemplo, una superficie cerrada B_2 es la frontera de un volumen, y una línea cerrada B_1 es la frontera de un área. Es claro que los B_n mismos no tienen frontera (son cerrados):

$$\partial B_n = 0. \tag{5.32}$$

Combinando las últimas dos ecuaciones tenemos

$$\partial^2 = 0. \tag{5.33}$$

En palabras, "la frontera de una frontera es cero", o una cadena que es frontera es cerrada. Una consideración interesante es si lo contrario es cierto: ¿es una cadena cerrada necesariamente la frontera de otra cadena? En espacios euclidianos la respuesta es afirmativa, de manera que $Z_n = B_n$. En general, sin embargo, hay cadenas cerradas que no son fronteras, por lo que $Z_n \supset B_n$. Por ejemplo, en un toro, puede haber curvas cerradas que no sean frontera de ninguna parte de la superficie del toro y puede haber otras curvas que sí. Similarmente, si consideramos como espacio una circunferencia S^1, ella misma no es frontera de ninguna parte del espacio; no puede verse como la frontera de un círculo, porque éste, que es bidimensional, no es parte de S^1, que es unidimensional. Esto es todo lo que necesitamos saber sobre cadenas.

Veamos ahora las *formas*. Como se mencionó antes, la integral de una forma sobre una cadena es un número. Escribimos

$$\int_{C_n} \omega_n = \int_{C_n} f_{i_1 \dots i_n} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \text{número}. \tag{5.34}$$

El producto cuña, $\wedge$, aparece arriba porque la orientación de una curva o superficie, etc., es importante. La existencia de integrales implica una dualidad entre formas y cadenas. Una 1-forma ω_1 es algo que se integra sobre una línea (1-cadena), así que en el espacio tridimensional es de la forma $Adx + Bdy + Cdz$. Otras formas siguen el mismo patrón, así que tenemos (en el espacio tridimensional)

$$\begin{array}{lll} 0 - forma & \omega_0 & \text{función} \\ 1 - forma & \omega_1 & Adx + Bdy + Cdz, \\ 2 - forma & \omega_2 & fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx, \\ 3 - forma & \omega_3 & Fdx \wedge dy \wedge dz, \end{array} \tag{5.35}$$

donde

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \qquad dx \wedge dx = 0, \quad etc. \tag{5.36}$$

Por (5.36), es claro que en un espacio $n-$dimensional hay $n-$formas, pero no formas $(n+1)$ o de grado superior. Si diferenciamos una $n - forma$ obtendremos algo como una $(n+1)$-forma: obtendremos precisamente una $(n+1)$-forma si en la diferenciación introducimos la antisimetrización anterior. Definimos el llamado *operador derivada exterior* d:

$$d\omega_n = \omega_{n+1}. \tag{5.37}$$

Su acción sobre una 1-forma (en el 3-espacio) es

$$\begin{aligned} d(Adx + Bdy + Cdz) &= \tfrac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \tfrac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx + \tfrac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy + \tfrac{\partial B}{\partial z} dz \wedge dy + \tfrac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dz + \tfrac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\tfrac{\partial B}{\partial x} - \tfrac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\tfrac{\partial C}{\partial y} - \tfrac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial A}{\partial z} - \tfrac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx. \end{aligned} \tag{5.38}$$

La 2-forma

$$\omega_2 = fdx \wedge dy + gdy \wedge dz + hdz \wedge dx$$

tiene derivada exterior

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{5.39}$$

En el primer ejemplo, (5.38), las cantidades

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

son las tres componentes de rot$\mathbf{F}$ donde $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. En el segundo ejemplo, poniendo $(g, h, f) = \mathbf{W}$, un vector, la cantidad $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$ es div$\mathbf{W}$. Ahora nótese que, en vista de (5.39), si calculamos la derivada exterior de (5.38), obtenemos cero de manera idéntica; en otras palabras

$$d[d(Adx + Bdy + Cdz)] = d^2(Adx + Bdy + Cdz) = 0$$

o, en general,

$$d^2 = 0. \tag{5.40}$$

En términos de componentes esto es

$$\text{div rot} = 0;$$

algunas veces d es llamado el *operador cofrontera*, para enfatizar el hecho de que $d^2 = 0$ es el dual de $\partial^2 = 0$ (ver ecuación (5.33); $d^2 = 0$ se conoce como el *lema de Poincaré*. Una $n-$forma ω_n se llama *cerrada* si $d\omega_n = 0$. Una $n-$forma se llama exacta si es la derivada de una $(n-1)-$forma, $\omega_n = d\omega_{n-1}$. El lema de Poincaré nos dice que todas las formas exactas son cerradas, ya que $d(d\omega_{n-1}) = d^2\omega_{n-1} = 0$, pero en general no es cierto que todas las formas cerradas son exactas, aunque esto se cumple en espacios euclidianos. Nuevamente, esto es por la dualidad entre cadenas y formas: en espacios euclidianos, todas las cadenas cerradas son fronteras. Resultados bien conocidos se siguen de la *fórmula de Stokes*, que dice que si ω es una $p-$forma, y c una $(p+1)-$cadena, entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \tag{5.41}$$

Como ejemplo, póngase $p = 2$. Sea entonces ω la 2-forma (en el 3-espacio),

$$\omega_2 = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy,$$

y sea C_3 un dominio V, con frontera ∂V. Entonces la fórmula de Stokes da

$$\int_{\partial V} A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy = \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

donde hemos usado (5.39); y esto es

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V div \mathbf{A} dV \tag{5.42}$$

que es el teorema de la divergencia (o teorema de Ostrogradsky-Gauss). Con $p = 1$ se tiene el teorema de Stokes

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S div \mathbf{A} d\mathbf{S}. \tag{5.43}$$

Hemos visto la relación entre el operador derivada exterior d y los operadores diferenciales usuales grad, div y rot. Sin embargo, si las componentes de $\mathbf{A}$ (en (5.42)) son los coeficientes de una 2-forma, div$\mathbf{A}$ es el coeficiente de la 3-forma que se obtiene al operar la 2-forma con d. En el lenguaje ordinario de vectores, el operador ∇ convierte un escalar en un vector, y un vector en, ya sea un escalar (div) o en un vector axial (rot). Hay sin embargo, un operador que no cambia el caracter escalar o vectorial; este es el laplaciano ∇^2 (en cuatro dimensiones el d'Alambertiano, $\partial_\mu \partial^\mu$ que se denota tambien con un cuadrito). ¿Cómo se representa en el lenguaje de las formas? Como d cambia una $p-$forma en una $(p+1)-$forma, necesitamos combinarlo con otro operador (δ) que cambie una $p-$forma en una $(p-1)-$forma. Para fijar ideas, trabajemos en el espacio tridimensional. El espacio de 1-formas es pues tridimensional, con base dx, dy y dz. El espacio de 2-formas es también tridimensional; de hecho las bases pueden escribirse como sigue:

$$\text{Bases de } \omega_p \text{ para } n=3 \begin{cases} \omega_0: & 1, \\ \omega_1: & dx, dy, dz, \\ \omega_2: & dx\wedge dy, dy\wedge dz, dz\wedge dx, \\ \omega_3: & dx\wedge dy\wedge dz. \end{cases} \tag{5.44}$$

obviamente, no hay 4-formas en el espacio 3-dimensional. Es claro que la dimensionalidad del espacio de $p-$formas es la misma que la del espacio de $(n-p)-$formas, así que podemos definir un operador que convierte una en otra. Este es conocido como el *operador* $Hodge^*$ (Hodge estrella) o *transformación dual*. En un espacio euclidiano (plano) esta definido por

$$^*(dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge ...\wedge dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon_{i_1 i_2 ... i_p i_{p+1}...i_n} dx^{i_{p+1}}\wedge dx^{i_{p+2}}\wedge ...\wedge dx^{i_n}. \tag{5.45}$$

Por lo que en el caso $n=3$ tenemos las siguientes bases para $^*\omega$:

$$\text{Bases de } {}^*\omega_p \text{ para } n=3 \begin{cases} {}^*\omega_0: & dx\wedge dy\wedge dz, \\ {}^*\omega_1: & dx\wedge dy, dy\wedge dz, dz\wedge dx, \\ {}^*\omega_2: & dx, dy, dz, \\ {}^*\omega_3: & 1. \end{cases} \tag{5.46}$$

Aplicando otra vez el operador * a una $p-$forma ω_p tenemos

$$^{**}\omega_p = (-1)^{p(n-p)}\omega_p. \tag{5.47}$$

Es claro que mientras que $d\omega_p \sim \omega_{p+1}$, $d(^*\omega_p) \sim^* \omega_{p-1}$, así que definimos el operador δ:

$$\delta = (-1)^{np+n+1}.^*d^*, \tag{5.48}$$

donde p es el grado de la forma ω_p sobre la que δ es aplicado y n es la dimensión del espacio; δ se llama *el operador derivada exterior adjunto*, y $\delta\omega$ es de grado $(p-1)$.
Como ejemplo, se mostrará que δ cambia la 1-forma $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}$ en una 0-forma:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}) \quad &= \delta(v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &= -^*d^*(v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &\quad -^*d(v_x dy\wedge dz + v_y dz\wedge dx + v_z dx\wedge dy) \\ &= -^*\left(\tfrac{\partial v_x}{\partial x} + \tfrac{\partial y}{\partial y} + \tfrac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz \\ &= -div\ \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Es fácil ver que, igual que d, el cuadrado de δ es cero:

$$\delta\delta = (-1)^{np+n+1}(-1)^{n(p-1)+n+1}.^*d^{**}d^* = (-1)^{n*}d^{2*},$$

y en vista de (5.40) tenemos

$$\delta^2 = 0. \tag{5.50}$$

Finalmente, el laplaciano Δ convierte $p-$formas a $p-$formas y se define por

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d. \tag{5.51}$$

Después de este largo preámbulo, puede ahora mostrarse cómo pueden ponerse las ecuaciones de Maxwell en una forma geométrica (o "intrínseca"). El espacio en el que se trabaja es, por supuesto, el espacio-tiempo de Minkowski de 4 dimensiones. Al bajar los índices del tensor de campo $F^{\mu\nu}$ en (5.7), obtenemos

$$\begin{array}{ccc} F_{01}=E_x, & F_{02}=E_y, & F_{03}=E_z, \\ F_{12}=-B_z, & F_{31}=-B_y, & F_{23}=-B_x. \end{array} \tag{5.52}$$

Luego definimos la *2-forma de Faraday* F por

$$\begin{aligned} F &= -\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \\ &= (E_xdx+E_ydy+E_zdz)\wedge dt \\ &\quad +B_zdx\wedge dy+B_xdy\wedge dz+B_ydz\wedge dx. \end{aligned} \tag{5.53}$$

La forma dual (que es también una 2-forma) $^*F$ es (ver (5.45))

$$\begin{aligned} ^*F &= -\tfrac{1}{2}F^*_{\mu\nu}(dx^\mu\wedge dx^\nu) \\ &= -E_xdy\wedge dz-E_ydz\wedge dx-E_zdx\wedge dy \\ &= +(B_xdx+B_ydy+B_zdz)\wedge dt. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Las componentes de $^*F$ en la base $dx^\mu\wedge dx^\nu$ son $-\frac{1}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}$ como se ve en (5.20)

$$^*F=-\frac{1}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu. \tag{5.55}$$

Finalmente, definimos la 3-forma densidad de corriente J:

$$J=(j_xdy\wedge dz+j_ydz\wedge dx+j_zdx\wedge dy)\wedge dt-\rho dx\wedge dy\wedge dz. \tag{5.56}$$

Se llega entonces a que las ecuaciones de Maxwell son

$$dF=0, \qquad d^*F=J. \tag{5.57}$$

Esto puede verse poniendo $F=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ y observando que $dF=0$ implica la ecuación (5.18), que es equivalente a las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas. Alternativamente, usando la ecuación (5.53), encontramos explicitamente

$$\begin{aligned} dF &= \tfrac{\partial E_x}{\partial y}dy\wedge dx\wedge dt+\tfrac{\partial E_x}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dt+\tfrac{\partial E_y}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dt+... \\ &\quad +\tfrac{\partial B_z}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy+\tfrac{\partial B_z}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy+... \\ &= \left(\tfrac{\partial E_y}{\partial x}-\tfrac{\partial E_x}{\partial y}+\tfrac{\partial B_z}{\partial t}\right)dx\wedge dy\wedge dt+...+(div\mathbf{B})dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned} \tag{5.58}$$

luego, $dF=0$ implica las dos ecuaciones

$$rot\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0; \qquad div\mathbf{B}=0,$$

que son las ecuaciones de Maxwell homogéneas. Manipulaciones similares muestran que $d^*F=J$ da las ecuaciones inhomogéneas.

En el espacio euclidiano (que, para nuestros propósitos puede extenderse al espacio de Minkowski), lo opuesto al lema de Poincaré es: todas las formas cerradas son exactas, así que si $dF=0$, entonces hay una 1-forma tal que

$$F = dA. \tag{5.59}$$

La 1-forma A será, en una base de coordenadas,

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{5.60}$$

y se sigue inmediatamente que la ecuación (5.59) es equivalente a $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, como en (5.4). La 1-forma A tiene un significado geométrico más amplio; es la *forma de conección* que es usada para definir derivadas covariantes. Sin embargo, si adoptamos el punto de vista de que el electromagnetismo da una derivada covariante, y por lo tanto una 1-forma de conección A, entonces $F = dA$ se conoce como la 2-forma de "curvatura", y la identidad $dF = 0$ se conoce como la *identidad de Bianchi*.

5.3 Fases en la Ecuación de Weinberg

La posibilidad de elegir fases diferentes en la relación de Ryder generalizada (4.2) y una base de helicidad, para posteriormente encontrar las diferencias respecto de las teorias convencionales, como se ha hecho en las secciones anteriores, no esta restringida al caso de espín $\frac{1}{2}$. Así pues, en esta sección se muestran razonamientos análogos para el caso de partículas de espín 1.

De igual manera a como obtuvimos la ecuación de Dirac ($s = \frac{1}{2}$) partiendo de la forma en como se transforman los espinores (reglas de Wigner), podemos construir una ecuación de movimiento para cuando $s = 1$. Entonces en las ecuaciones (4.1) $\mathbf{S}$ es el generador de las representaciones $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente y en este caso tiene la característica de que $(\mathbf{S} \cdot \phi)^2 \neq \phi^2$. Así, expandiendo en series $\Lambda_{R,L}$ y agrupando términos tenemos

$$\exp(\pm\mathbf{S} \cdot \phi) = 1 + (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \left[\frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{\phi^6}{6!} + ...\right] \pm \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \left[\phi + \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + ...\right] \tag{5.61}$$

o

$$\exp(\pm\mathbf{S} \cdot \phi) = 1 + (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2(\cosh\phi - 1) \pm (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathrm{senh}\phi$$

sustituyendo las relaciones (4.10) obtenemos

$$\Lambda_R = 1 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m(E+m)}, \qquad \Lambda_L = 1 - \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m(E+m)} \tag{5.62}$$

de manera que

$$\Lambda_R {\Lambda_L}^{-1} = \left[1 + \frac{2E}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{2}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2\right], \qquad \Lambda_L {\Lambda_R}^{-1} = \left[1 - \frac{2E}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{2}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2\right], \tag{5.63}$$

y entonces la ecuación (4.7) que ahora esta en la representación $(1, 0) \oplus (0, 1)$, se convierte en

$$\begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} & 1 + \frac{2E}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m^2} \\ 1 - \frac{2E}{m^2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m^2} & -e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = 0 \tag{5.64}$$

La nueva función de estado definida en esta representación se llama "bivector" y tiene seis componentes.

Multiplicando por m^2

$$\left(\begin{array}{cc} -m^2 e^{-i\alpha} & m^2 + 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 \\ m^2 - 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 & -m^2 e^{i\alpha} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right) = 0 \tag{5.65}$$

Ahora definimos unas nuevas matrices gamma de la siguiente manera [13]

$$\gamma^{00} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1_{3\times3} \\ 1_{3\times3} & 0 \end{array}\right), \quad \gamma^{i0} = \gamma^{0i} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -S^i \\ S^i & 0 \end{array}\right),$$

$$\gamma^{ij} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\delta_{ij} + S_i S_j + S_j S_i \\ -\delta_{ij} + S_i S_j + S_j S_i & 0 \end{array}\right); \tag{5.66}$$

y una matríz de fase de 6×6 análoga a la del caso de espín 1/2:

$$\Omega = \left(\begin{array}{cc} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{array}\right). \tag{5.67}$$

Entonces podemos reescribir la ecuación (5.65) como

$$(\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \Omega m^2 1_{6\times6})\Psi_{(6)}(p^\mu) = 0. \tag{5.68}$$

Esta es la ecuación generalizada análoga a (4.13) para espín 1. Igual que como vimos para el caso de espín 1/2 en la parte anterior, la presencia de la matríz de fase Ω puede determinar nuevas ecuaciones de movimiento y las peculiaridades correspondientes merecen ser estudiadas a fondo. Cuando en (5.68) la fase se fija de tal manera que Ω se reduce a la identidad, y se escribe en el espacio de las coordenadas (haciendo $p^\mu \to i\partial^\mu$), se llega a la ecuación que obedecen las partículas masivas de espín 1, que fue obtenida por Weinberg [37]:

$$(\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\Psi(x^\mu) = 0. \tag{5.69}$$

Por otra parte, es interesante observar que en base a la Electrodinámica Clásica se pueden obtener unas ecuaciones de transformación de bivectores compuestos de los campos eléctricos y magnéticos bajo empujes de Lorentz [3]

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \beta \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta(\beta\cdot\mathbf{E}) \tag{5.70}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \beta \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta(\beta\cdot\mathbf{B}) \tag{5.71}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ esta relacionado con (2.63)[3]. En términos de las componentes tenemos

[3]No debe confundirse esta gamma con las matrices "gamma".

$$
\begin{aligned}
E'_i &= \gamma(E_i + \epsilon_{ijk}\beta_j B_k) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_i\beta_j E_j &(5.72)\\
B'_i &= \gamma(B_i - \epsilon_{ijk}\beta_j E_k) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_i\beta_j B_j &(5.73)
\end{aligned}
$$

Introducimos ahora una representación particular de las matrices S: $(S_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$, es decir[4]

$$
S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.74}
$$

Gracias a la relación $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$, se cumple la siguiente igualdad para un vector arbitrario $\mathbf{a}$:

$$
(\mathbf{S}\cdot\mathbf{a})^2_{ij} = \mathbf{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j \tag{5.75}
$$

Con ayuda de las matrices S podemos escribir (5.73) como

$$
\begin{aligned}
E'_i &= \gamma(E_i + i(S_j)_{ik}\beta_j B_k) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2\delta_{ij} - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2_{ij}]E_j\\
B'_i &= \gamma(B_i - i(S_j)_{ik}\beta_j E_k) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2\delta_{ij} - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2_{ij}]B_j
\end{aligned} \tag{5.76}
$$

o

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \{\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2]\}\mathbf{E} - i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta)\mathbf{B}\\
\mathbf{B}' &= \{\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2]\}\mathbf{B} + i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta)\mathbf{E};
\end{aligned} \tag{5.77}
$$

en forma matricial:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2] & -i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) \\ i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) & \gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{5.78}
$$

Si introducimos la matríz unitaria $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ que satisface $U^\dagger U = 1$, y multiplicando por ella la ecuación (5.78) tenemos

$$
U\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} \gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2] & -i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) \\ i\gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) & \gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}[\beta^2 - (\mathbf{S}\cdot\beta)^2] \end{pmatrix} U^\dagger U \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{5.79}
$$

que se reduce a

[4] Estas son los mismos generadores que en la ec. (4.1). Otras representaciones pueden obtenerse por transformación unitaria.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' + i\mathbf{B}' \\ \mathbf{E}' - i\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\beta)^2 & 0 \\ 0 & 1 + \gamma(\mathbf{S}\cdot\beta) + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\mathbf{S}\cdot\beta)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} + i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} - i\mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{5.80}$$

Ahora bien, al diferenciar la ecuación $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ obtenemos $2E\mathrm{d}E - 2\mathbf{p}\cdot\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$ ó $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{E} = \mathbf{v} = \beta$; también postulamos $\gamma = \frac{E}{m}$, donde m esta relacionado no con el fotón, sino con una partícula con la que asociamos un sistema de referencia. Así:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' + i\mathbf{B}' \\ \mathbf{E}' - i\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})}{m} + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{m(E+m)} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})}{m} + \frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{m(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} + i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} - i\mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{5.81}$$

Nótese que hemos partido de las ecuaciones de transformación de los campos, los cuales no involucran ninguna masa y en principio deberían describir partículas sin masa. Esto concuerda con nuestro concepto actual del fotón y la idea de que el campo electromagnético no tiene masa. Sin embargo nos encontramos con que al introducir un parámetro de masa en la ecuación (5.81) se puede hacer coincidir los elementos diagonales de la matríz con las relaciones de transformación (5.62)), es decir como si hubiéramos considerado partículas masivas desde el principio. Hay que mencionar también que no está bien claro que significa empujar (en el sentido de transformaciones de Lorentz) un fotón sin masa, ya que este debe tener la misma velocidad en todos los sistemas de referencia. Este es un ejemplo que ilustra que a veces hay que distinguir entre transformaciones de Lorentz activas y pasivas.

5.4 Base de Helicidad para Espín 1.

En una sección anterior (4.2) vimos las consecuencias que resultan de la elección de la base de helicidad. Para ello construimos la ecuación de movimiento de las partículas en la representación correspondiente partiendo de la ecuación de dispersión (1.3), que esta ligada con la ecuación de Klein y Gordon. En esta ocasión procederemos de manera análoga para el caso de espín 1.

En lo que sigue usamos resultados de los artículos ([36], [35]). La ecuación de dispersión para una componente de un bivector, o sea un 3-"espinor" es ($\hbar = c = 1$)

$$(E^2 - p^2)\vec{\psi}_{(3)} = m^2\vec{\psi}_{(3)}, \tag{5.82}$$

que recordando la propiedad (5.75) reescribimos como

$$(E - \mathbf{S}\cdot\mathbf{p})(E + \mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij}\psi_j - p_i p_j \psi_j = m^2\psi_i. \tag{5.83}$$

Expresada en el espacio de las coordenadas, esta es de segundo orden en la derivada de t, lo que impide interpretarla en términos de un operador hamiltoniano. No obstante, similarmente a como hicimos en el caso de espín 1/2 podemos interpretarla como un conjunto de ecuaciones para 3-vectores (ver sección 4.2) para convertirlas en ecuaciones de primer orden. Desde un punto de vista físico esto es algo deseable puesto que queremos que nuestras funciones de estado satisfagan la ecuación de Schrodinger (1.4), que es de primer orden y permite encontrar la energía considerando el problema de eigen-valores y eigen-funciones.

Introducimos pues las siguientes notaciones

$$(E + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\vec{\psi} = m\vec{\xi} \tag{5.84}$$
$$p^i p^j \psi^j = \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \vec{\psi}) = m\mathbf{p}\varphi, \tag{5.85}$$

entonces (5.83) se escribe

$$m(E - \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\vec{\xi} - m\mathbf{p}\varphi = m^2\vec{\psi}. \tag{5.86}$$

Insertando las propiedades

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^{ij}\psi^j = (\nabla \times \psi)^i, \qquad p^i p^j \psi^j = -[\nabla (\nabla \cdot \psi)]^i, \tag{5.87}$$

y definiendo $\vec{\psi} = \mathbf{E} - i\mathbf{B}$ (que podemos pensar como la parte del bivector análoga de ϕ_L, "componente izquierda" del biespinor), obtenemos separando las partes real e imaginaria de las expresiones (5.84) y (5.85)

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -m \cdot \mathsf{Im}(\vec{\xi}), \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = m \cdot \mathsf{Re}(\vec{\xi}), \tag{5.88}$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -m \cdot \mathsf{Re}(\varphi) + const_x, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = -m \cdot \mathsf{Im}(\varphi) + const_x \tag{5.89}$$

respectivamente. Además después de fijar $\varphi = im\phi$ y $\vec{\xi} = im\mathbf{A}$, donde ϕ y $\mathbf{A}$ son los mismos que los definidos en la parte (5.1), ¡obtenemos las ecuaciones de Proca (5.23)! Para verificarlo sustituimos en la ecuación (5.86). Esto arroja por resultado $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi = \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, que son equivalentes a $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, la segunda ecuación de Proca.

Si tomamos el complejo conjugado de las ecuaciones (5.84), (5.85) y definimos ahora $\vec{\chi} = \mathbf{E}+i\mathbf{B}$ (parte del bivector análoga de ϕ_R para el biespinor), tenemos

$$(E - \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\vec{\chi} = -m\vec{\xi} \quad \text{o} \quad (E - \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = -im^2\mathbf{A}, \tag{5.90}$$
$$p^i p^j \chi^j = \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \vec{\chi}) = -m\mathbf{p}\varphi \quad \text{o} \quad \mathbf{p}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{E} + i\mathbf{B})] = -im^2\mathbf{p}\phi, \tag{5.91}$$
$$(E + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\vec{\xi} - \mathbf{p}\varphi = -m\vec{\chi} \quad \text{o} \quad (E + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\mathbf{A} - \mathbf{p}\phi = i(\mathbf{E} + i\mathbf{B}), \tag{5.92}$$

Con una definición apropiada de matrices, es posible escribir estas ecuaciones y sus contrapartes conjugadas como una sola ecuación matricial que, según nuestras consideraciones debe describir partículas de espín 1 (ver [2]).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & ip_z & -ip_y & p_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ip_z & -E & ip_x & p_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ip_y & -ip_x & -E & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & ip_z & -ip_y & -p_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ip_z & E & ip_x & -p_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ip_y & -ip_x & E & -p_z \\ -E & -ip_z & ip_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ip_z & -E & -ip_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ip_y & ip_x & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_x & -p_y & -p_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \varphi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \varphi \end{pmatrix}; \tag{5.93}$$

en forma simbólica podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & -(E+\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & \mathbf{p}_{3\times1} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & (E-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & -\mathbf{p}_{3\times1} \\ -(E-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ -\mathbf{p}_{1\times3} & 0_{1\times3} & 0_{1\times3} & 0 \end{pmatrix} \Xi = m\Xi, \tag{5.94}$$

donde $\Xi = (\vec{\chi}, \vec{\psi}, \vec{\xi}, \varphi)$ es una función de campo en columna de *diez* componentes. Esta ecuación es de primer orden y se conoce como ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau [2]. Observamos que para la ecuación de primer orden en la representación de espín 1 no es suficiente tomar un bivector, sino que es necesario considerar también el 4-vector potencial.[5] Al construir la ecuación (5.93) hemos utilizado las expresiones (5.86) y (5.90-5.92) y a primera vista parecería que omitimos las expresiones (5.84, 5.85). Sin embargo, puesto que φ y $\vec{\xi}$ son puramente imaginarios, nuestra ecuación incluye en realidad todos los casos. Si la escribimos usando ahora las expresiones (5.84-5.86) y (5.90) tenemos

$$\begin{pmatrix} (E+\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} & -m_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & (E-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & 0_{3\times1} & m_{3\times3} \\ \mathbf{p}_{1\times3} & 0_{1\times3} & -m_{1\times1} & 0_{1\times3} \\ -m_{3\times3} & 0_{3\times3} & -\mathbf{p}_{3\times1} & (E-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\chi} \\ \varphi \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = 0. \tag{5.95}$$

A veces es más conveniente escribir esta ecuación en términos de los campos eléctricos y magnéticos por separado. Para esto multiplicamos por una matríz unitaria

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1_{3\times3} & 1_{3\times3} & 0_{3\times1} & 0_{3\times3} \\ i_{3\times3} & -i_{3\times3} & 0_{3\times1} & 0_{3\times3} \\ 0_{1\times3} & 0_{1\times3} & \sqrt{2}_{1\times1} & 0_{1\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} & \sqrt{2}_{3\times3} \end{pmatrix}. \tag{5.96}$$

Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} E_{3\times3} & -i(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & 0_{3\times1} & 0_{3\times3} \\ i(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} & E_{3\times3} & 0_{3\times1} & -i\sqrt{2}m_{3\times3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{p}_{1\times3} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathbf{p}_{1\times3} & -m_{1\times1} & 0_{1\times3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}m_{3\times3} & \frac{i}{\sqrt{2}}m_{3\times3} & -\mathbf{p}_{3\times1} & (E-\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{3\times3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \\ im\phi \\ im\mathbf{A} \end{pmatrix}, \tag{5.97}$$

donde $\mathbf{p}_{1\times3} = (p_x, p_y, p_z)$ es una matríz fila y $p_{3\times1}$ es la misma matríz pero en columna.

Ahora bien, al tomar en cuenta las ecuaciones de Proca (5.23) y aplicando la defինción $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A^k$ y las propiedades del tensor de Levi-Civita, podemos obtener la ecuación deducida por Tucker y Hammer [39]:

$$\begin{pmatrix} E^2 - \mathbf{p}^2 - 2m^2 & E^2 - \mathbf{p}^2 + 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 \\ E^2 - \mathbf{p}^2 - 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 & E^2 - \mathbf{p}^2 - 2m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = 0, \tag{5.98}$$

que en forma covariante es

$$\left(\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + p^\mu p_\mu - 2m^2\right)\Psi_{(6)}(p^\mu) = 0.$$

[5] Sería interesante investigar que sucede al tomar una base de helicidad con esta ecuación. Sin embargo esto no se hará aquí y en cambio procederemos a trabajar con la ecuación de Weinberg-Tucker-Hammer, que es de segundo orden.

En el espacio de las coordenadas se escribe

$$\left(\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial^\mu\partial_\mu + 2m^2\right)\Psi(x^\mu) = 0, \tag{5.99}$$

con $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}$. En esta ecuación la función de estado sobre la que se actúa es un bivector, pero en cambio es de segundo orden.

Si imponemos la condición $\partial_\mu\partial_\nu \to -m^2$ recuperamos la ecuación de Weinberg [6] en el espacio de los momentos y con fase $\alpha = 0$ (ecuación (5.69)):

$$\Gamma\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m^2 & m^2 + 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 \\ m^2 - 2E(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 & -m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \tag{5.100}$$

Por comprobación directa de las relaciones de dispersión (haciendo $\det\Gamma = 0$), obtenemos $E^2 - \mathbf{p}^2 = -m^2$, lo que significa que la ecuación de Weinberg ¡permite soluciones taquiónicas!

Haciendo un recuento, hemos llegado a la conclusión de que las ecuaciones de Duffin-Kemmer-Petiau, Proca, Weinberg, Tucker-Hammer y Maxwell estan relacionadas, y ¡todas se obtienen de la ecuación de dispersión relativista *correcta*, $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$!

Al interpretar la ecuación (5.98) como un conjunto de ecuaciones para componentes del bivector en la base de helicidad, nos conduce a ($p = \mid \mathbf{p} \mid$):

$$\begin{aligned}
(E^2 - p^2 + 2Ep + 2p^2)\psi_\uparrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\chi_\uparrow, \\
(E^2 - p^2 - 2Ep + 2p^2)\chi_\uparrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\psi_\uparrow, \quad (h = 1) && (5.101)\\
(E^2 - p^2 - 2Ep + 2p^2)\psi_\downarrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\chi_\downarrow, \\
(E^2 - p^2 + 2Ep + 2p^2)\chi_\downarrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\psi_\downarrow, \quad (h = -1) && (5.102)\\
(E^2 - p^2)\psi_\rightarrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\chi_\rightarrow, \\
(E^2 - p^2)\chi_\rightarrow &= (2m^2 - (E^2 - p^2))\psi_\rightarrow, \quad (h = 0). && (5.103)
\end{aligned}$$

donde los 3-espinores en la base de helicidad son (véase [23]):

$$\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \frac{\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}, \chi_\rightarrow = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} \\ \cos\theta \\ \frac{\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \end{pmatrix}, \chi_\downarrow = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2}e^{-i\phi} \\ -\frac{\mathrm{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\cos\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}, \tag{5.104}$$

y satisfacen la condición de normalización $\chi^\dagger\chi = 1$.

Tomando en cuenta (5.101-5.103), podemos escribir los bivectores $u_{\uparrow,\downarrow,\rightarrow} = \begin{pmatrix} \chi_{\uparrow,\downarrow,\rightarrow} \\ \psi_{\uparrow,\downarrow,\rightarrow} \end{pmatrix}$ de la siguiente manera

$$u_{1,\uparrow} = N_\uparrow\begin{pmatrix} \chi_\uparrow \\ \frac{2m^2-(E^2-p^2)}{E^2-p^2+2Ep+2p^2}\chi_\uparrow \end{pmatrix}, \quad u_{1,\rightarrow} = N_\rightarrow\begin{pmatrix} \chi_\rightarrow \\ \frac{2m^2-(E^2-p^2)}{E^2-p^2}\chi_\rightarrow \end{pmatrix}, \quad u_{1,\downarrow} = N_\downarrow\begin{pmatrix} \chi_\downarrow \\ \frac{2m^2-(E^2-p^2)}{E^2-p^2-2Ep+2p^2}\chi_\downarrow \end{pmatrix}; \tag{5.105}$$

[6] Hoy en día no está bien clara esta posibilidad por la razón de que las ecuaciones de Tucker-Hammer y la ecuación de Weinberg tienen soluciones con diferentes relaciones de dispersión (véase [40]).

introduciendo $\overline{u}_\lambda = u^\dagger \gamma^{00}$, $v_\lambda = \gamma^5 u_\lambda$ (donde $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & -1_{3\times 3} \end{pmatrix}$), normalizando a la unidad e imponiendo la condición $m^2 = E^2 - p^2$, nuestros bivectores son entonces

$$u_{1,\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{E+p}{m}\chi_\uparrow \\ \frac{m}{E+p}\chi_\uparrow \end{pmatrix}, u_{1,\rightarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_\rightarrow \\ \chi_\rightarrow \end{pmatrix}, u_{1,\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{m}{E+p}\chi_\downarrow \\ \frac{E+p}{m}\chi_\downarrow \end{pmatrix}, \tag{5.106}$$

$$v_{1,\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{E+p}{m}\chi_\uparrow \\ -\frac{m}{E+p}\chi_\uparrow \end{pmatrix}, v_{1,\rightarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_\rightarrow \\ -\chi_\rightarrow \end{pmatrix}, v_{1,\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{m}{E+p}\chi_\downarrow \\ -\frac{E+p}{m}\chi_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{5.107}$$

Bajo las operaciones de simetría discreta ellos tienen el comportamiento siguiente:

1. Paridad ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi + \phi$). Los 3-"espinores" se transforman como $\chi_h \to -\chi_{-h}$, y el operador paridad es $P = \gamma^{00}$, el análogo del que se utilizó para espín 1/2 (ver (4.44)). Entonces

$$Pu_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = -u_{1,\downarrow}(\mathbf{p}),\ \ Pu_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = -u_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}),\ \ Pu_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = -u_{1,\uparrow}(\mathbf{p}), \tag{5.108}$$

$$Pv_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = +v_{1,\downarrow}(\mathbf{p}),\ \ Pv_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = +v_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}),\ \ Pv_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = +v_{1,\uparrow}(\mathbf{p}); \tag{5.109}$$

2. Conjugación de Carga

$$C = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ -\Theta & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K} \tag{5.110}$$

(similar a (4.61)) con $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de donde $\Theta\chi_\uparrow = \chi_\downarrow$, $\Theta\chi_\downarrow = \chi_\uparrow$, $\Theta\chi_\rightarrow = -\chi_\rightarrow$. Entonces tenemos

$$Cu_{1,\uparrow}(\mathbf{p}) = +e^{i\alpha}v_{1,\downarrow}(\mathbf{p}),\ \ Cu_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}v_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}),\ \ Cu_{1,\downarrow}(\mathbf{p}) = +e^{i\alpha}v_{1,\uparrow}(\mathbf{p}), \tag{5.111}$$

$$Cv_{1,\uparrow}(\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}u_{1,\downarrow}(\mathbf{p}),\ \ Cv_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}) = +e^{i\alpha}u_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}),\ \ Cv_{1,\downarrow}(\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}u_{1,\uparrow}(\mathbf{p}); \tag{5.112}$$

Finalmente,

3. Operación CP y PC:

$$CPu_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = -PCu_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}v_{1,\uparrow}(\mathbf{p}), \tag{5.113}$$

$$CPv_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = -PCv_{1,\uparrow}(-\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}u_{1,\uparrow}(\mathbf{p}), \tag{5.114}$$

$$CPu_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = -PCu_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}v_{1,\downarrow}(\mathbf{p}), \tag{5.115}$$

$$CPv_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = -PCv_{1,\downarrow}(-\mathbf{p}) = -e^{i\alpha}u_{1,\downarrow}(\mathbf{p}), \tag{5.116}$$

$$CPu_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = -PCu_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = +e^{i\alpha}v_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}), \tag{5.117}$$

$$CPv_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = -PCv_{1,\rightarrow}(-\mathbf{p}) = +e^{i\alpha}u_{1,\rightarrow}(\mathbf{p}). \tag{5.118}$$

Encontramos entonces que dentro del marco de la teoría clásica de campos, las partículas y anti-partículas tienen diferentes propiedades con respecto a la paridad como de costumbre, pero los bivectores *no son* eigen-estados del operador paridad. No obstante, el comportamiento bajo CP de partículas y anti-partículas son los mismos de acuerdo con (5.113-5.118). Esto difiere con el caso de los biespinores de Dirac (por ejemplo $Cu_\uparrow = +iv_\downarrow$, $Cv_\uparrow = -iu_\downarrow$) y los bivectores de Weinberg-Ahluwalia [32].

Estos resultados pueden tener importancia al momento de trabajar con un operador de campo que sea contruido de estados CP-conjugados.

$$\Psi(x) = \sum_h \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[\psi(p^\mu) a_h(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + \psi^{CP}(p^\mu) {b_h}^\dagger(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} \right]$$

Sin embargo para poder llegar a esta conclusión de manera más definitiva debemos repetir los cálculos en el espacio de Fock, es decir dentro del marco de la "segunda cuantización" como hicimos en la parte 4 para el caso de espín 1/2.

Parte 6

Conclusiones

De acuerdo con lo tratado en esta tesis, podemos sintetizar las siguientes conclusiones e inferencias:

- La ecuación de Dirac que originalmente se ha deducido por diferentes métodos (como el método de escribir una ecuación hamiltoniana, partiendo de la relación de dispersión de Einstein), puede derivar también en base a las reglas de Wigner de transformación de espinores y la relación de Ryder.

- Generalizando la relación de Ryder (introduciendo una fase arbitraria entre las componentes izquierda y derecha en reposo) se obtiene una ecuación de movimiento más general para la representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Si se consideran los anticonmutadores de las funciones de campo correspondientes, tenemos que estos son diferentes de cero para intervalos del género espacial a tiempos iguales. Esto nos lleva a la conclusión de que la teoría generalizada es no-local.

- En el caso fases $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ se tiene una dinámica diferente. El lagrangiano contiene *dos* funciones biespinoriales, lo que podría servir para explicar el problema del isoespín débil.

- Los resultados físicos también dependen de la elección de la base de espín (lo cual es muy sorprendente, ya que las bases de espín estan relacionadas a través de transformaciones unitarias)

- Los biespinores $u_{\uparrow(\downarrow)}$, $v_{\uparrow(\downarrow)}$ para esín 1/2 *no son* eigen-biespinores del operador paridad (recuérdese que paridad es un número cuántico "bueno"; conmuta con el hamiltoniano). Esto se probó tanto a nivel de la teoría clásica de campos como a nivel de segunda cuantización (espacio de Fock).

- La relación de Ryder generalizada es válida también en otras representaciones, por ejemplo $(1, 0) \oplus (0, 1)$. Usando la fase arbitraria encontramos la ecuación correspondiente para espín 1 en la sección (5.3).

- Las ecuaciones de Weinberg, Tucker-Hammer y Proca pueden deducirse partiendo de las ecuaciones de Duffin-Kemmer-Petiau, que a su vez se obtiene de la relación de dispersión relativista para una función de 3 componentes.

- Las expresiones de transformación de Lorentz de los campos eléctricos y magnéticos que se obtienen en la electrodinámica clásica, son las mismas que las de los 3-vectores que conforman el bivector de la ecuación de Weinberg *con masa*.

- Una consideración de las propiedades de los biespinores y bivectores respecto a las operaciones P, C, CP, pueden llevar a un mejor entendimiento de los campos cuánticos que se construyen de estados conjugados P, C y CP (tales como electrón, positrón, neutrino, fotón, bosónes-$W^{\pm}$, bosón-Z).

En trabajos futuros intentaremos dar una base más sólida a nuestros resultados, considerando la "segunda cuantización" para el espín 1 en el espacio de Fock, tomando en cuenta tanto modos transversales como longitudinales de campos de tipo electromagnético, tomando en cuenta los problemas de normalización y relacionando nuestros resultados con los modelos acostumbrados (teoría electrodébil y cromodinámica cuántica).

Agradecimientos

Este trabajo representa la culminación de mi formación profesional, en la cual tomaron parte muchas personas.
Todo el apoyo (en todos los sentidos) se lo debo a mis padres. Las ideas expuestas son de mi asesor, Dr. Valeri Dvoeglazov, con quien estoy agradecido además por compartir sus conocimientos y por su paciencia. Me siento agradecido también con todos mis maestros, porque de una u otra forma contribuyeron a mi formación. Aprecio mucho los momentos que conviví con mis compañeros Pepe, Juan, Germán, Gaby, Irma y Tena, que aprendimos juntos y que estuvieron en mi mente al escribir esta tesis.

Referencias

[1] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[2] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer, 3Ed. (1981).

[3] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, Reverté, 2Ed. (1992).

[4] L. Schiff, *Quantum Mechanics*, 2Ed., McGraw-Hill (1955).

[5] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Reverté (2000).

[6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).

[7] V. V. Dvoeglazov, *Base de Helicidad y Paridad*, Memorias de la 8a Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas, 12-16 de Mayo de 2003, ESFM-IPN, Méxio, D.F., p. 45-54.

[8] V. V. Dvoeglazov, *Extra Dirac Equations*, Il Nuovo Cimento, Vol. **111**B, N.4 (1996) p. 483-496.

[9] V. V. Dvoeglazov, *Significance of de Spinorial Basis in Relativistic Quantum Mechanics*, FIZIKA B **6**, 3 (1997), p.111-122.

[10] V. V. Dvoeglazov, *Majorana-Like Models in the Physics of Neutral Particles*, Advances in Applied Clifford Algebras **7** (S) (1997) p.303-319.

[11] V. V. Dvoeglazov, *Spinors, Relativity and Nonlocality*, Hadronic J. Suppl. , Vol. 18, N.1-2 (2002) p.355-367.

[12] E. P. Wigner, *On unitary representation of the inhomogeneous Lorentz group.*, Ann. Math. **40** (1939) p.149-204

[13] Barut, Muzinich, Williams, Phys. Rev. (1963), 130, 442.

[14] G. Ziino, Ann. Fond. Broglie **14**, (1989), p. 427; ibid **16**, (1991), p. 343; A. Barut y G. Ziino, Mod. Phys. Lett. A**8**, (1993) p. 1011; G. Ziino, Int. J. Mod. Phys. A**11**, (1996), p. 2081.

[15] N. D. S. Gupta, Nucl. Phys. B**4**, (1967), p. 147; D. V. Ahluwalia, Int. J. Mod. Phys. A**11**, (1996), p. 1855; V. Dvoeglazov, Hadronic J. **20**, (1997), p.435.

[16] V. V. Dvoeglazov, Mod. Phys. Lett. A**12**, (1997), p. 2741.

[17] V. V. Dvoeglazov, Spacetime and Substance **3**(12), (2002). p.28; *Generalized Weyl and Maxwell Equations for Massless Particles.*Rev. Mex. Fis. Supl.1, v.49, (2003), p.99-103.

[18] V. V. Dvoeglazov, Physica Scripta **64**, (2001), p.201; Hadronic J. **25**, (2002), p.137; *Generalizations of the Dirac Equation and the Modified Bargmann-Wigner Formalism*

[19] V. B. Berestetskiĭ, E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevskiĭ, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press (1982), §16.

[20] Yu. V. Novozhilov, *Introduction to Elementary Particle Physics*, Pergamon Press, (1975) §4.3, 6.2.

[21] M. Jackob y G. C. Wick, Ann. Phys. **7**, (1959) p. 404.

[22] H. M. Ruck y W. Greiner, J. Phys. G: Nucl. Phys. **3**, (1977) p. 657.

[23] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev y V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* , World Scientific, (1988) §6.2.5.

[24] V. V. Dvoeglazov, Fizika B**6**, (1997) p. 111.

[25] N. N. Bogoliubov y D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* Wiley (1980).

[26] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields.* Vol. I. Foundations. Cambridge University Press (1995).

[27] C. Itzykson y J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* McGraw-Hill Book Co., (1980), Chapter 3-4.

[28] W. Greiner, *Field Quantization*, Springer (1996), Chapter 10.

[29] I. M. Gel'fand y M. L. Tsetlin, ZhETF **31**, 1107 (1956) [Compilación en ingles: Sov. Phys. JETP **4**, 947 (1957)]; G. A. Sokolik, ZhETF **33**, 1515 (1957) [Compilación en ingles: Sov. Phys. JETP **6**, 1170 (1958)].

[30] B. Nigam y L. Foldy, Phys. Rev. **102**, (1956) p. 1410.

[31] E. P. Wigner, en *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics – Lectures of the Istanbul Summer School of Theoretical Physics, 1962*, ed. F. Gürsey, Gordon and Breach (1964).

[32] D. V. Ahluwalia, M. B. Johnson y T. Goldman, Phys. Lett. B**316** (1993), p. 102; V. V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys. **37**, 1915; 1998, y las citas en estos trabajos.

[33] A. Sankaranarayanan y R. H. Good, jr., Nuovo Cim. **36**, (1965), 1303.

[34] V. V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys. **37** (1998), p. 1915-1944.

[35] A. Gersten, Found. Phys. Lett. 12 (1999), p. 291.

[36] V. V. Dvoeglazov, J. Phys. A. 33 (2000) p. 5011-5016.

[37] S. Weinberg, *Feynman rules for any spin*, Phys. Rev. 133B, (1964) p. 1318; *Feynman rules for any spin II. Massless Particles*, Phys. Rev. 134B (1964) p. 882-896.

[38] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1967).

[39] R. H. Tucker y C. L. Hammer, *New Quantum Electrodynamics for Vector Mesons*, Phys. Rev. D**3** (1971) p. 2448-2460.

[40] V. V. Dvoeglazov, *Mapping between Antisymmetric Tensor and Weinberg Formulation*, Helv. Phys. Acta, vol. 70 (1997) p. 677-685.